Тема 4: Преобразования 3D.

Преобразования в 3D трехмерных координатах

При рассмотрении трехмерных преобразований, используется общепринятая в векторной алгебре правая система координат (рис. а). При этом, если смотреть со стороны положительной полуоси в центр координат, то поворот на $+90^{\circ}$ (против часовой стрелки) переводит одну положительную ось в другую (направление движения, расположенного вдоль оси и поворачивающегося против часовой стрелки правого винта и положительной полуоси совпадают). В некоторых, специально оговариваемых случаях, используется левая система координат (см. рис. б). В левой системе координат положительными будут повороты по часовой стрелке, если смотреть с положительного конца полуоси. В трехмерной машинной графике более удобной является левая система координат. Тогда если, например, поверхность экрана совмещена с плоскостью XY, то большим удалениям от наблюдателя соответствую точки с большим значением Z (см. рис. б).

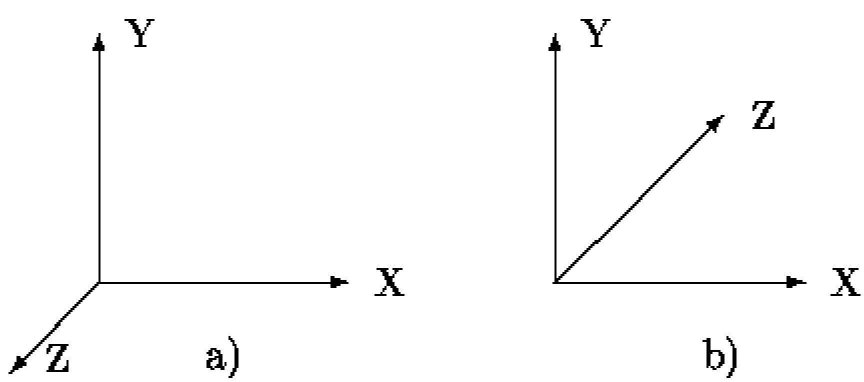

Рис. 0.1.1: Правая а) и левая б) системы координат

Работа с однородными трехмерными координатами и матрицами преобразования подобна двумерного случая, поэтому здесь будут рассмотрены только матрицы преобразований сдвига, масштабирования и поворота и пример конструирования матрицы преобразования по известному его результату.

Подобно тому как в двумерном случае точка в однородных координатах представляется трехмерным вектором [x y w], а матрицы преобразований имеют размер 3×3, для трехмерного случая точка представляется четырехмерным вектором [x y z w], где w не равно 0, а матрицы преобразований имеют размер 4×4. Если w не равно 1, то декартовые координаты точки (X, Y, Z) получаются из соотношения:

[X Y Z 1] = (x/w) (y/w) (z/w) 1]

Преобразование в однородных координатах описывается соотношением

[xn yn zn wn] = [x y z w] ·T.

Матрица преобразования T в общем случае имеет вид

$$\begin{vmatrix} A & B & C & P \\ D & E & F & Q \\ I & J & K & R \\ L & M & N & S \end{vmatrix}$$

Подматрица 3×3 определяет суммарные смещение, масштабирование и поворот. Подматрица-строка 1×3 - [L M N] задает сдвиг. Подматрица-столбец 3×1 - [P Q R] отвечает за преобразование в перспективе. Последний скалярный элемент - S определяет общее изменение масштаба.

В частности, матрица сдвига имеет вид:

$$\mathrm{T(Tx, Ty, Tz)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & Tz & 1 \end{vmatrix}$$

Матрица обратного преобразования для сдвига получается путем смены знака у Tx, Ty и Tz.

Матрица масштабирования относительно центра координат имеет вид:

$$\mathrm{S(Sx, Sy, Sz)} = \begin{vmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Матрица обратного преобразования для масштабирования формируется при замене Sx, Sy и Sz на величины, обратные к ним.

Матрица поворота относительно оси Z:

$$Rz(u_z) = \begin{vmatrix} cos(u_z) & \sin(u_z) & 0 & 0 \\ -\sin(u_z) & \cos(u_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

При повороте вокруг оси X (в плоскости YZ) размеры вдоль оси X не меняются, поэтому все элементы первой строки и первого столбца равны 0, за исключением диагонального, равного 1:

$$Rx(u_x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(u_x) & sin(u_x) & 0 \\ 0 & -sin(u_x) & cos(u_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

При повороте вокруг оси Y (в плоскости XZ) размеры вдоль оси Y не меняются, поэтому все элементы второй строки и второго столбца равны 0, за исключением диагонального, равного 1:

$$Ry(u_y) = \begin{vmatrix} cos(u_y) & 0 & -sin(u_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sin(u_y) & 0 & cos(u_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Столбцы и строки подматриц 3×3 матриц поворота Rx, Ry, Rz, аналогично двумерному случаю, представляют собой взаимно ортогональные единичные векторы. Матрица преобразования для произвольной последовательности поворотов вокруг осей X, Y и Z имеет вид:

$$R = \begin{vmatrix} R1x & \mathrm{R1y} & R1z & 0 \\ R2x & R2y & R2z & 0 \\ R3x & R3y & R3z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

причем столбцы (и строки) представляют собой взаимно ортогональные единичные векторы. Более того, векторы-столбцы при повороте, задаваемом матрицей, совмещаются с соответствующими осями координат. Матрица, столбцы (или строки) которой представляют собой взаимно ортогональные векторы, называется ортогональной. Для любой ортогональной матрицы M обратная матрица совпадает с транспонированной. Это обеспечивает простоту вычисления обратного преобразования для поворота. Причем не надо фактически выполнять транспонирование, а достаточно просто поменять местами индексы строк и столбцов.

Взаимная ортогональность столбцов матрицы поворота и их совмещение с осями координат при преобразовании, задаваемом матрицей, позволяет легко сконструировать матрицу преобразования, если известны его результаты.