# Grafica pe calculator

# Transformări elementare 2D

Victor Moraru
victor.moraru@calc.utm.md

# Transformări grafice

Transformările grafice permit reprezentarea desenelor la scara dorită, efectuarea operațiilor de detaliere și de micșorare asupra imaginilor, realizarea animației, etc.

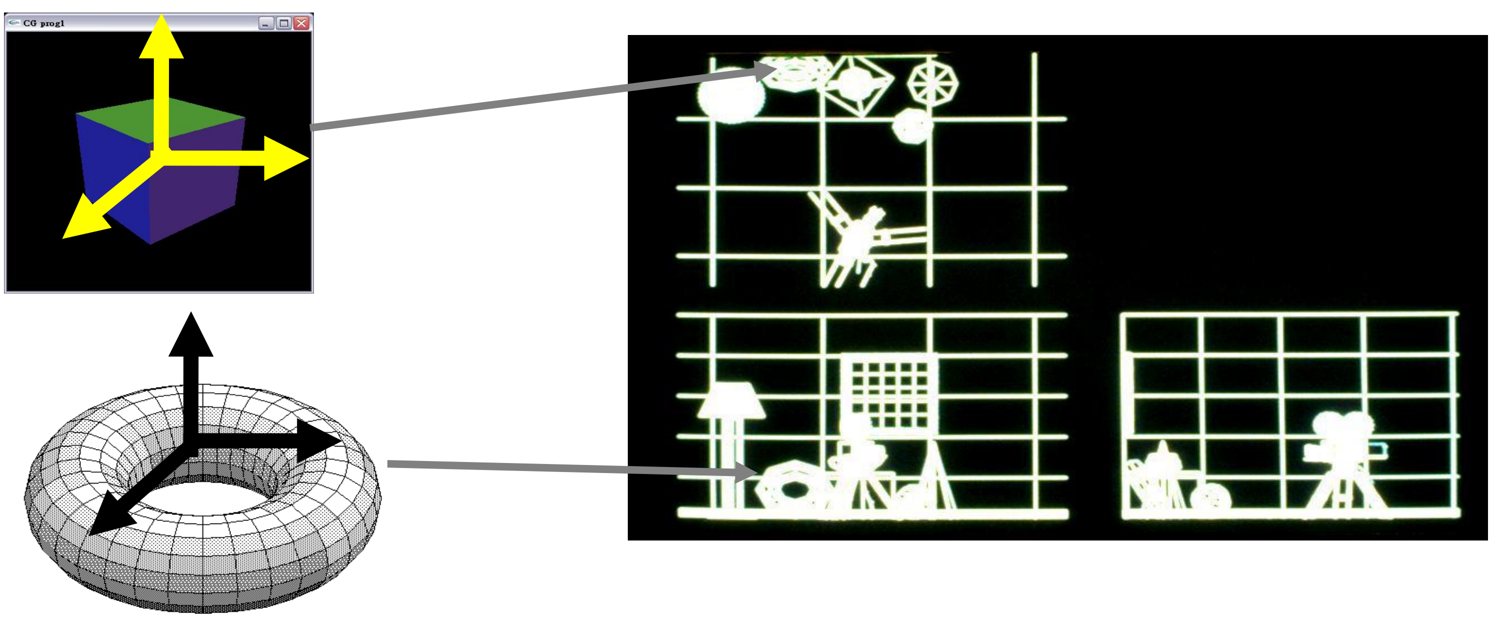
# Scopul transformărilor grafice

Modelarea și implementarea obiectelor

Definirea obiectelor prin coordonatele lor

Necesitatea anumitor acțiuni (deplasate, rotire, scalare) pentru a insera obiectele în coordonatele globale

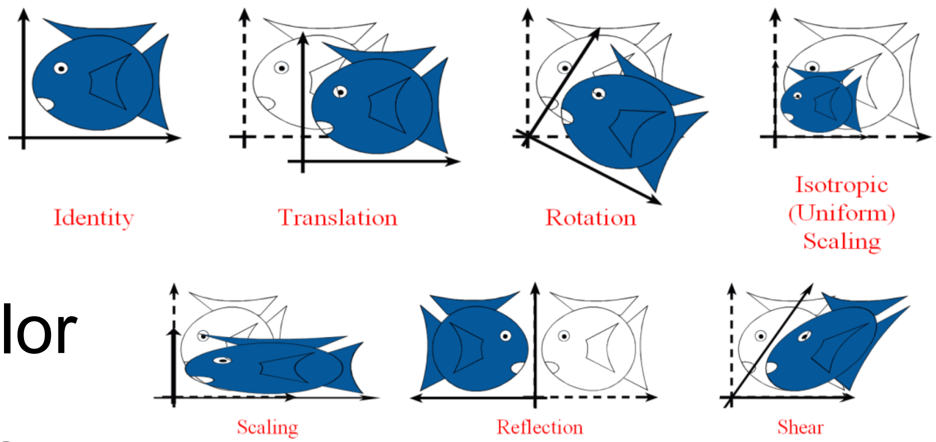
etc.



# Tipuri de transformări

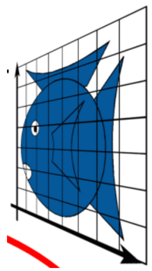
**Geometrice**

- Translație
- Rotație
- Scalare




**Lineare** (prezervare a liniilor paralele)

- Scalare neuniformă, forfecare, etc.



**Proiecție** (prezervare a dreptelor)

- Proiecție de perspectivă
- Proiecție paralelă

**Ne-lineare** (liniile devin curbe)

# Transformări geometrice

Obiectele 2D/3D sunt reprezentate prin:

- Coordonatele vârfurilor, raportate la un sistem de coordonate carteziene 2D sau 3D;
- Atribute topologice (laturi, ciclul de laturi al unei fete, s.a.);
- Atribute de aspect: culoare, tipul de interior pentru suprafețe 2D, atribute de material(ex.: reflexia/refracția luminii de către suprafață), texturi, s.a.

Transformările geometrice se aplica vârfurilor (coordonatelor) obiectului și nu afectează atributele sale!

# Transformări geometrice

Sunt operații fundamentale in sinteza imaginilor folosite pentru:

- Redarea desenelor la diferite mărimi
- Compunerea desenelor sau a scenelor
- Realizarea animației
- Transformarea obiectelor dintr-un spațiu logic, in care sunt definite, in spațiul fizic de afișare
- etc.

