Grafica pe calculator

Transformări 3D

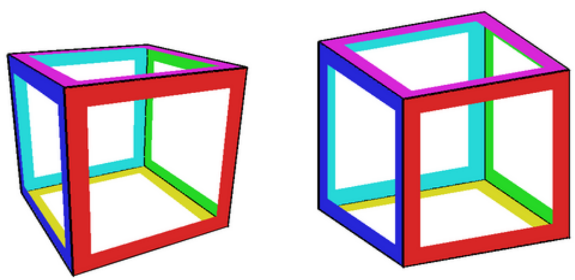
Victor Moraru
victor.moraru@calc.utm.md

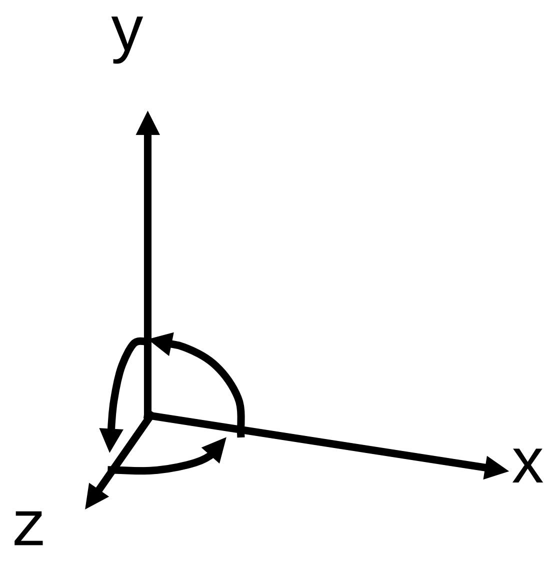
Transformări 3D

Vom utiliza coordonate omogene ca și in cazul 2D

Transformările vor fi prezentate prin matrice 4x4

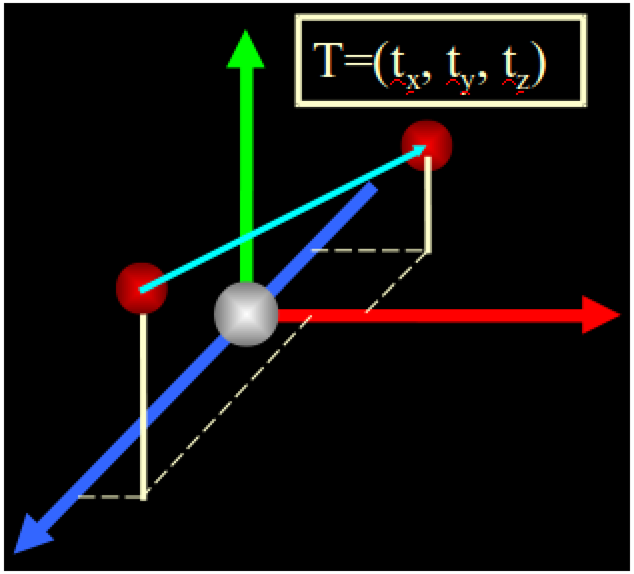
Vom utiliza sistemul de coordonate de dreapta (right-handed)





Translația 3D

După analogie cu 2D:

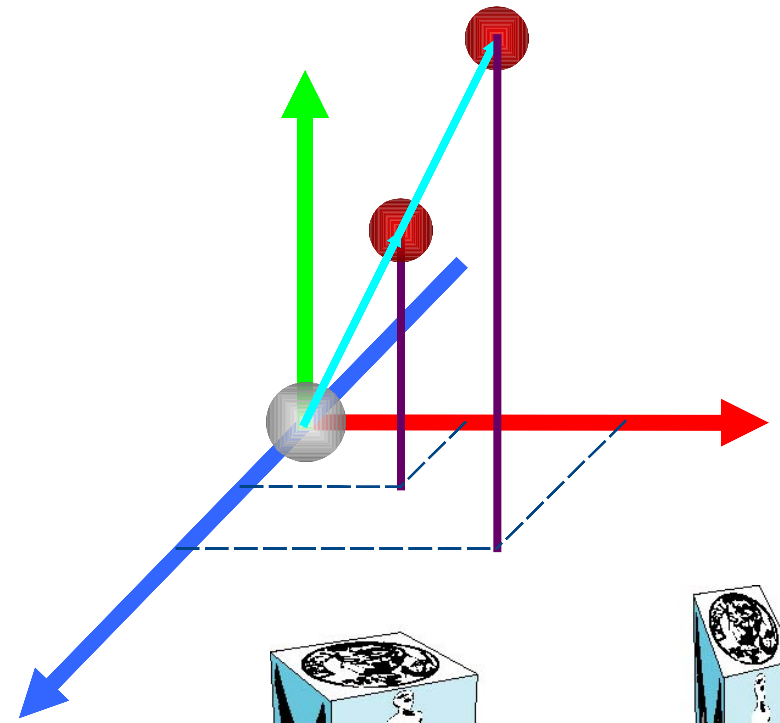


$$T(t_x, t_y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

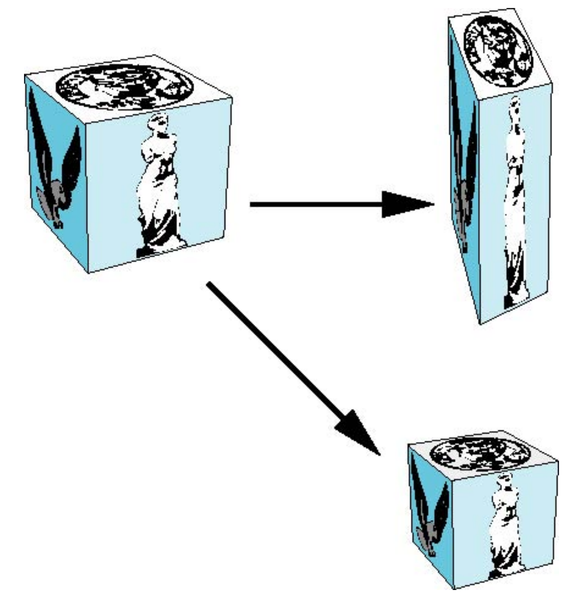
$S=(s_x, s_y, s_z)$

Scalarea 3D



După analogie cu 2D obținem scalarea locala :

