Тема 3: Геометрические преобразования и визуализации 2D Элементарные геометрические преобразования (трансляция-перемещение, маштабирование, вращение). Композиция двумерных преобразований. Геометрические преобразования в однородных координатах. Зеркальное отражение растяжение (форфексия). Преобразования системы координат.

Преобразования используются в синтезе изображений. Они позволяют:

- представление рисунков в желательном масштабе;

- выполнение операций по масштабированию и детализации изображений;

- выполнение анимации;

Каждой точке на плоскости ставится в соответствие пара чисел – ее координаты M(x,y).

Существует две точки зрения о преобразованиях:

1) либо перемещается точка в неизменной системе координат M(x,y)→ M'(x',y')

$$\begin{cases} x' = x + d \\ y' = y \end{cases}$$

Точка M(x,y) перемещается на право на расстояние d. Это преобразование соответствует преобразованию точки в соотношении с фиксированной системой координат и представляется математически как – **геометрическое преобразование** над точкой.

2) либо сохраняется точка, а изменяется координатная система (x,y)→ (x',y') – **преобразование системы координат**, точка M'(x',y') является точкой в преобразованной системе.

$$\begin{cases} x' = t_{11}x + t_{12}y + x'_0 \\ y' = t_{21}x + t_{22}y + y'_0 \end{cases}$$

где (x, y) – координаты точки в ≪старой≫ системе координат, а (x', y') – в ≪новой≫ системе координат;

t_{ij}, x'_0, y'_0 - числа, связанные неравенством

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Выражения описывают новые координаты точки после выполнения над ней ряда геометрических преобразований в одной системе координат. Числа - tij, x'_0, y'_0 - описывают параметры конкретных преобразований, но определить их значения для желаемого вида преобразований весьма затруднительно. В преобразованиях плоскости особую роль играют несколько важных частных случаев, для которых числовые коэффициенты уравнений перевода имеют ясный геометрический смысл.

Называется аффинной (общей декартовой) системой координат - декартова система координат, в которой единицы масштаба (единицы отсчета) на координатных осях различны.

Под компьютерной графикой на плоскости, или двумерной компьютерной графикой понимают отображение на экране плоских, то есть двумерных объектов. В двумерной графике нет необходимости в операциях проецирования и наложения теней, так как объект плоский и расположен в одной плоскости – плоскости экрана. К геометрическим преобразованиям плоских объектов относятся **сдвиг, поворот, масштабирование и отражение** в плоскости экрана. Эти преобразования относятся к так называемым аффинным преобразованиям.

Геометрические преобразования объекта состоит в преобразовании каждой точки объекта.

Сдвиг

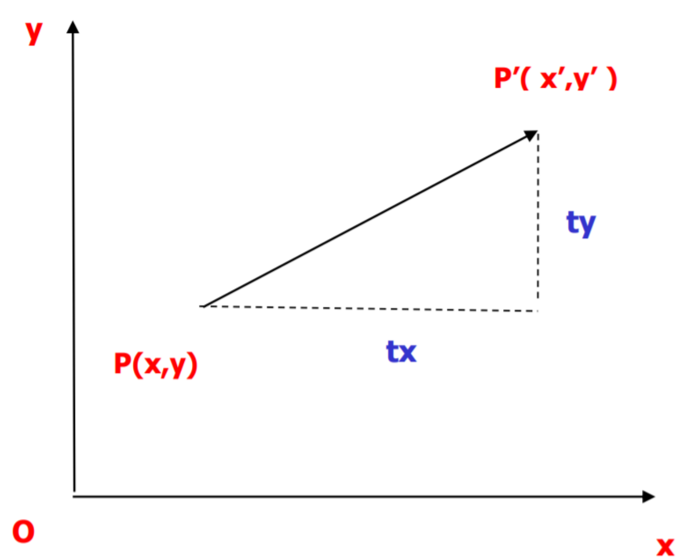
Сдвиг является преобразованием, которое позволяет перемещать объект на определённую позицию, или в определённом направлении.