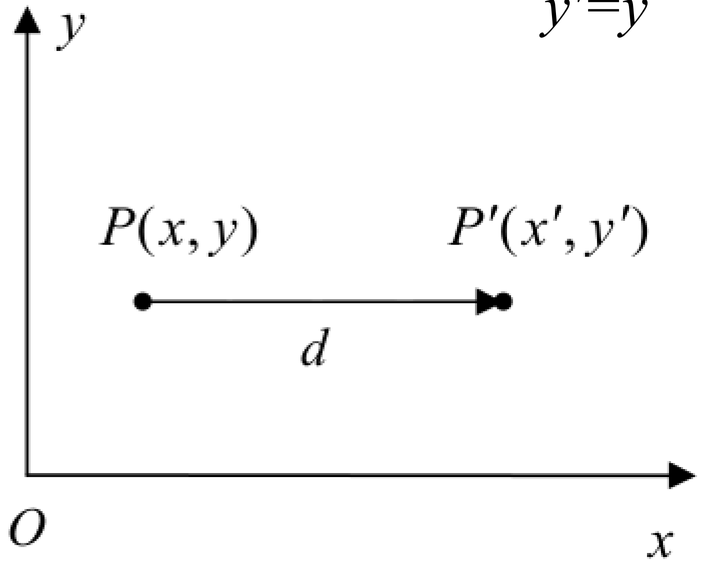
# Transformări geometrice

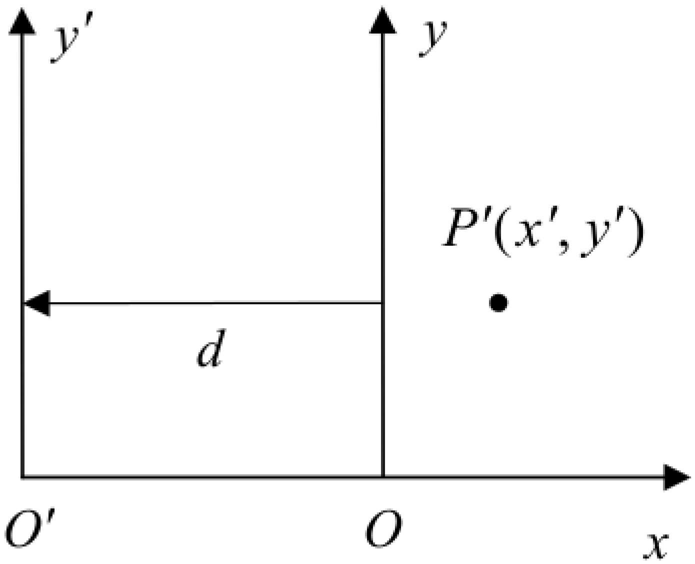
Există două interpretări ale unei transformări grafice a unui punct:

a) se efectuează transformări asupra coordonatelor unui punct, păstrând același sistem de coordonate;

b) se efectuează transformări asupra sistemului de coordonate.

$$x' = x + d$$
$$y' = y$$



# Transformări geometrice 2D elementare

- Translația
- Scalarea faţă de origine
- Rotația faţă de origine
- Forfecarea faţă de origine
- Oglindiri faţă de axele principale, faţă de origine

# Transformări geometrice 2D
# Translația

Translația se definește ca fiind transformarea grafică pentru care orice punct al formei suferă o deplasare liniară global definită.

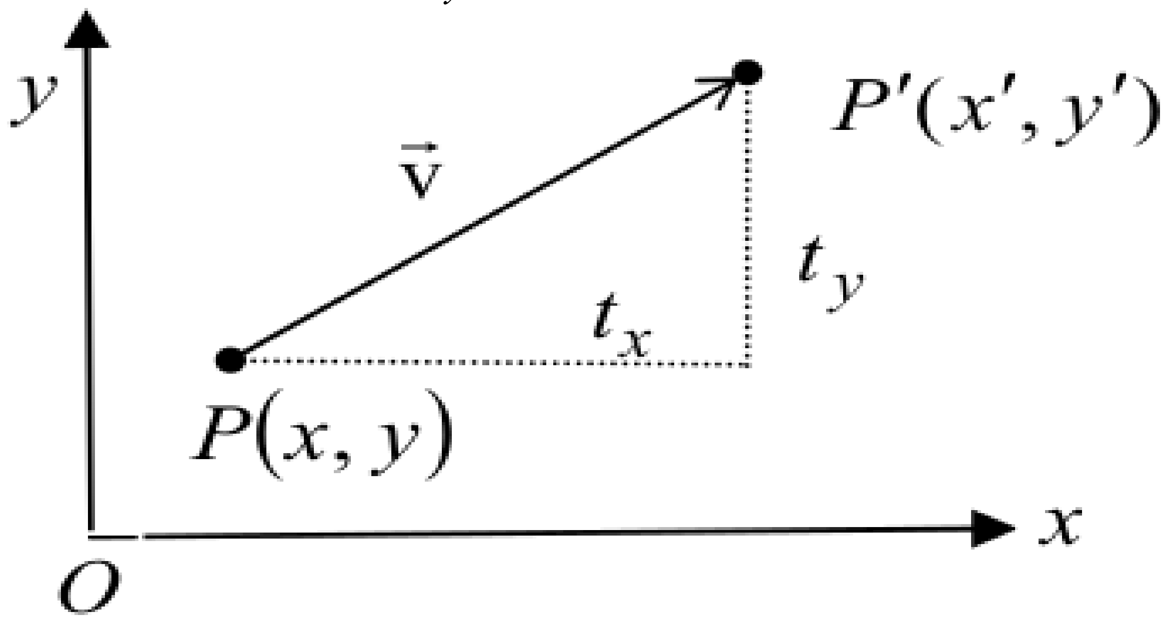
Translația este o transformare grafică ce lasă nemodificate distantele între punctele unei forme grafice. Acestă caracteristică este specifică corpurilor fizice solide (nedeformabile) și de aceea o vom numi *caracteristică de corp solid*. Reformulând, putem spune că transformarea grafică numită *translație* prezintă *caracteristica de corp solid*.

# Transformări geometrice 2D
# Translația

$$P(x,y) \ -> P(x', y')$$

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

Translatia $T(t_x, t_y)$



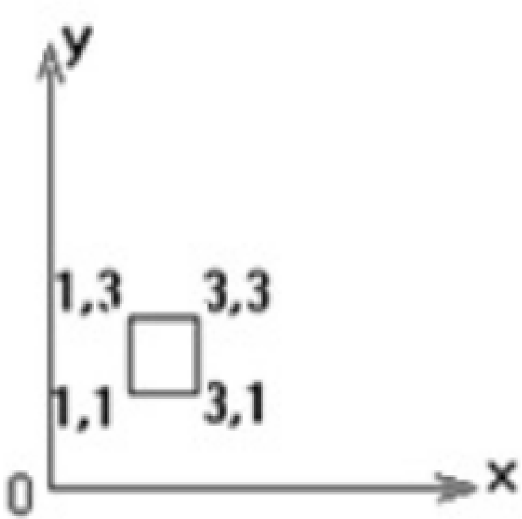
# Transformări geometrice 2D Scalarea

- Scalare: forma grafică suferă o modificare de reprezentare în urma căreia distanțele dintre puncte sunt afectate.
- Fiecărei axe de coordonate i se atașează un scalar numit *factor de scară*. Atunci când factorii de scară au aceeași valoare, operația de scalare se transformă în operație de *asemănare* iar factorul de scalare unic definit poartă numele de *factor de asemănare*. Factorul de asemănare unitate conduce la operația de *identitate*.
- Un factor de scalare supraunitar - mărire de dimensiune, un factor de scalare subunitar - micșorare de dimensiune.