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



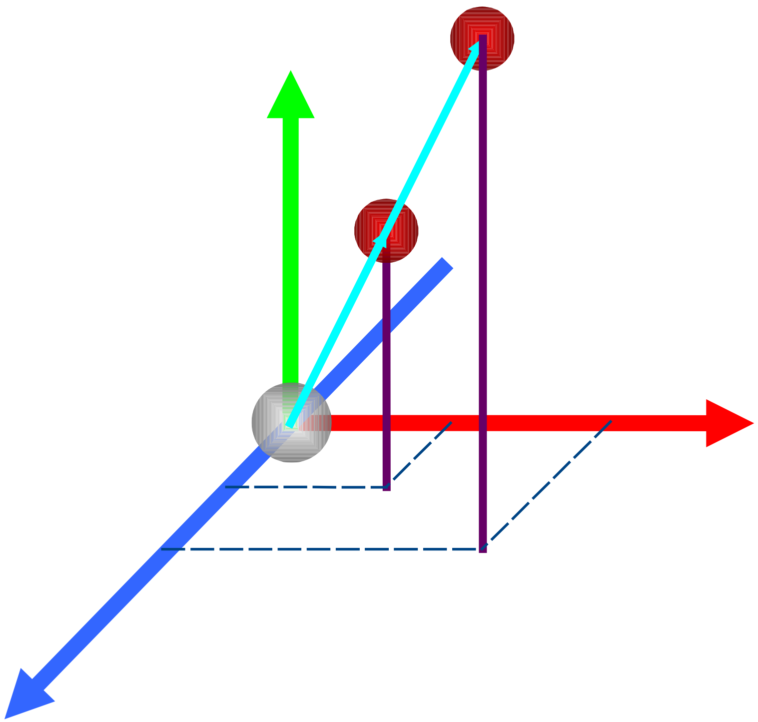
$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Scalarea 3D

$S=(s_x, s_y, s_z)$

Scalare globala:

$$[Sg]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$



Rotația 3D

Va trebui sa specificam axa de rotație

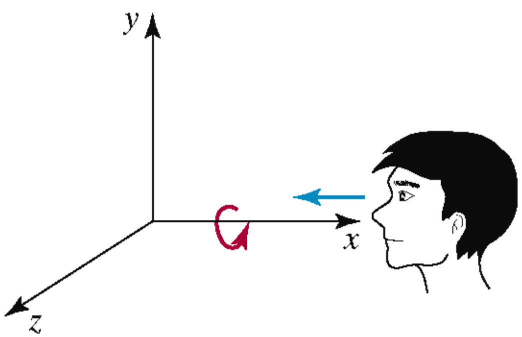
Pentru început vom analiza cele mai simple cazuri când axa de rotație coincide cu una dintre axe.

Pentru rotația în jurul axei z matricea e la fel ca și pentru cazul 2D:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotația 3D

Rotația în jurul axei X: $R_x(\theta)$

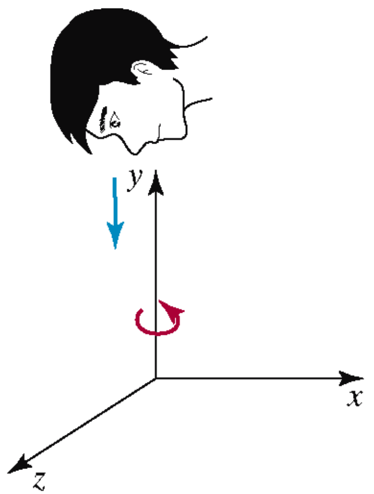


$$x' = x$$
$$y' = y \cdot \cos\theta - z \cdot \sin\theta$$
$$z' = y \cdot \sin\theta + z \cdot \cos\theta$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotația 3D

Rotația în jurul axei y: $R_y(\theta)$



$$x' = z\cdot\sin\theta + x\cdot\cos\theta$$

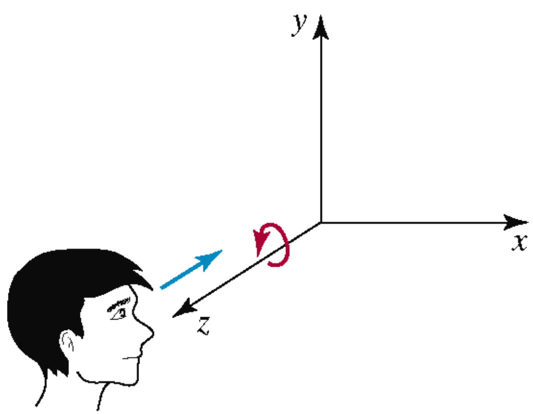
$$y' = y$$

$$z' = z\cdot\cos\theta - x\cdot\sin\theta$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotația 3D

Rotația în jurul axei z: $R_z(\theta)$



$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta$$
$$y' = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta$$
$$z' = z$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotația 3D: rezumat

$$R(1,0,0,\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R(0,1,0,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R(0,0,1,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Matricea generalizata

- Matricea de transformare generalizată 4x4 pentru coordonate omogene 3D are următoarea formă:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$$

Matricea generalizata

- Structura:

$$\begin{bmatrix} & & & \vdots & 3 \\ & 3\times 3 & & \vdots & \times \\ & & & \vdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ & 1\times 3 & & \vdots & 1\times 1 \end{bmatrix}$$

Matricea generalizata

Structura pentru cazul notației prin vector-coloana:

- matricea 3x3 include transformări de scalare locală, forfecare, oglindire şi rotație
- matricea 3x1 reprezintă transformarea de translație
- matricea 1x3 reprezintă transformarea de proiectare perspectivă
- matricea 1x1 reprezintă transformarea de scalare generală

Transformări inverse

Transformare	Matrce inversa
Scalare	$\begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Rotatie	$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_{yz}^{-1}(\psi)}, \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_{zx}^{-1}(\theta)}, \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_{xy}^{-1}(\phi)}$
Translatie	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Toate matricele de transformare au matrice inverse