Математически сдвиг определяется вектором:

$$v = tx * I + ty * J$$

Если (x, y) являются координатами точки **P** объекта, то сдвигая объект на расстояние вектора $\boldsymbol{v}$, топка **P** преобразовывается в **P'(x',y')**, где **x'** и **y'** определяются следующим образом:

$$\begin{cases} x' = x + tx \\ y' = y + ty \end{cases}$$



Масштабирование

А) Масштабирование по отношению к началу системы координат

Масштабирование является преобразованием, которое позволяет увеличивать или уменьшать объект. Определяется двумя числами: **фактор масштабирования по оси х, фактор масштабирования по оси у.**

Положительный фактор масштабирования определяет изменения размера в положительном направлении оси х или у.

Фактор масштабирования находящийся в интервале 0>1 определяет увеличение, а фактор масштабирования больше 1определяет увеличение.

Масштабирование точки P(x,y) по отношению к началу на факторы **sx** (фактор масштабирования по оси Ox) и **sy** (фактор масштабирования по оси Oy) – представляет масштабирование вектора OP(x,y), который соединяет начало с точкой P. Получившийся вектор после масштабирования OP’(x’,y’);

Где:

$$\begin{cases} x' = x * sx \\ y' = y * sy \end{cases}$$

Если **sx = sy,** масштабирование называется однородным – не деформирует объект;

Если **sx <или> sy,** масштабирование называется неоднородным

Б) Масштабирование относительно точки на плоскости

Если F(xf, yf) точка на плоскости относительно которой масштабируем точку P(x,y). Точка F называется фиксированной точкой преобразования – потому что она не изменяется после преобразования. Масштабирование точки P по отношению к точке F на факторы sx и sy означает масштабирование вектора FP.

Компонентами масштабированного вектора FP’, являются:

$$dx' = x' - xf = (x - xf) * sx$$

$$dy' = y' - yf = (y - yf) * sy$$

Где:

$$x' = x - sx + xf - xf * sx$$

$$y' = y - sy + yf - yf * sy$$

Если xf = 0 и yf = 0 то получим формулу масштабирования по отношению начала координат.

Вращение

А) Вращение по отношению к началу

Это преобразование определяется углом вращения

Если угол положительный, то вращение происходит в тригонометрическом направлении.

Если угол отрицательный, то вращение происходит по часовой стрелке.

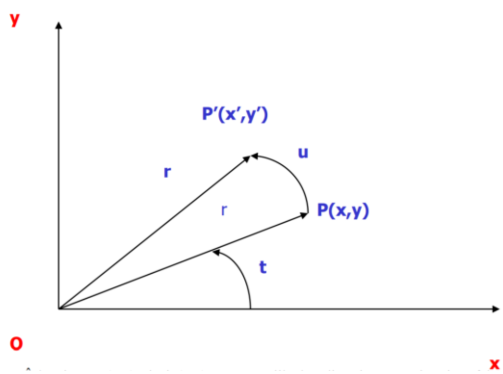
Пусть точка P(x,y) и угол вращения **u**, точка P'(x',y') рассчитывается, в зависимости от вращения точки P на угол u вокруг начала координат, по формуле:

Декартовые координаты точки P:

$$x = r * \cos(t)$$
$$y = r * s\,in(t)$$

Декартовые координаты точки P':

$$x' = r * \cos(t + u)$$
$$y' = r * s\,in(t + u)$$



Учитывая тригонометрические выражения получаем формулу:

$$x' = x * \cos(u) - y * \sin(u)$$
$$y' = x * \cos(u) + y * \cos(u)$$

Б) Вращение относительно точки на плоскости

Пусть точка P(x, y), угол вращения **u** и точка F(xf, yf) вокруг которой будет вращаться точка P. Точка P'(x',y') будет рассчитываться в зависимости от вращения точки P на угол **u**, вокруг F представляется следующей формулой:

$$x' = x * \cos(u) - y * \sin(u) + xf - xf * \cos(u) + yf * \sin(u)$$
$$y' = x * \sin(u) + y * \cos(u) + yf - xf * \sin(u) - yf * \sin(u)$$

Композиция двумерных преобразований

Преобразования, проведённые над объектом в определённый момент времени, могут состоять из нескольких элементарных преобразований. Например: для симуляции движения автомобиля по траектории отображается на экране изображение автомобиля, каждое изображение высчитывается преобразовывая предыдущее применяя элементарные графические преобразования:

- сдвиг
- вращение
- масштабирование

Если необходимо преобразовать каждую точку изображения применяя все три преобразования получим низкую скорость движения объекта в целом. В этом случае нужно совместить все преобразования в одну формулу которая позволить увеличить скорость движения. Такая формула получается на основе выражений в виде матриц.