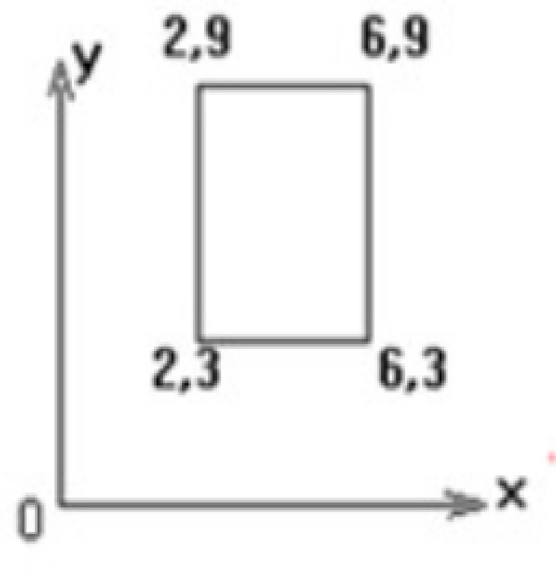
# Transformări geometrice 2D
# Scalarea față de origine

$$P(x,y) \;\text{–>}\; P(x', y')$$

$$x' = s_x * x$$
$$y' = s_y * y$$




$s_x=2,\ s_y=3$

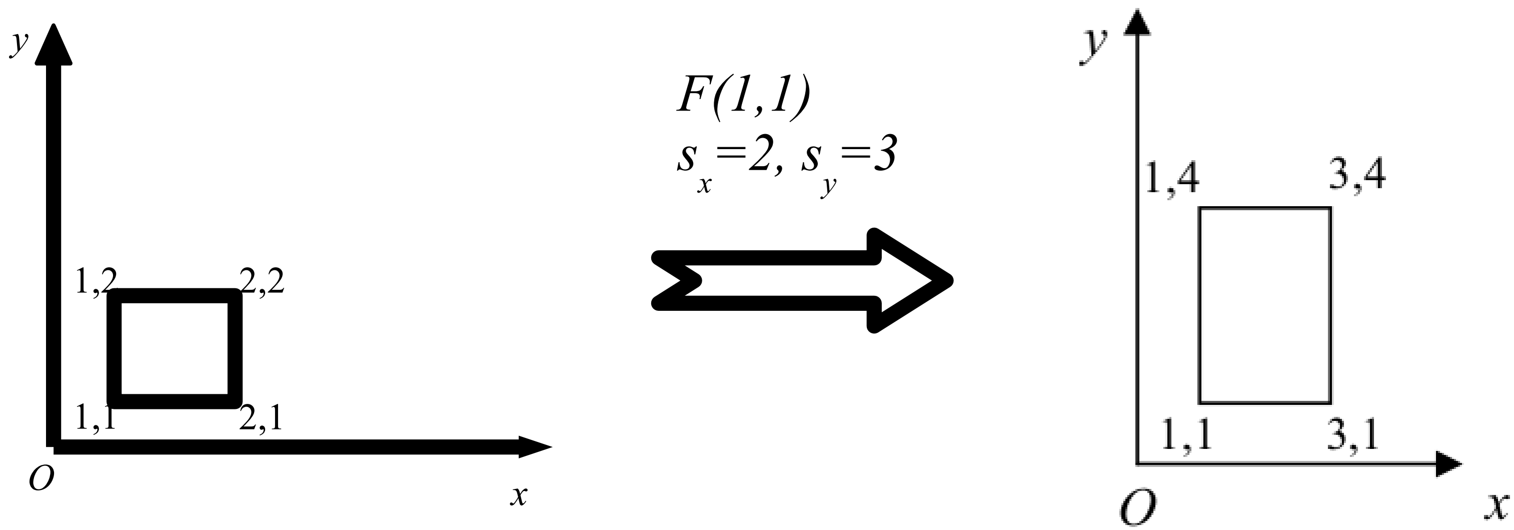


# Transformări geometrice 2D
# Scalarea față de un punct arbitrar

$P(x,y) \;\text{–>}\; P(x', y')$ Punctul de scalare: $F(x_f, y_f)$

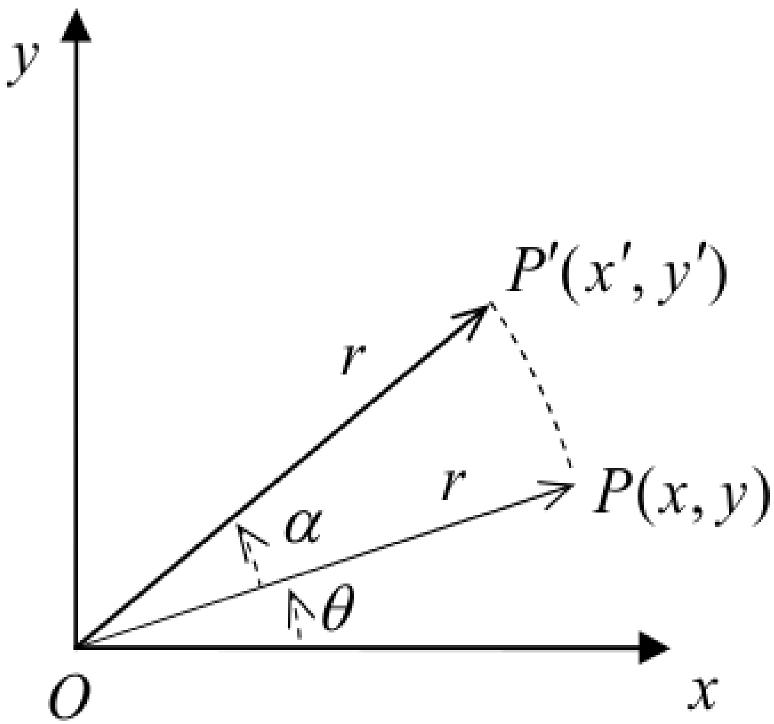
Operația se reduce la scalarea vectorului $FP$

$$
\begin{aligned}
x' - x_f &= s_x \cdot (x - x_f) \\
y' - y_f &= s_y \cdot (y - y_f)
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
x' &= x \cdot s_x + x_f - x_f \cdot s_x \\
y' &= y \cdot s_y + y_f - y_f \cdot s_y
\end{aligned}
$$