Transformări inverse

Proprietăți:

$$[T(t_x,t_y,t_z)]^{-1} = [T(-t_x,-t_y,-t_z)]$$

$$[S(s_x,s_y,s_z)]^{-1} = [S(1/s_x,1/s_y,1/s_z)]$$

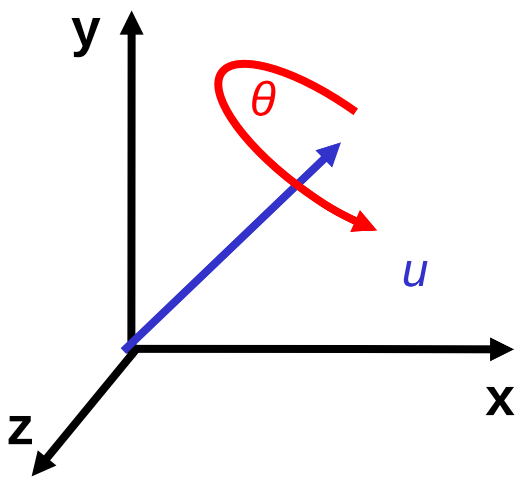
$$[R_x(\alpha)]^{-1} = [R_x(-\alpha)]$$

$$[R_y(\beta)]^{-1} = [R_y(-\beta)]$$

$$[R_z(\theta)]^{-1} = [R_z(-\theta)]$$

Rotația 3D

Rotatie(k, θ)



Rotație in jurul unei axe arbitrare: calculul direct al matricii de transformare

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x u_x(1-c)+c & u_z u_x(1-c)-u_z s & u_x u_z(1-c)+u_y s & 0 \\ u_y u_x(1-c)+u_z s & u_z u_x(1-c)+c & u_y u_z(1-c)-u_x s & 0 \\ u_z u_x(1-c)-u_y s & u_y u_z(1-c)+u_x s & u_z u_z(1-c)+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

unde $c = \cos\theta$ & $s = \sin\theta$

Rotația 3D

Rotația nu e o operație comutativă dacă axele de rotație nu sunt paralele

$$R_x(\alpha)\, R_y(\beta) \neq R_y(\beta)\, R_x(\alpha)$$

Compunerea transformărilor

- Matricea corespunzătoare transformării compuse se obține prin înmulțirea matricelor transformărilor elementare
- Deoarece înmulțirea matricelor nu este comutativă, este importantă ordinea în care se aplică aceste transformări
- Matricea de transformare cea mai apropiată vectorului linie (sau a vectorului colana) corespunde primei transformări care se aplică în timp ce matricea de transformare cea mai depărtată este ultima dintre cele aplicate

Compunerea transformărilor

Matematic aceasta se exprimă prin:

[M] [VC] = [Mn] …… [M3] [M2] [M1].... [VC]

