LUCRAREA DE LABORATOR NR. 3

INTERPOLAREA FUNCŢIILOR CU AJUTORUL POLINOMULUI LAGRANGE

1. Scopul lucrării

Pentru funcţia $f:[a, b]\rightarrow R$ se cunosc valorile $y_0, y_1, y_2,\ldots,y_n$ în nodurile distincte $x_0, x_1, x_2,\ldots, x_n$, adică $y_i=f(x_i), i=0,1,2,\ldots,n.$

1) Să se construiască polinomul de interpolare Lagrange $L_n(x)$ ce aproximează funcţia dată.
2) Să se calculeze valoarea funcţiei $f(x)$ într-un punct $x=\alpha$ utilizând polinomul de interpolare Lagrange $L_n(x)$.
3) Să se aproximeze valoarea funcţiei $f(x)$ pentru $x=\alpha$ cu eroarea $\varepsilon= 10^{-4}$ (sau cu cea mai bună exactitate posibilă), calculînd polinomul de interpolare Lagrange $L_m(x)$, unde $m<n$.
4) Să se compare şi să se explice rezultatele obţinute în 2) şi 3).

1. Probleme date spre rezolvare

1. α = 0.106,

x	0.101	0.117	0.122	0.136	0.220	0.326	0.429
y	1.26483	2.27645	3.29147	4.28143	3.27648	2.26438	1.26438

2. α = 0.115,

x	0.150	0.163	0.187	0.262	0.364	0.466	0.469
y	6.61659	8.39468	9.27893	8.19345	6.23476	6.25132	6.31472

3. α = 0.185,

x	1.383	1.357	1.390	1.394	1.396	1.400	1.404
y	9.05421	8.76431	7.11326	6.87628	7.36734	8.10234	9.21361

4. α = 30.703,

x	0.702	0.704	0.707	0.709	0.712	0.716	0.719
y	5.61345	6.90012	7.23468	8.14153	7.13476	6.23897	5.37213

5. α = 1,417,

x	1.415	1.418	1.420	1.424	1.430	1.434	1.437
y	3.76831	2.17946	1.37197	0.43672	-0.9763	-1.6798	-2.3712

6. α = 1,418,

x	1.415	1.418	1.420	1.424	1.430	1.434	1.437
y	3.76831	2.17946	1.37197	0.43672	-0.9763	-1.6798	-2.3712

7. α =0,204,

x	0.104	0.205	0.310	0.401	0.507	0.618	0.721
y	4.96713	6.811347	8.76712	10.16147	9.12347	7.26493	5.37149

8. α =0,2009,

x	1.833	2.045	3.164	4.461	5.705	6.816	7.127
y	3.45678	5.34671	8.01235	7.70981	4.32678	2.45670	0.32145

9. α =0,997,

x	2.056	3.321	4.453	5.671	6.054	7.987	8.785
y	-9.3456	-8.4560	-7.6781	-5.1257	-6.5762	-8.4398	-9.9876

10. α =-0,532,

x	-1.432	-0.675	1.439	2.567	3.486	4.910	5.763
y	7.67103	5.45321	3.76129	0.56741	-1.5630	0.76884	2.56793

11. α =9,096,

x	8.765	9.658	10.008	11.876	12.967	13.098	14.598
y	1.36754	9.21765	7.87692	9.56423	10.45371	11.90785	8.78911

12. α =-1,997,

x	-2.341	-1.675	-0.876	0.875	1.997	2.876	3.642
y	12.76541	10.13267	7.12698	8.5693	9.67549	11.34987	13.34986

13. α =0,203,

x	0.125	0.243	0.367	0.498	0.597	0.701	0.867
y	-1.4532	-0.5987	0.65498	1.23468	0.56793	-0.1236	-1.4598

14. α =-0,999,

x	-1.104	-0.986	0.465	1.235	2.476	3.789	4.987
y	4.13567	2.29876	0.01238	-2.4587	-1.1154	0.56478	2.17854

15. α =6,208,

x	5.477	6.457	7.908	8.765	9.790	10.456	11.367
y	-4.2457	-2.1289	-0.0987	-1.5674	-2.0567	-3.1087	-4.9874

16. α =2,076,

x	1.123	2.456	3.654	4.987	5.897	7.432	8.876
y	13.45673	11.78654	8.67543	7.89765	5.76901	5.76901	8.14329

17. α =-7,032,

x	-7.675	-6.976	-4.678	-2.567	-0.143	1.987	3.654
y	3.45612	4.98457	5.14388	3.93012	1.78901	-1.2349	-2.9806

18. α =0,265

x	0.176	0.349	0.598	0.768	0.956	1.987	3.432
y	3.45612	4.98457	5.14388	3.93012	1.78901	-1.2349	-2.9806

19. α =5,068,

x	4.253	5.786	6.876	8.011	9.543	10.564	11.987
y	-2.1786	-1.0067	0.7684	1.98762	3.77664	0.45673	-1.4589

20. α =0,465,

x	-0.123	0.765	2.654	4.987	6.087	8.123	10.328
y	9.23657	7.87654	5.14568	6.98341	8.96542	10.45071	12.65432

21. α =5,143,

x	4.675	5.987	7.453	8.769	9.801	11.762	13.097
y	-2.4567	-8.8776	-4.0765	0.00543	-3.6579	-5.1287	-7.0108