# Transformări geometrice 2D
# Rotația față de origine

$$P(x,y) \to P(x', y')$$



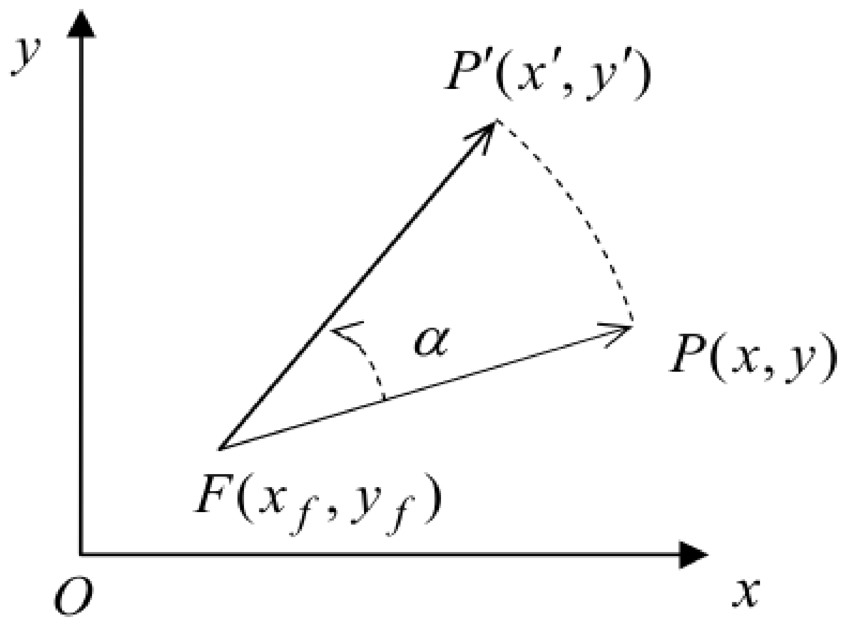

$x = r\cos(\theta)$
$y = r\sin(\theta)$
$x' = r\cos(\theta + \alpha)$
$y' = r\sin(\theta + \alpha)$

$x' = r\cos(\theta)\cos(\alpha) - r\sin(\theta)\sin(\alpha)$
$y' = r\sin(\theta)\sin(\alpha) + r\cos(\theta)\cos(\alpha)$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ y' &= x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{aligned}}$$

# Transformări geometrice 2D
# Rotația față de un punct oarecare

$$P(x,y) \;\text{–>}\; P(x', y')$$




$$x' - x_f = (x - x_f)\cos(\alpha) - (y - y_f)\sin(\alpha)$$
$$y' - y_f = (x - x_f)\sin(\alpha) + (y - y_f)\cos(\alpha)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) + x_f - x_f\cos(\alpha) + y_f\sin(\alpha) \\ y' &= x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) + y_f - x_f\sin(\alpha) - y_f\cos(\alpha) \end{aligned}}$$

# Transformări geometrice 2D
# Coordonate

Un punct $P(x,y)$ este reprezentat prin coordonatele sale $(x,y)$ sau printr-un vector-linie: $[x,y]$

O metodă alternativă ar fi reprezentarea printr-un vector-coloană:

$$(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplu: $$\mathrm{P(x,y)} = (2.1, 4.8) = [2.1, 4.8] = \begin{bmatrix} 2.1 \\ 4.8 \end{bmatrix}$$

# Transformări geometrice 2D
# Notații coordonate

Notațiile par a fi echivalente, există însă și diferențe...

Sa examina înmulțirea matricelor i aceste doua cazuri
Pentru vector-linie :

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+dy+gz & bx+ey+hz & cx+fy+iz \end{bmatrix}$$

Pentru vector-coloană :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ gx+hy+iz \end{bmatrix}$$

# Transformări geometrice 2D
# Notații coordonate

Ecuațiile obținute prin înmulțirea matricelor sunt echivalente doar când se respecta anumite condiții

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

P' = M•P

P' = P•M$^T$

# Transformări geometrice 2D
# Notații coordonate

Ambele notații sunt utilizate in literatura. Pentru a trece dintre-o notație in alta (de la vector-linie la vector-coloana sau invers) va trebui sa utilizam matricea transpusa fata de notația opusa pentru a obține același rezultat.

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, M^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

# Transformări geometrice 2D
# Forma matricială: translația

Avem:

$$P=\left(x,y\right) \qquad P=(-3.7,-4.1)$$

$$T=\left(t_x,t_y\right) \qquad T=(7.1,8.2)$$

Dorim sa calculăm:

$$x'=x+t_x \qquad x'=-3.7+7.1$$

$$y'=y+t_y \qquad y'=-4.1+8.2$$

Forma matricială:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3.7 \\ -4.1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7.1 \\ 8.2 \end{bmatrix}$$

$$P'=P+T \qquad x'=3.4$$

$$y'=4.1$$

# Transformări geometrice 2D
# Forma matricială: rotația

$$P=\left(x,y\right)$$
$$R=\left(\theta\right)$$
$$x=r\cos\varphi$$
$$y=r\sin\varphi$$
$$x'=r\cos\left(\varphi+\theta\right)$$
$$y'=r\cos\left(\varphi+\theta\right)$$

$$x'=r\cos\varphi\cos\theta-r\sin\varphi\sin\theta$$
$$y'=r\cos\varphi\sin\theta+r\sin\varphi\cos\theta$$
$$x'=x\cos\theta-y\sin\theta$$
$$y'=x\sin\theta+y\cos\theta$$
$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$
$$P'=R\cdot P$$

# Transformări geometrice 2D
# Forma matricială: scalarea

$$P = (x, y)$$

$$S = (s_x, s_y)$$

$$x' = s_x x$$

$$y' = s_y y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$P' = S \cdot P$$

$$P = (1.4, 2.2)$$

$$S = (3, 3)$$

$$x' = 3 * 1.4$$

$$y' = 3 * 2.2$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.4 \\ 2.2 \end{bmatrix}$$

$$x' = 4.2$$

$$y' = 6.6$$

# Transformări: rezumat

Translație
*P'=T + P*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

Scalare
*P' =S · P*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotire
*P' =R · P*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Am fi interesați ca toate transformările să fie cu înmulțiri pentru a le putea concatena