pentru vector coloana

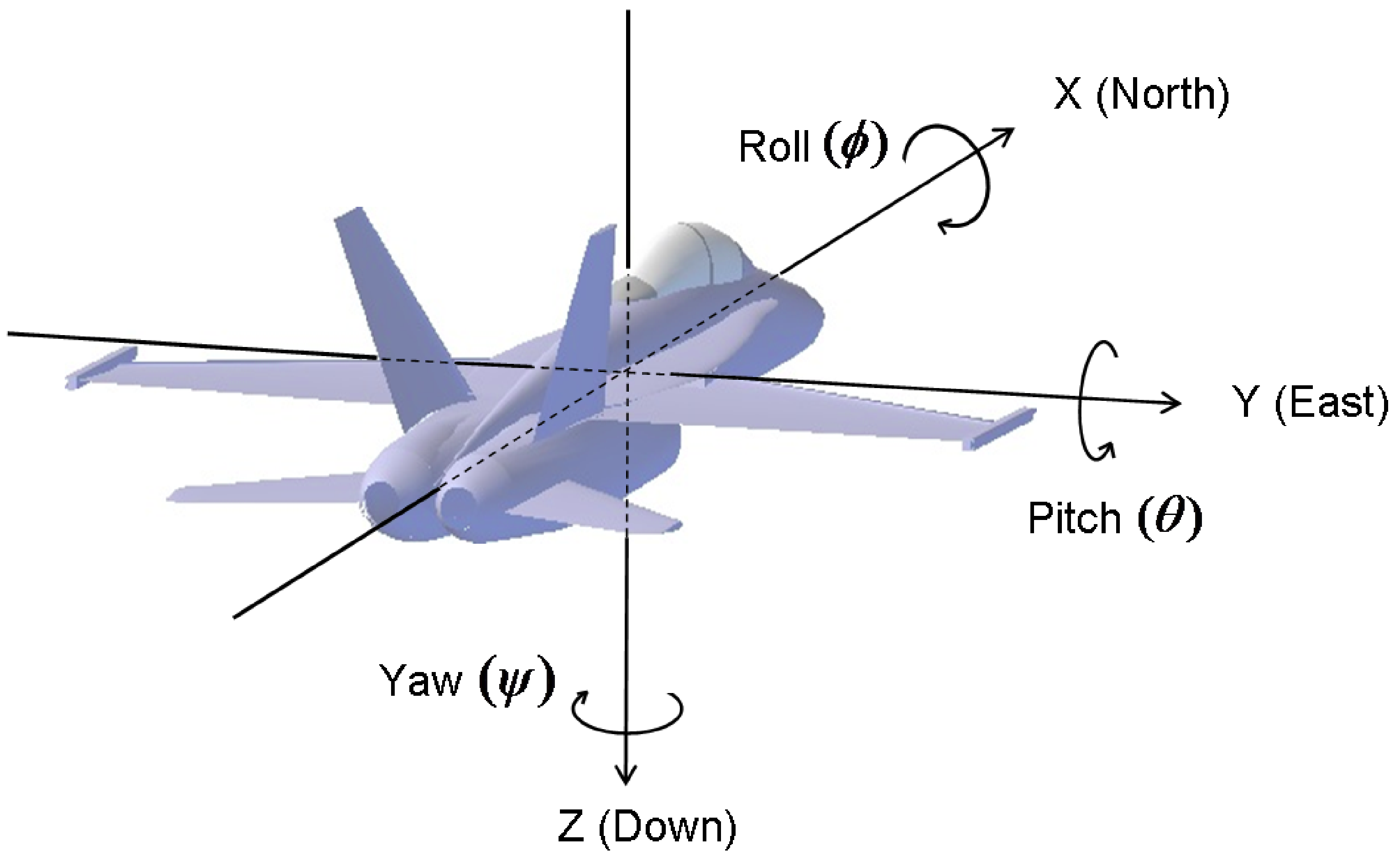
sau

[VL] [M] =[VL] $[M1]^T$ $[M2]^T$ $[M3]^T$....$[Mn]^T$

pentru vector linie

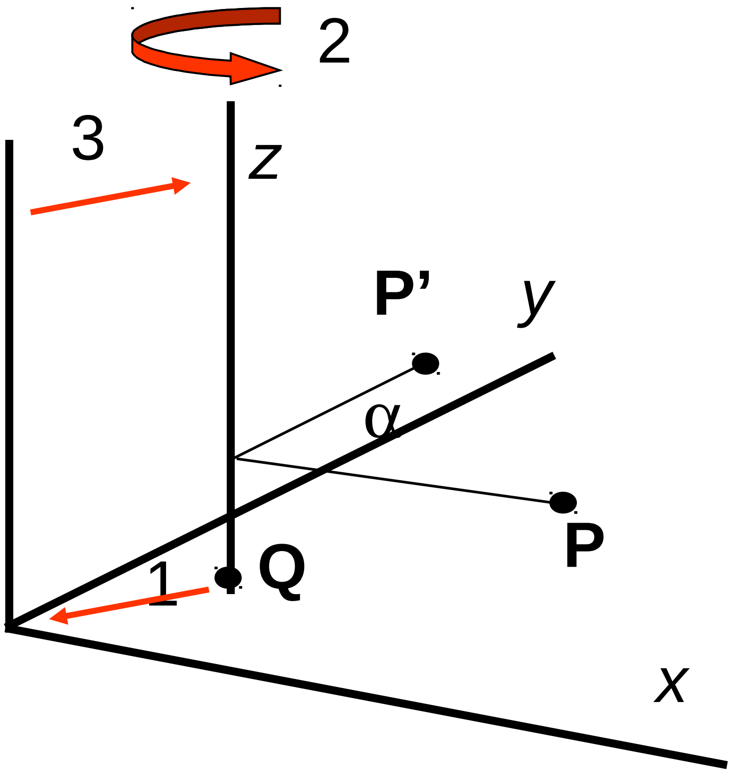
unde [Mi] poate îi orice matrice de transformare

Rotația 3D



Rotația 3D

Rotația in jurul unei axe paralele cu o axa a sistemului de coordonate:



Rotația 3D

Rotația in jurul unei axe paralele cu o axa a sistemului de coordonate:

1. Translația obiectului astfel încât axa de rotație sa se suprapună peste o axa a sistemului de coordonate.

2. Rotația obiectului in jurul axei sistemului de coordonate cu unghiul *u*.

3. Translația inversa celei din pasul 1.

M = T(tx, ty, tz) * R(u) * T(-tx, - ty, - tz)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotația 3D în jurul unei axe arbitrare

O axă oarecare de rotație (d) se specifică printr-un punct A(x_0 ,y_0 ,z_0) şi printr-un vector direcție C = cx * i + cy * j + c z * k, unde cx , cy , cz sunt cosinusii directori.

1.Translaţie care face ca dreapta sa treacă prin origine: T(-xd, -yd, -zd)

2. Alinierea dreptei cu una dintre axele principale, de ex. cu axa OZ:

   2.1. Rotație în jurul axei OX, cu un unghi ux, prin care dreapta ajunge în planul XOZ: Rox(ux)

   2.2. Rotație in jurul axei OY, cu un unghi uy, prin care dreapta se suprapune pe axa OZ: Roy(uy)

Rotația 3D în jurul unei axe arbitrare

3. Rotația cu unghiul dat u in jurul axei pe care s-a aliniat dreapta: rotație in jurul axei OZ : Roz(u)

4. Transformarea inversă celei din pasul 2:

   4.1. Rotație in jurul axei OY, cu unghiul –uy: Roy(-uy)

   4.2. Rotatie in jurul axei OX, cu unghiul –ux: Rox(-ux)

5. Transformarea inversa celei de la pasul 1: T(xd, yd, zd)

Rotația axă cu axă...

E complicat sa calculezi trei unghiuri de rotație in raport cu o axa arbitrara ***u*** si cu un unghi specificat $\boldsymbol{\psi}$

Soluția ar fi sa orientam axa ***u*** cu una dintre axele principale

Pasul 1: Găsim *θ rotind in jurul axei y pana când axa u se poziționează in planul xy*

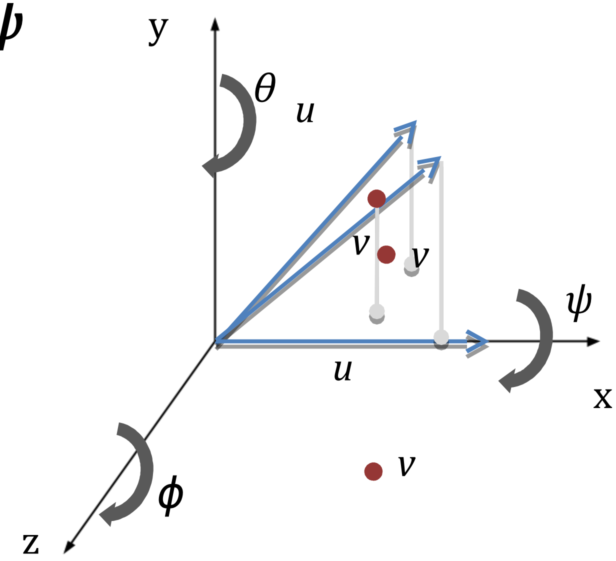
Pasul 2: Găsim $\boldsymbol{\phi}$ rotind in jurul axei *z* pana aliniem *u* cu axa *x*

Acum **u** *are o aliniere convenabila si putem efectua rotirea pentru vârful* v*:*

Pasul 3: Rotim *v cu ψ in jurul axei x* (ea coincide cu axa u)

Pasul 4: La sfârșit realizam transformările inverse.