Вращение точки P(x, y) по отношению к началу

Выражается в виде матрицы следующим образом:

$$|x' \quad y'| = |x \quad y| \bullet \begin{vmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) \end{vmatrix}$$

Масштабирование по отношению к началу системы координат с последующим вращением относительно начала выражается следующим образом:

$$|x' \quad y'| = |x \quad y| \bullet \begin{vmatrix} sx & 0 \\ 0 & sy \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) \end{vmatrix}$$

В результате получаем:

$$S \bullet R = \begin{vmatrix} sx \bullet \cos(u) & sx \bullet \sin(u) \\ -sy \bullet \sin(u) & sy \bullet \cos(u) \end{vmatrix}$$

S – матрица масштабирования R – матрица вращения

Формула преобразования будет следующей:

$$x' = x \bullet sx \bullet \cos(u) - y \bullet sy \bullet \sin(u)$$
$$y' = x \bullet sx \bullet \cos(u) - y \bullet sy \bullet \cos(u)$$

Преобразования в однородных координатах

Двумерные преобразования, представленные выше можно выразить в матричном виде в декартовых координатах, но не существует таких матриц для сдвига. Исходя из этого преобразования представляются в однородных координатах.

Точка P(x, y) представляется в однородных координатах вектором $[x_0 \;\; y_0 \; o]$, где $x_0 = x * o$ и $y_0 = y * o$, а $\boldsymbol{o}$ – любое реальное число. Вектор $[a \;\; b \; c]$ однородных координатах, где $c \neq 0$, представляет точку $\left[\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right]$ в плане.

Преобразования в однородных координатах выражаются следующим образом:

Сдвиг:

$$|x' \quad y' \quad 1| = |x \quad y \quad 1| \bullet \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ tx & ty & 1 \end{vmatrix}$$

Масштабирование относительно начала:

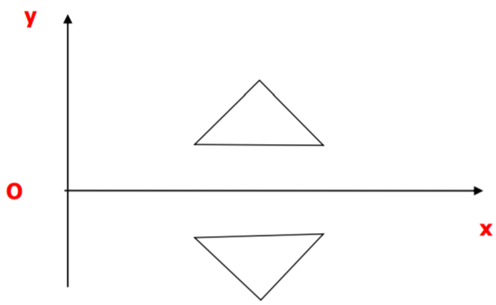
$$|x' \quad y' \quad 1| = |x \quad y \quad 1| \bullet \begin{vmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Вращение относительно начала:

$$|x' \quad y' \quad 1| = |x \quad y \quad 1| \bullet \begin{vmatrix} \cos(u) & \sin(u) & 0 \\ -\sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Другие графические преобразования 2D

Зеркальное отражение относительно оси OX:

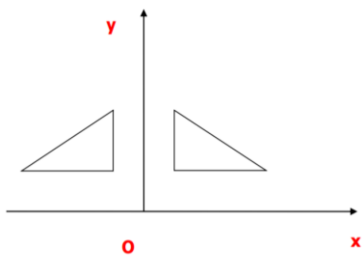


$$x' = x \qquad y' = -y$$

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \bullet \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Зеркальное отражение относительно оси OY:

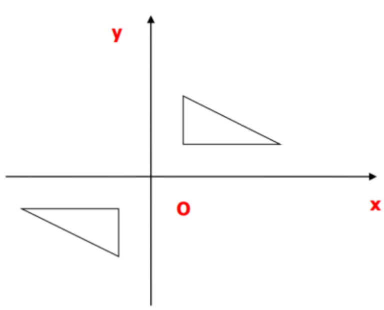
$$x' = -x$$
$$y' = y$$



$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \bullet \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Зеркальное отражение относительно начала:

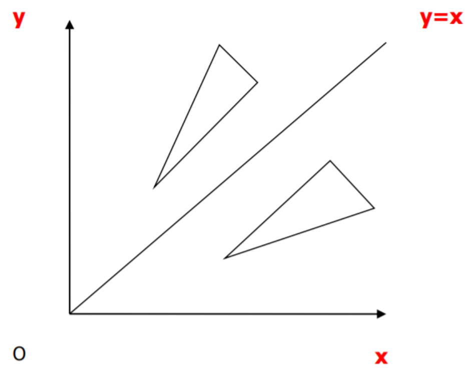
$$x' = -x$$
$$y' = -y$$



$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \bullet \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Зеркальное отражение относительно прямой