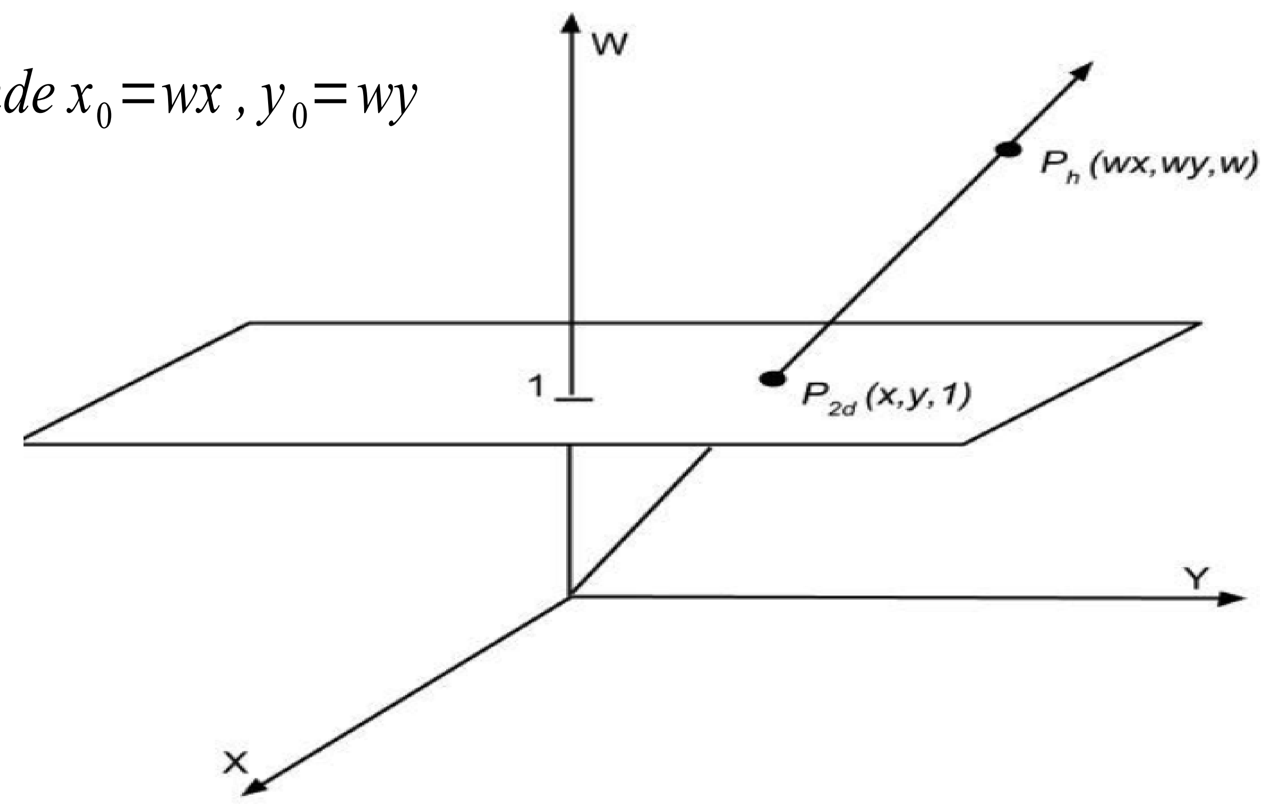
Soluția: utilizarea coordonatelor omogene

# Coordonate omogene

Dacă se va încerca exprimarea unor transformări compuse ce cuprind în secvență cel puțin o *translație*, reprezentările matriceale ale acestora (după modelul prezentat) nu vor mai fi posibile fără a apela la *coordonatele omogene*.

Un punct din plan, notat $(x,y)$, se reprezintă în coordonate omogene

prin vectorul: $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ w \end{bmatrix}$, $\quad unde\ x_0 = wx\ ,\ y_0 = wy$



# Coordonate omogene Exemple

$$P=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x=\dfrac{x_h}{h} \\ y=\dfrac{y_h}{h} \\ \dfrac{h}{h} \end{bmatrix} Ex. \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, Ex. \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3=\dfrac{6}{2} \\ 7=\dfrac{14}{2} \\ \dfrac{2}{2} \end{bmatrix}$$

# Coordonate omogene

***Observație 1:***

*Reprezentarea unui punct în coordonate omogene nu este unică.*

*Astfel, vectorii:* $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ și $\begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$ *sunt reprezentări posibile ale punctului*

*(3,2) în coordonate omogene.*

***Observație 2:***

*Un vector în coordonate omogene* $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ , $c \neq 0$ ,

*reprezintă punctul din plan notat* $\begin{bmatrix} a/c \\ b/c \end{bmatrix}$

# Coordonate omogene
# Exemple

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x = \dfrac{x_h}{h} \\ y = \dfrac{y_h}{h} \\ \dfrac{h}{h} \end{bmatrix} Ex. \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, Ex. \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 = \dfrac{6}{2} \\ 7 = \dfrac{14}{2} \\ \dfrac{2}{2} \end{bmatrix}$$

# Coordonate omogene

Cele trei transformări discutate (translația, scalarea şi rotația) în coordonate omogene, capătă următoarele exprimări:

- *translația:*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- *scalarea față de origine:*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- *rotația față de origine:*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Coordonate omogene
# Transformări inverse

Fiecare dintre transformările elementare deține o operație inversă (o transformare opusă).

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Coordonate omogene
# Transformări inverse

Se pot verifica proprietățile:

1. $[\,T(t_x,t_y)\,]^{-1} = [\,T(-t_x,-t_y)\,]$
2. $[\,S(s_x,s_y)\,]^{-1} = [\,S(1/s_x,1/s_y)\,]$
3. $[\,R(\alpha\,)\,]^{-1} = [\,R(-\alpha\,)\,]$

# Transformări finale

$$T(t_x, t_y) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = T(t_x, t_y) + P \rightarrow P = T(t_x, t_y) \bullet P$$

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = S(s_x, s_y) \bullet P \rightarrow P = S(s_x, s_y) \bullet P$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = R(\theta) \bullet P \rightarrow P = R(\theta) \bullet P$$

# Combinarea transformărilor

De cele mai multe ori o transformare grafică este compusă din mai multe transformări elementare.

Pentru simplificarea reprezentărilor matematice, se preferă utilizarea notației matriceale în descrierea operațiilor de transformare. Astfel, rotația punctului *P(x,y)* față de origine, se exprimă astfel:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Sau $P' = R\,P$

# Combinarea transformărilor

Consideram în continuare o scalare față de origine urmată de o rotație față de origine. Avem: P'=RS P

$$M = RS = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cos\varphi & -s_y \sin\varphi \\ s_x \sin\varphi & s_y \cos\varphi \end{bmatrix}$$

***Observație:***

Deoarece produsul matriceal nu este comutativ, va trebui acordată atenție succesiunii matricelor ce semnifică operatorii transformărilor. Regula este ca matricea să se succeadă în ordinea în care acestea operează, de la dreapta la stânga.