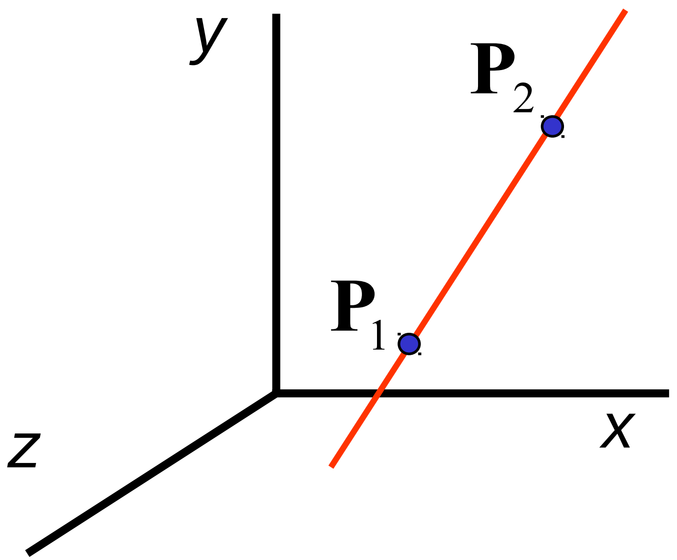
Unica rotație pe care o prezervăm e cea in jurul axei u *cu* ψ*, care a și fost scopul nostru*



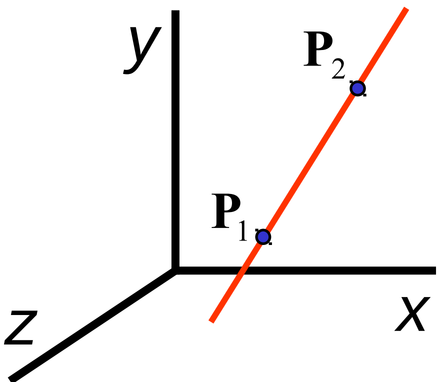
Matricea de rotire: $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}_{zx}^{-1}(\theta)\boldsymbol{R}_{xy}^{-1}(\phi)\boldsymbol{R}_{yz}(\psi)\boldsymbol{R}_{xy}(\phi)\boldsymbol{R}_{zx}(\theta)$

Rotația axă cu axă... Exemplu

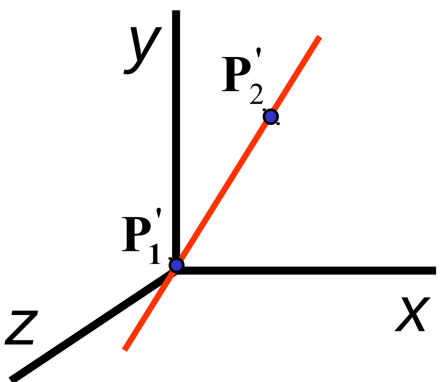
Axa de rotație trece prin punctele $\mathbf{P}_1$ si $\mathbf{P}_2$.