22. α =-5,026,

x	-5.354	-4.218	-3.497	-2.198	-1.765	0.876	1.675
y	9.14352	6.87601	3.76501	0.76591	2.67981	4.90912	6.45671

23. α =1,276,

x	0.765	1.867	3.987	5.601	7.043	9.231	10.987
y	2.87611	4.18432	1.09673	-1.4587	-3.5729	0.9876	2.87644

24. α =3,132,

x	2.675	3.879	4.567	5.967	7.176	8.654	9.765
y	1.90876	0.00165	-1.6754	-3.4657	1.76542	3.98021	5.76599

25. α =0,321,

x	0.187	0.276	0.401	0.575	0.687	0.811	0.989
y	1.54381	-2.3219	-4.0165	-1.0765	1.43257	3.89762	5.98451

2. *Descrierea problemei de interpolare*

Fie dată funcţia $y=f(x)$ dată sub forma unei tabele de valori:

x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

unde $y_i=f(x_i)$, $i=0,1,\dots,n$

Există numeroase procedee de interpolare pentru găsirea unor valori intermediare ale lui $f(x)$ pentru $x\neq x_i$, $i=0,1,\dots,n$ De foarte multe ori pentru aproximarea funcţiilor prin interpolare se utilizează polinoamele algebrice

$$P_n(x)= \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x+\alpha_0.$$

Aceasta se datorează faptului că funcţia $f(x)$ poate fi aproximată foarte bine cu ajutorul curbelor a căror reprezentare analitică sunt polinoame (teorema lui Weierstrass). Pe de altă parte, valoarea polinomului se calculează uşor (cu ajutorul schemei lui Horner) nu apar dificultăţi şi la integrarea sau derivarea polinoamelor. Pentru ca un polinom $P_n(x)$ de grad $\leq n$ să interpoleze funcţia dată, trebuie ca valorile sale în nodurile $x_0, x_1, x_2,\dots, x_n$ să coincidă cu valorile funcţiei, adică:

$$P_n(x)=y_i, \quad i=0,1,\dots,n \tag{1}$$

Se demonstrează că condiţiile de interpolare (1) determină un polinom unic, care se poate exprima sub forma

$$L_n = \sum_{i=0}^{n}\left(y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)$$

Polinomul $L_n(x)$ se numeşte polinomul de interpolare al lui Lagrange.

Exemplu. Să se calculeze polinomul de interpolare a lui Lagrange ce aproximează funcţia definită cu ajutorul următorului tabel de valori:

x	-1	0	2
y	-8	-1	1

Putem construi polinomul de gradul doi şi anume:

$$L_2 = -8\frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} + (-1)\frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} + 1\frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} = -2x^2+5x-1.$$

Polinomul de interpolare a lui Lagrange coincide cu funcţia $f(x)$ în nodurile de interpolare. Pentru celelalte puncte cantitatea

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)$$

reprezintă eroarea care se comite în calculul lui $f(x)$ prin formula $f(x)\approx L_n(x)$. Dacă funcţia $f(x)$ este continuă împreună cu primele $n+1$ derivate, atunci:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),$$

unde $\omega_{n+1}(x)= (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$, iar ξ este un punct din intervalul $[x_0, x_1]$. Cu ajutorul formulei (2) se obţine egalitatea aproximativă

$$R_m(x) \approx L_{m+1}(x)-L_m(x)$$

Ultima relaţie poate fi utilizată la calculul funcţiei $f(x)$ într-un punct dat $x\neq x_i$ cu exactitatea dorită $\varepsilon>0$. Pentru aceasta se calculează succesiv polinoamele $L_1(x),L_2(x),\ldots,L_m(x)$, folosind schema lui Aitken; de asemenea se determină şi mărimile

$$\varepsilon_1 = \left|L_2(x) - L_1(x)\right|,\ \ \varepsilon_2 = \left|L_3(x) - L_2(x)\right|,\ldots,\varepsilon_m = \left|L_{m+1}(x) - L_m(x)\right|,\ldots$$

Dacă pentru un indice m, $m<n$ are loc inegalitatea $\varepsilon_m<\varepsilon$, atunci STOP; avem calculată valoarea funcţiei $f(x)$ (egală cu $L_m(x)$) cu eroarea dată. În caz contrar ($\varepsilon_m\geq\varepsilon$, $\forall m$) se determină cel mai mic m pentru care

$$\varepsilon_m = \min_{1\leq i\leq n-1}\{\varepsilon_i\}$$

şi se consideră $f(x)\approx L_m(x)$.

Un procedeu efectiv de calcul a valorii unui polinom îl constituie schema lui Horner. Pentru stabilirea schemei lui Horner se transcrie polinomul $P_m(x)$ astfel:

$$P_n(x) = a_0+x(a_1+x(a_2+\ldots+x(a_{n-1}+xa_n)\ldots))$$

Deci putem afla valoarea acestui polinom în punctul x, calculând succesiv mărimile

$$B_n=a_n$$
$$B_{n-1}=a_{n-1}+xb_n=a_{n-1}+xa_n$$
$$B_{n-2}=a_{n-2}+xb_{n-1}=a_{n-2}+x(a_{n-1}+xa_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B=a_0+xb_1=a+x(a_1+a_2+x(a_{n-1}+xa_n)\ldots)=P_n(x).$$

Această schemă necesită cel mult $2n$ operaţii aritmetice .