Astfel, o transformare compusă dintr-o rotație urmată de o scalare se scrie: M=SR

O transformare compusă dintr-o scalare urmată de o rotație se scrie: M=RS

**Exercițiu:** *Să se demonstreze că cele două transformări sunt distincte.*

# Combinarea transformărilor

Ecuații echivalente

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

P' = MP

P' = PM$^T$

TRSv

$vS^T R^T T^T$

$\longleftarrow$

Matricele sunt aplicate
de la dreapta spre stanga

$\longrightarrow$

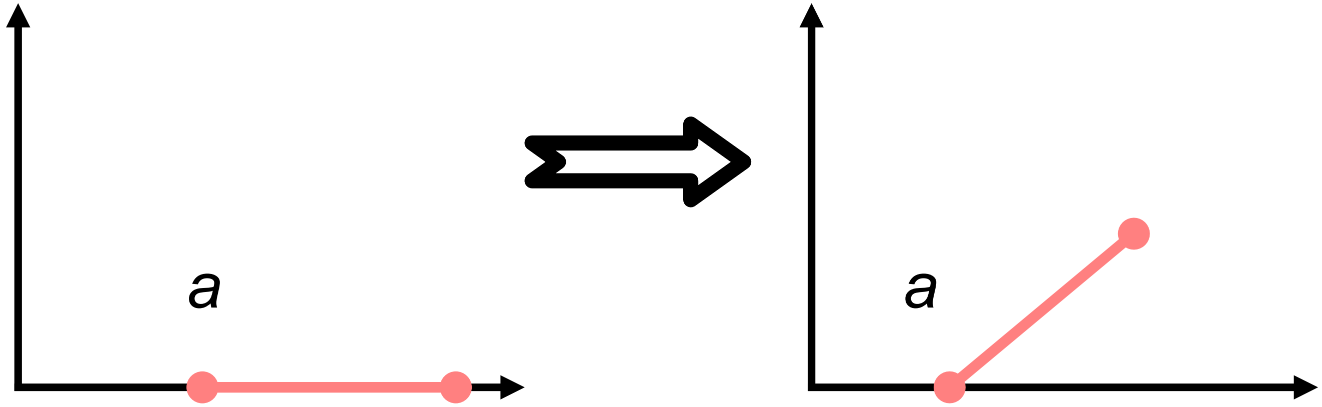
Matricele sunt aplicate
de la stanga spre dreapta

# Transformări compuse

Ce se-ntâmplă dacă dorim sa scalăm, sa rotim și să deplasam o figură?

Putem sa executăm transformările una câte una

De ex: sa rotim segmentul cu 45 de grade în jurul punctului *a*

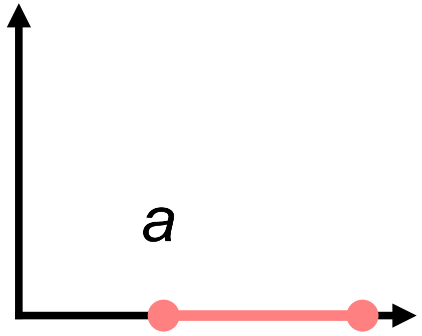


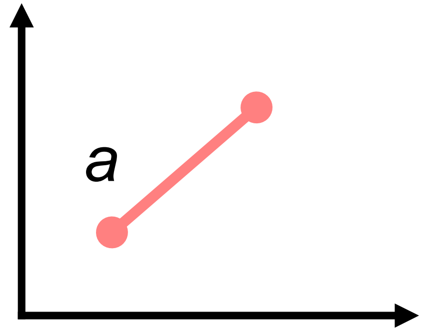
# Transformări compuse

Linia e definită prin doua puncte

Dacă aplicăm o rotație la 45 de grade, R(45), ea afectează ambele puncte

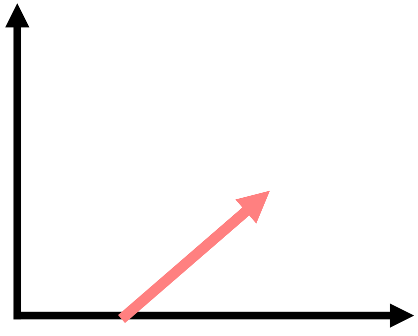
Ar trebui sa translăm ambele puncte pentru a întoarce punctul a în poziția originala cu scopul de a prezerva punctul a...




Incorect !

R(45)



Correct

T(-a) R(45) T(a)

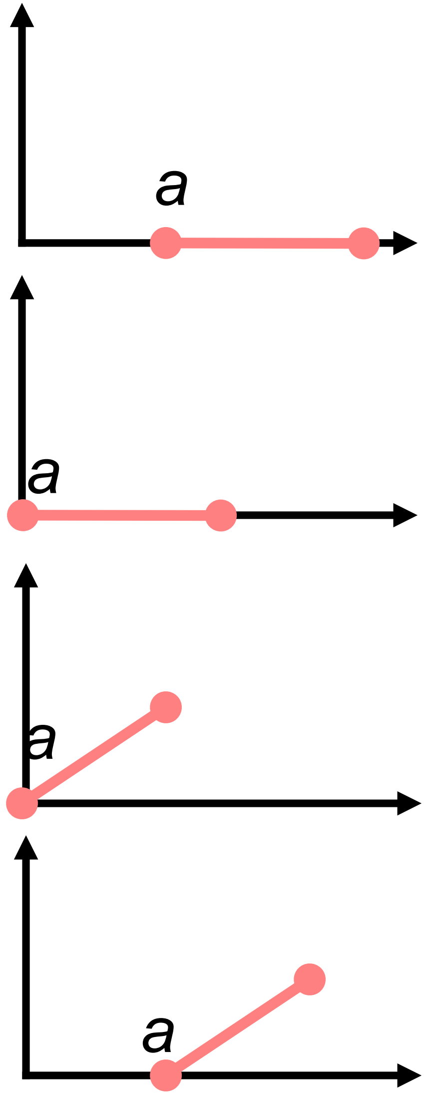
# Transformări compuse

Alegem originea punctului
de rotație a=3

Deplasam linia la origine: T (-3)

Rotim cu 45 de grade: R(45)

Deplasam linia înapoi: T(3)



# Transformări compuse

Va funcționa oare aceasta secventa? Verificați singuri... Explicați .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(45) & -\sin(45) & 0 \\ \sin(45) & \cos(45) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rezultatul primei înmulțiri (vector*matrice)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3 \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Combinarea transformărilor

$$P' = A \bullet P, P'' = B \bullet P'$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

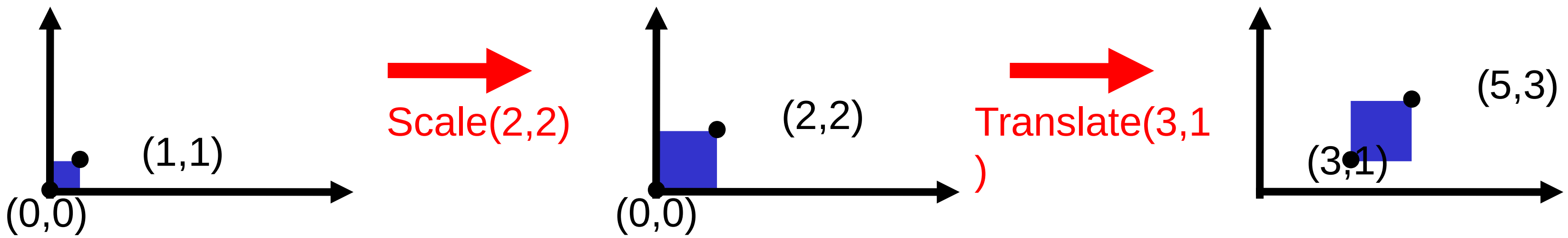
$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P'' = B \cdot A \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \cos\theta - t_y \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & t_x \sin\theta + t_y \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Combinarea transformărilor Exemplu