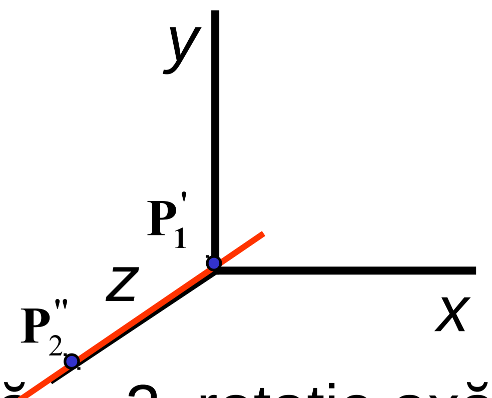
Rotația axă cu axă... Exemplu



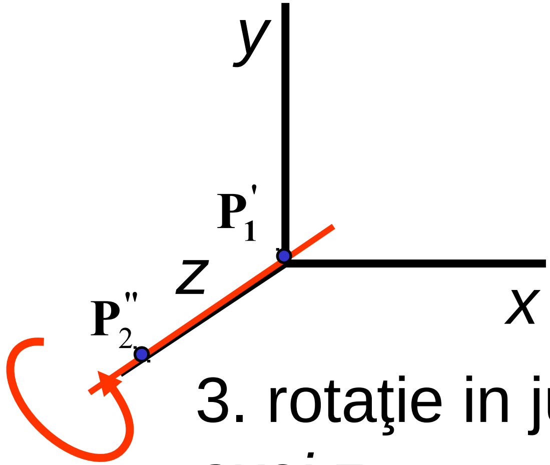
Iniţial



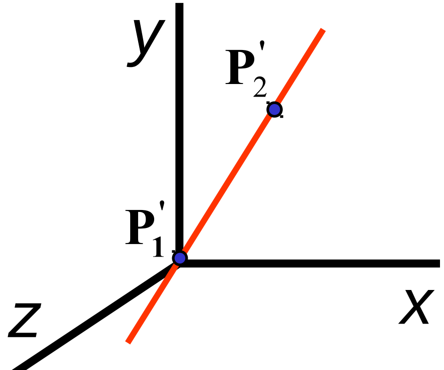
1. translatie axă



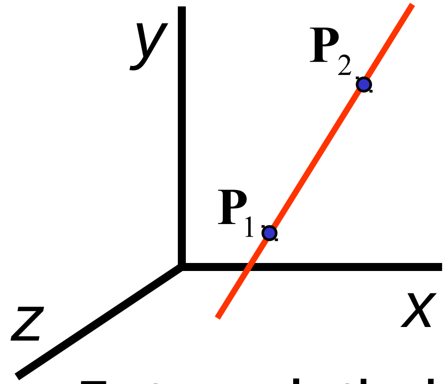
2. rotaţie axă



3. rotaţie in jurul *axei z*

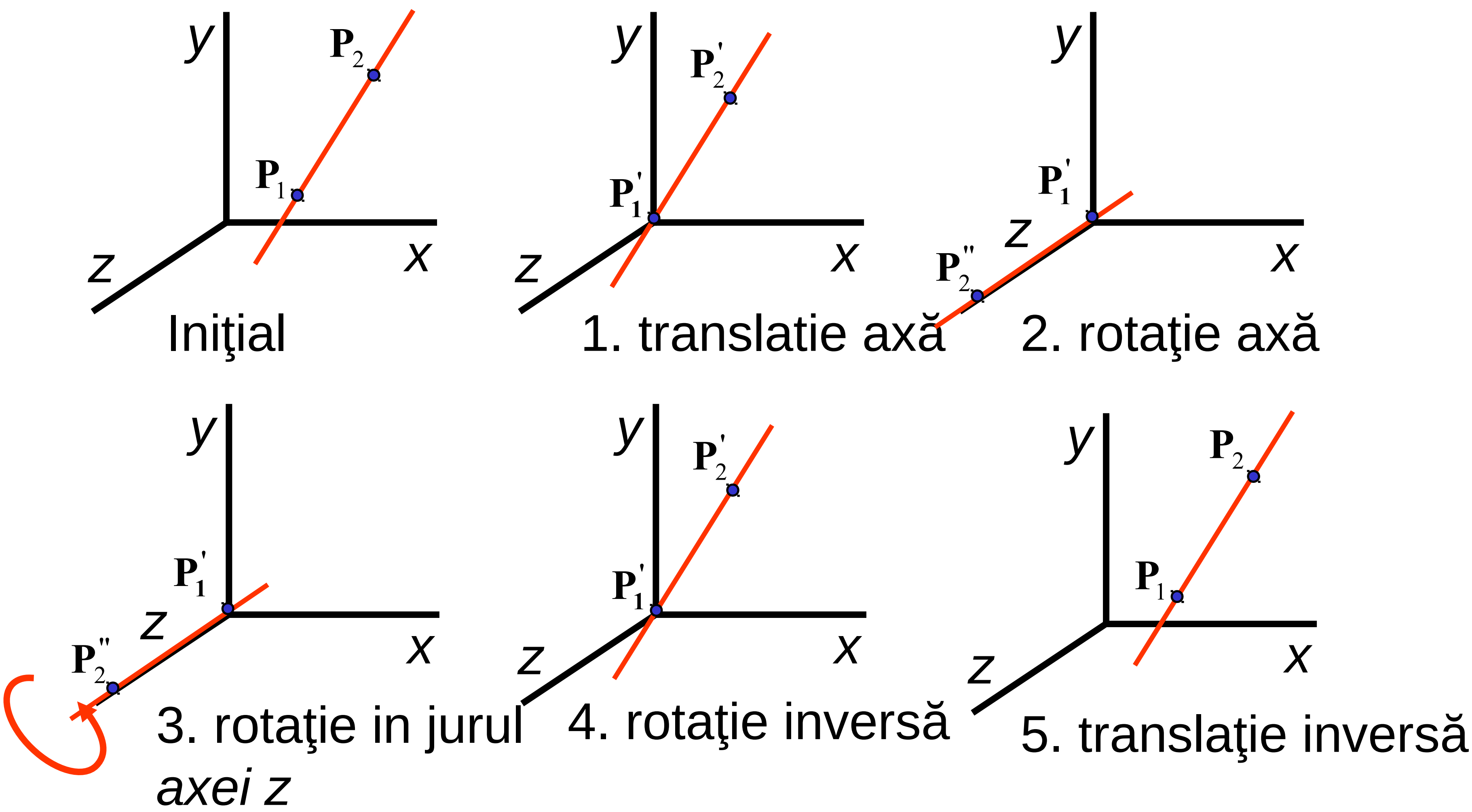


4. rotaţie inversă



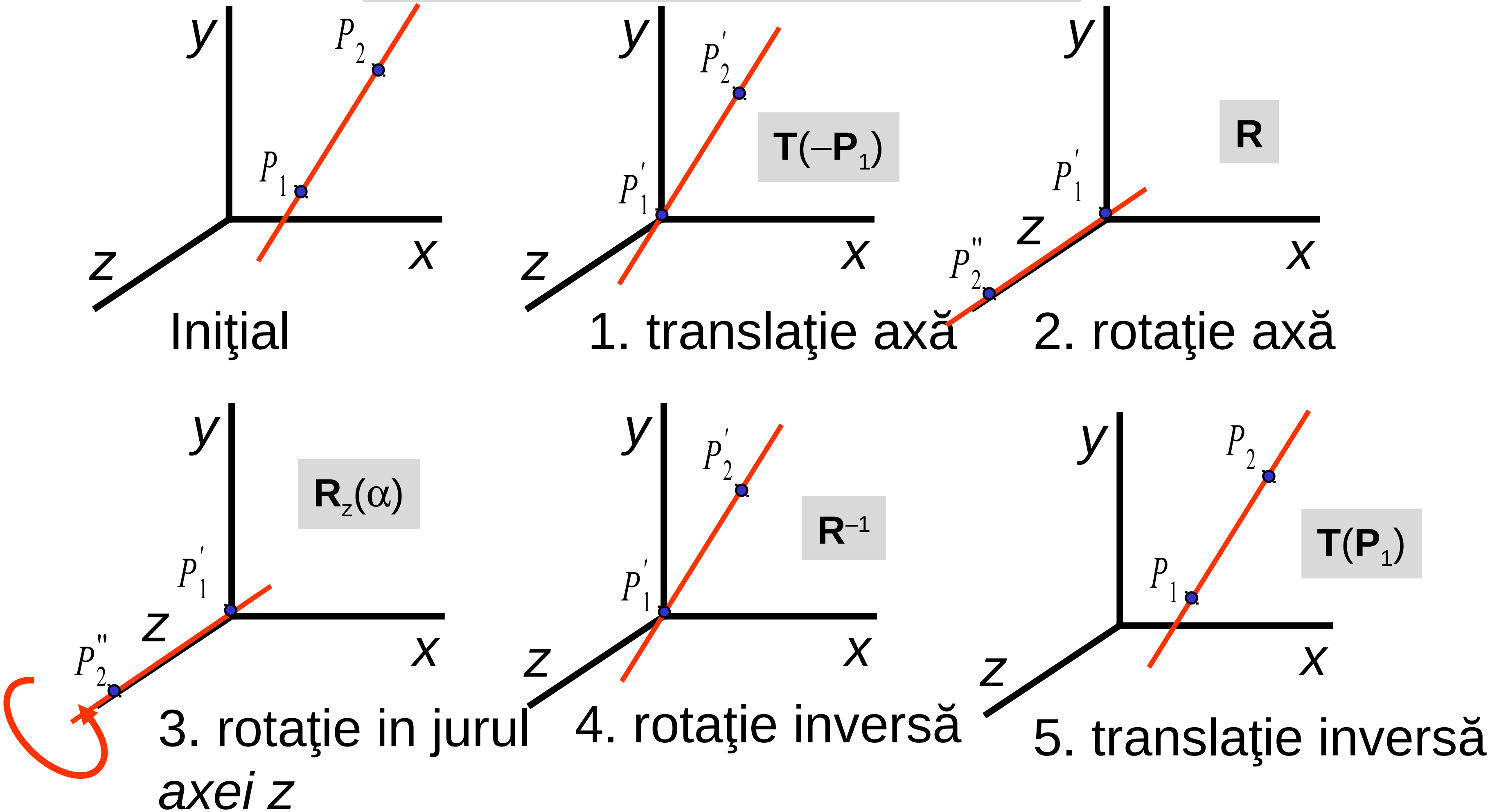
5. translaţie inversă

Rotația axă cu axă... Exemplu

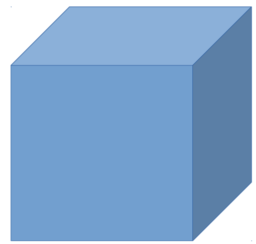


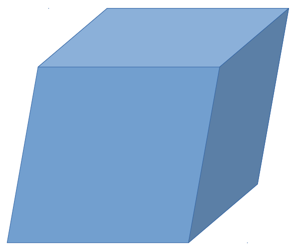
Rotația axă cu axă... Exemplu

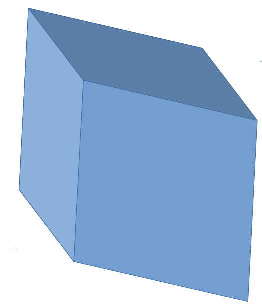
$$\mathbf{M = T(P_1)\, R^{-1} R_z(\alpha)\, R\, T(-P_1)}$$



Forfecarea







$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forfecarea

Ecuații generale pentru forfecare

$$x' = x + y*d + z*g$$
$$y' = x*b + y + z*i$$
$$z' = x*c + y*f + z$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & d & g & 0 \\ b & 1 & i & 0 \\ c & f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = [F] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oglindirea

Oglindirea faţă de planul xy : in acest caz se inversează doar coordonata z, coordonatele x şi y rămânând neschimbate

$$[O_{xy}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oglindirea

Oglindirea faţă de planul yz

$$[O_{yz}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

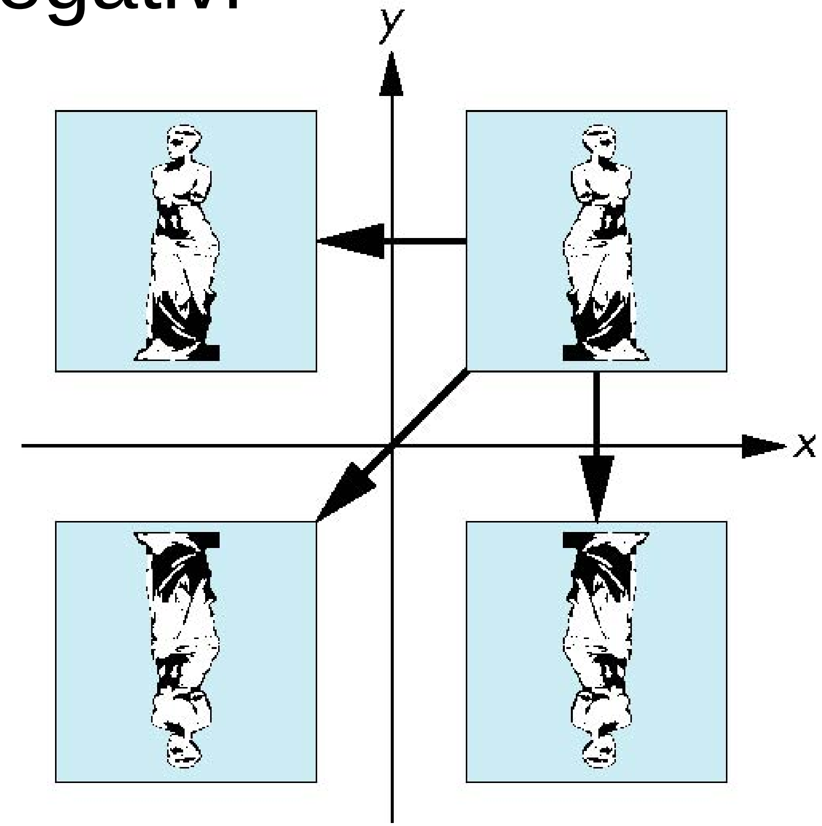
Oglindirea

Oglindirea faţă de planul xz