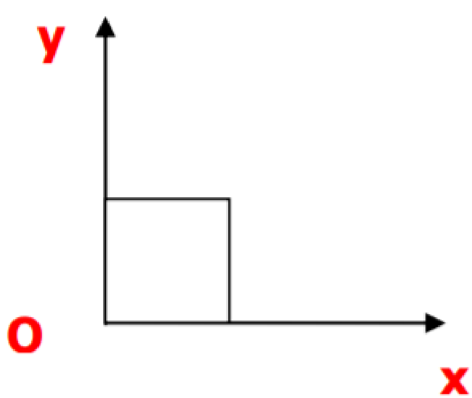
$$x' = y$$
$$y' = x$$



$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \bullet \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

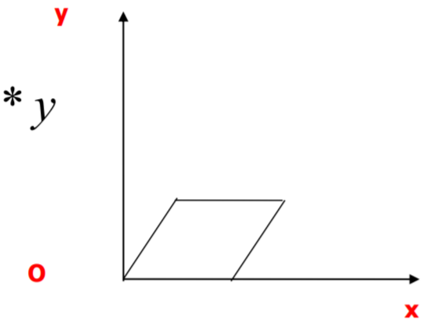
Растяжение (форфексия)

Форфексия или растяжение является преобразованием, которое производит искажение объекта. Например растянув квадрат получим параллелограмм.



Растяжение относительно оси ОХ:

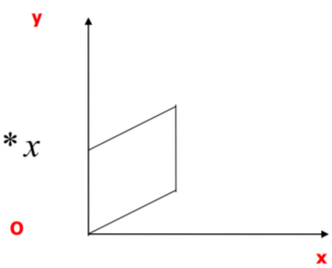
$$x' = x + F_x * y$$
$$y' = y$$



$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \bullet \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ Fx & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Растяжение относительно оси OY:

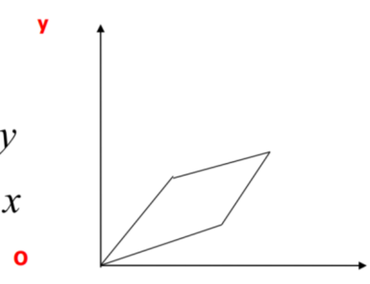
$$x' = x$$
$$y' = y + F_y * x$$



$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \bullet \begin{vmatrix} 1 & Fy & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Растяжение по осям OX и OY:

$$x' = x + F_x * y$$
$$y' = y + F_y * x$$



$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \bullet \begin{vmatrix} 1 & Fy & 0 \\ Fx & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Преобразования систем координат

Рассмотрим две системы координат на плоскости, одна с началом в точке O и осями x и y, и другая с началом в точке O’ и осями x' и y'. Каждой точке в плоскости P, соответствует два представления:

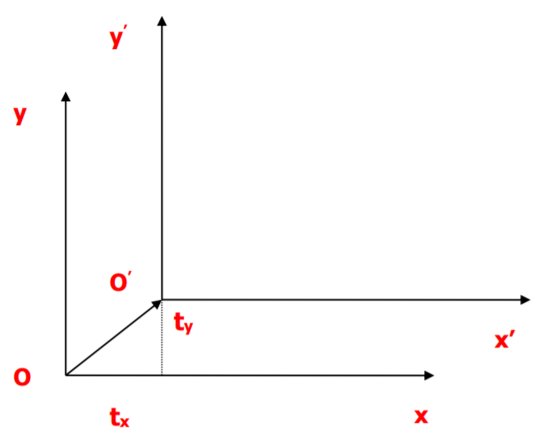
(x, y) – в системе xOy и

(x’, y’) – в системе x'Oy'.

Систему x'Oy' можно получить, преобразовав xOy; преобразование можно представить в виде выражений относительно точки P, (x, y) и (x’, y’).