Scalare apoi Translatie



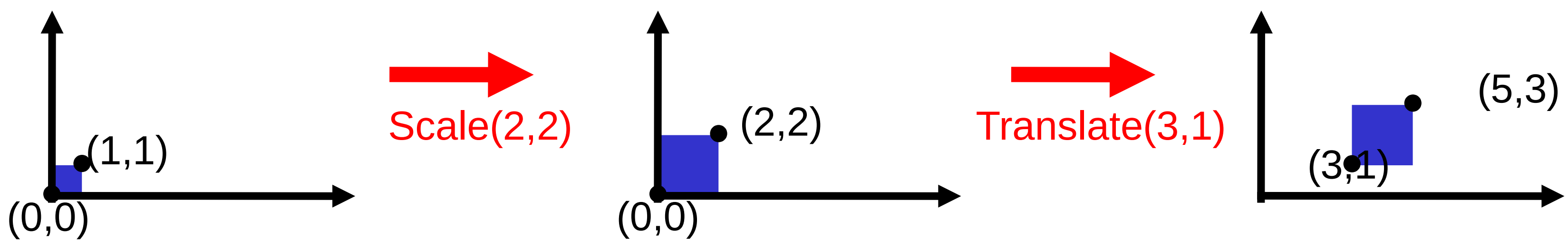

Multiplicarea matricelor: P' = T ( SP ) = TSP

$$TS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

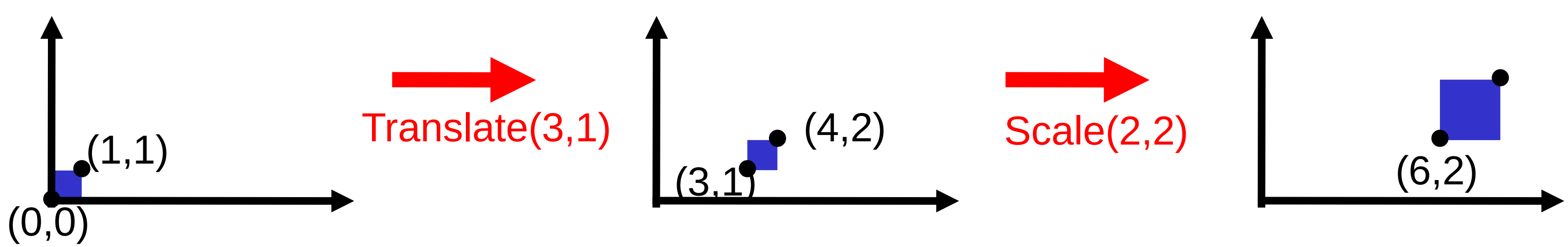
Multiplicarea nu e comutativă !

# Combinarea transformărilor
# Exemplu

Scalare apoi Translatie: P' = T ( S P ) = TS P




Translatie apoi Scalare: P' = S ( T P ) = ST P



# Combinarea transformărilor
# Exemplu

S apoi T : P' = T ( S P ) = TS P

$$TS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T apoi S : P' = S ( T P ) = ST P

$$ST = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Scalarea faţă de un punct arbitrar

$$P' = T(x_f, y_f) * S(s_x, s_y) * T(-x_f, -y_f) * P$$

$T(x_f, y_f)$ - punctul de scalare

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} s_x & 0 & -s_x * x_f \\ 0 & s_y & -s_y * y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & -s_x * x_f + x_f \\ 0 & s_y & -s_y * y_f + y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x * s_x + x_f - s_x * x_f \\ y * s_y + y_f - s_y * y_f \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$x' = x \cdot s_x + x_f - x_f \cdot s_x$$
$$y' = y \cdot s_y + y_f - y_f \cdot s_y$$

Această formulă a fost dedusă anterior !

# Rotația față de un punct arbitrar

$$P' = T(x_f, y_f) * R(\alpha) * T(-x_f, -y_f) * P$$

$T(x_f, y_f)$ - punctul de rotație

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

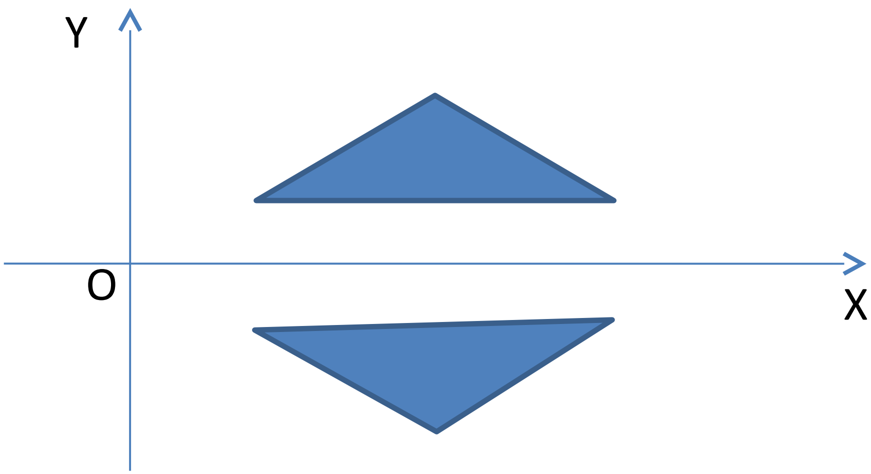
$$\Downarrow$$

$$x' = x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) + x_f - x_f\cos(\alpha) + y_f\sin(\alpha)$$
$$y' = x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) + y_f - x_f\sin(\alpha) - y_f\cos(\alpha)$$