$$[O_{xz}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oglindirea: rezumat

- Oglindirea corespunde factorilor de scalare negativi



$s_x = -1$ $s_y = 1$

original

$s_x = -1$ $s_y = -1$

$s_x = 1$ $s_y = -1$

Oglindirea faţă de un plan oarecare

Considerăm planul de oglindire specificat printr-un punct $P(x_0 ,y_0 ,z_0)$ şi vectorul normală la plan, N.

O procedura de obținere a transformării de oglindire faţă de planul dat este următoarea:

1.Translaţie astfel încât punctul $P(x_0 ,y_0 ,z_0)$ din plan să ajungă în originea sistemului de coordonate.

2. Alinierea vectorului normală la plan, N, la axa z pozitivă. Planul de oglindire devine astfel planul z=0.

3. Oglindirea faţă de planul z=0.

4. Transformarea inversă alinierii de la pasul 2.

5. Translația inversă celei de la pasul 1.

Transformări afine

Toate transformările despre care s-a vorbit pana acum poartă un nume generic de transformări afine

$$x' = a_{xx}x + a_{xy}y + a_{xz}z + b_x$$

$$y' = a_{yx}x + a_{yy}y + a_{yz}z + b_y$$

$$z' = a_{zx}x + a_{zy}y + a_{zz}z + b_z$$

Transformări afine

Proprietati:

1. Coordonatele transformate *x',y' si z' depind linear de coordonatele originale x, y si z.*
2. Parametrii a_{ij} si b_k sunt constante care determina tipul transformării (translație, rotație, scalare, oglindire)
3. Liniile paralele rămân paralele
4. Pentru translație, rotație și oglindire: unghiurile și lungimile sunt conservate