Сдвиг

Если система x'Oy' получена сдвинув систему xOy, на расстояние и направление определённые вектором: $v = tx * I + ty * J$:

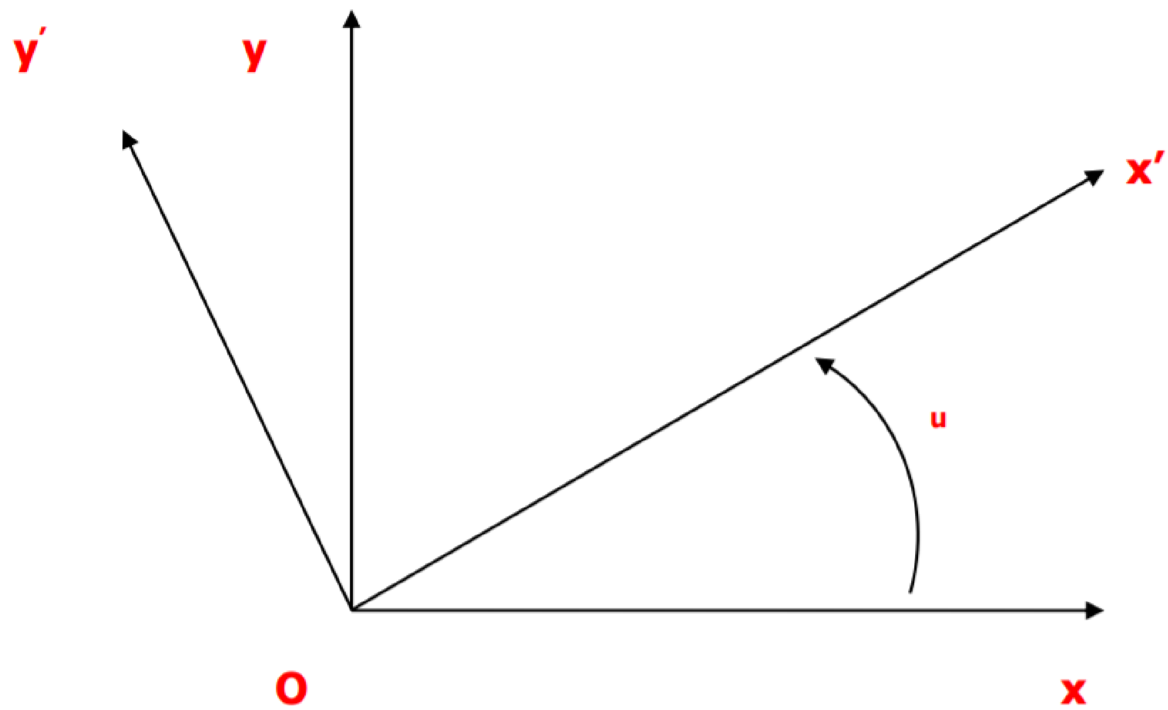


В этом случае соотношение между координатами точки P будет следующим:

$$x' = x - tx$$
$$y' = y - ty$$

Вращение по отношению к началу

Повернув систему xOy на угол u, получим x'Oy'



Точка P, которая в системе *x*O*y* имеет координаты:

$$x' = r * \cos(t)$$
$$y' = r * \sin(t)$$

в системе *x*’O*y*’ будет иметь следующие координаты:

$$x' = r * \cos(t - u) = r * (\cos(t)\cos(u) + \sin(t) * \sin(u)) = x * \cos(u) + y * \sin(u)$$
$$y' = r * \sin(t - u) = r * (\sin(t)\cos(u) + \cos(t) * \sin(u)) = x * \sin(u) + y * \cos(u)$$

Масштабирование относительно начала:

Предположим, мы формируем новую систему координат с тем же началом и ориентацией осей, но которая характеризуется другой единицей измерения вдоль оси x и y.

Если новые единицы измерения получены путем масштабирования старых единиц измерения с факторами sx, соответственно, sy, то соотношение между координатами (x, y) и (x ', y') точки P в обеих системах координат будет:

$$x' = x * 1/sx$$
$$y' = y * 1/sy$$

Зеркальное отражение относительно оси:

Если система координат x'O'y' была получена путем зеркального отражения системы xOy или, относительно оси Ox или оси Oy, то соотношение между координатами одной и той же точки в двух системах координат будет:

$\begin{matrix} x'=x \\ y'=-y \end{matrix}$ в случае отражения относительно оси Ox

$\begin{matrix} x'=-x \\ y'=y \end{matrix}$ в случае отражения относительно оси Oy

Это преобразование меняет ориентацию осей системы координировать.