Exemplu de transformări compuse 3D

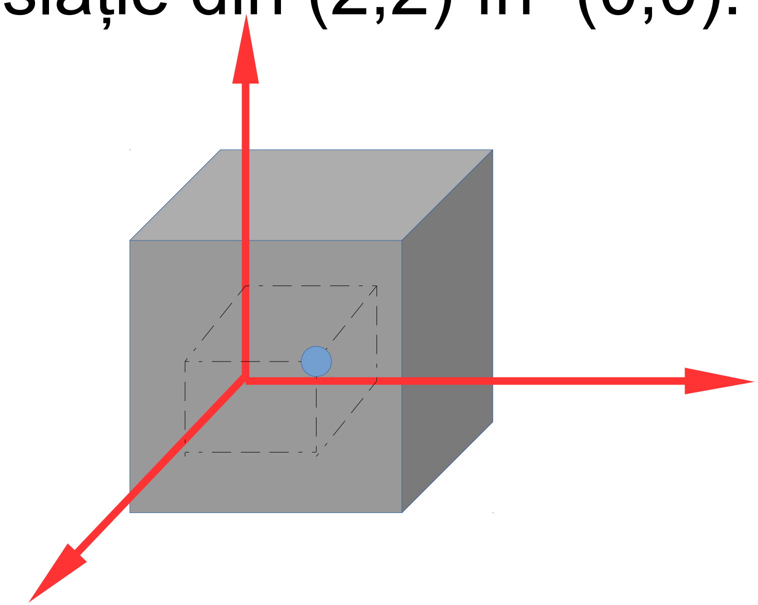
Fie un cub centrat la (2,2,2)

Rotim obiectul in spațiul său cu 30^{o} în jurul axei x , cu 60^{o} în jurul axei y și cu 90^{o} în jurul axei z

Scalăm în spațiul obiect cu 1 în x, 2 în y, 3 în z

Translație cu (2,2,4) în spațiul scenei (world space)

Secvența de transformare : $\boldsymbol{M = TT_0^{-1}S_{xy}R_{xy}R_{zx}R_{yz}T_o}$, unde $\boldsymbol{T_0}$ e o translație din (2,2) în (0,0):



Exemplu transformări compuse 3D!

Fie un cub centrat la (2,2,2)

Rotim obiectul in spațiul sau cu 30o in jurul axei *x* , cu 60o in jurul axei *y* și cu 90o in jurul axei *z*

Scalam in spațiul obiect cu 1 in *x*, 2 in *y*, 3 in *z*

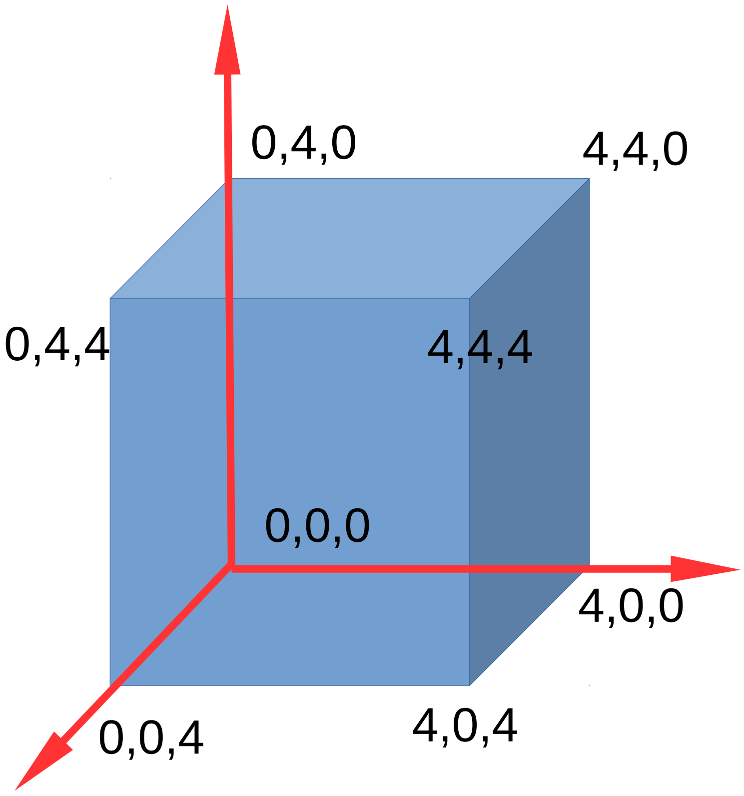
Translație cu (2,2,4) in spațiul scenei (world space)

Secventa de transformare : $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{T T_0^{-1} S_{xy} R_{xy} R_{zx} R_{yz} T_o}$, unde $\boldsymbol{T_0}$ e o translație din (2,2) în (0,0):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_0^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S_{xy}}\underbrace{\begin{bmatrix} \cos 90 & \sin 90 & 0 & 0 \\ -\sin 90 & \cos 90 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_{xy}}\underbrace{\begin{bmatrix} \cos 60 & 0 & -\sin 60 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin 60 & 0 & \cos 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_{zx}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30 & \sin 30 & 0 \\ 0 & -\sin 30 & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_{yz}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_0}$$

Exemplu

Un cub este definit prin vârfurile sale



$$V = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplu calcul

Scalarea cu $s_x=2$, $s_y=3$, $s_z=1$, apoi translație $t_x=2$, $t_y=2$, $t_z=2$

$$V=\begin{matrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$S=\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$V'=S*V=\begin{matrix} 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 12 & 12 & 0 & 0 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$T=\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$V''=T*V'=TSV=\begin{matrix} 2 & 10 & 2 & 10 & 2 & 10 & 2 & 10 \\ 2 & 2 & 14 & 14 & 2 & 2 & 14 & 14 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Exemplu calcul

Scalarea cu $s_x=2$, $s_y=3$, $s_z=1$, apoi translație $t_x=2$, $t_y=2$, $t_z=2$, prin compoziția transformării

$$V=\begin{matrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$M=TS=\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad T=\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad S=\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$V'=MV=TSV=\begin{matrix} 2 & 10 & 2 & 10 & 2 & 10 & 2 & 10 \\ 2 & 2 & 14 & 14 & 2 & 2 & 14 & 14 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Intrebări ?