# Alte transformări: oglindirea

Oglindirea față de axa OX

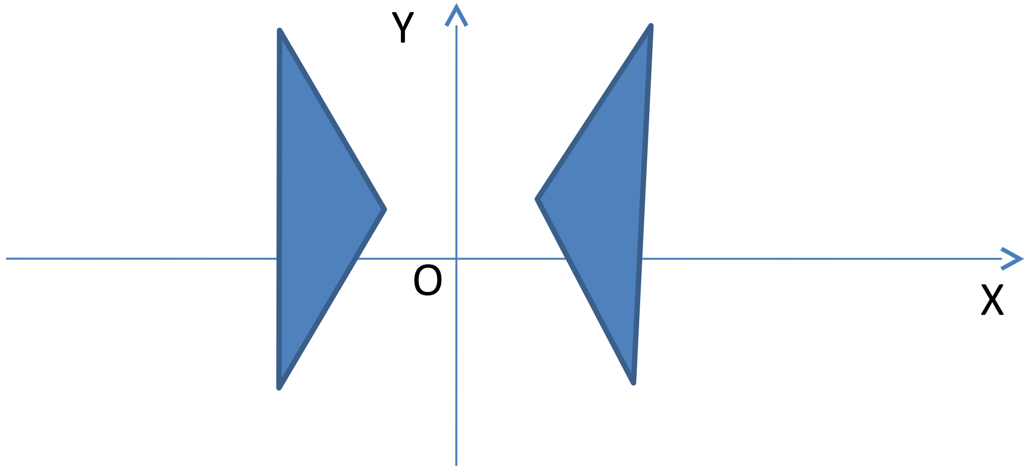
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



# Alte transformări: oglindirea

Oglindirea față de axa OY

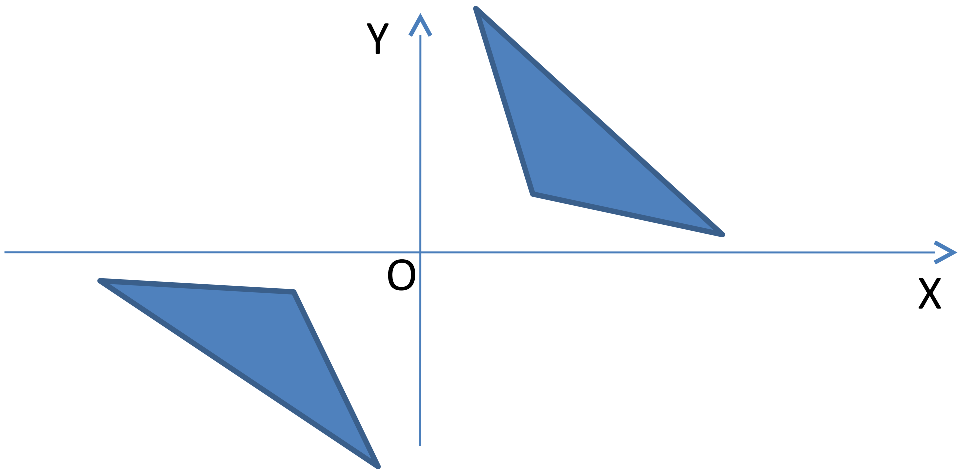
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



# Alte transformări: oglindirea

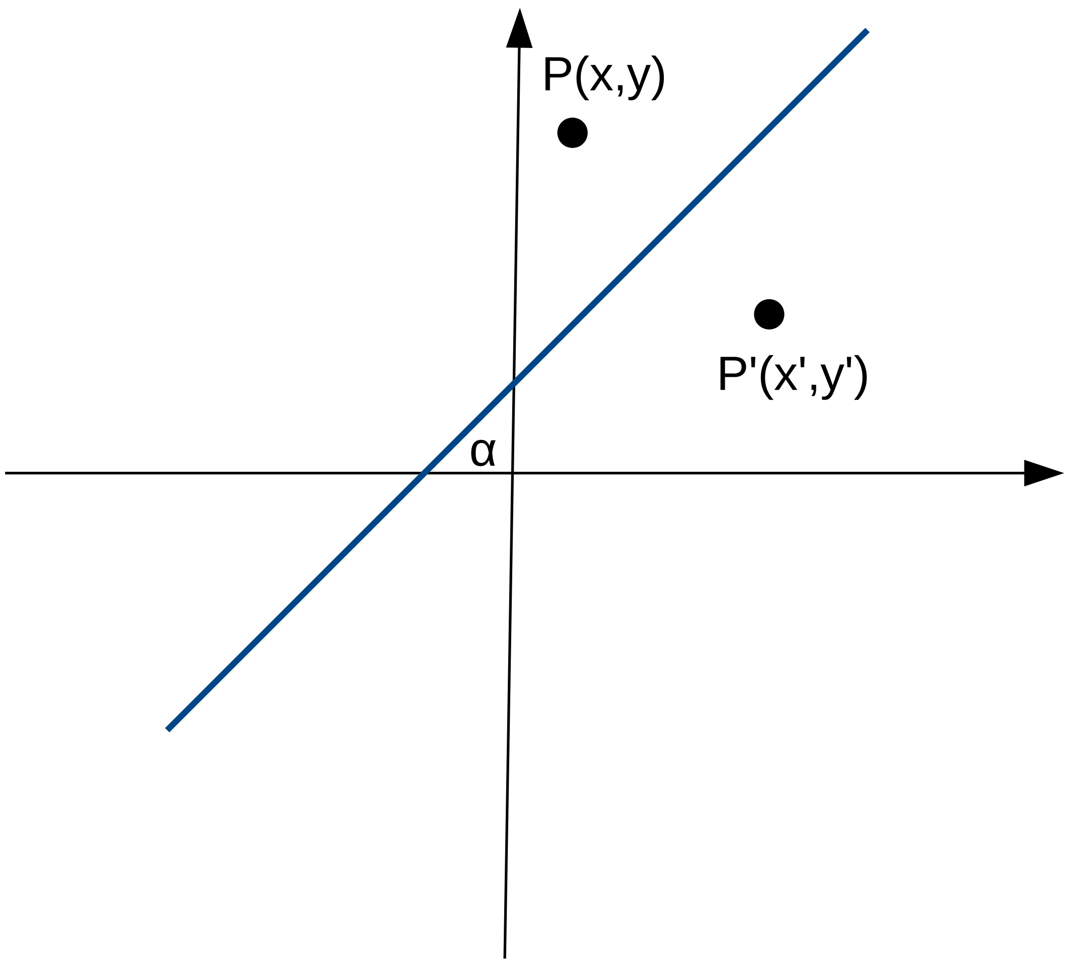
Oglindirea față de origine

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



# Oglindirea faţă de o dreaptă arbitrară

Oglindirea față de o dreaptă y=a*x+b



# Oglindirea faţă de o dreaptă arbitrară

Oglindirea față de o dreaptă y=a*x+b poate fi exprimată ca o transformare compusă din următoarele transformări elementare:

1. translație astfel încât dreapta să treacă prin origine T(0,-b)

2. rotație a dreptei pentru a o alinia cu una din axele de coordonate: R(-arctg(α)) (de exemplu cu axa Ox)

3. oglindirea față de axa pe care a fost suprapusă: Ox

4. rotație inversă celei de la punctul 2 R(arctg(α))

5. translație inversă celei de la punctul 1, T(0,b)

În notație matriceală transformarea se exprimă astfel:

$M = T^{-1} * R^{-1} * O * R * T$

# Oglindirea faţă de o dreaptă arbitrară

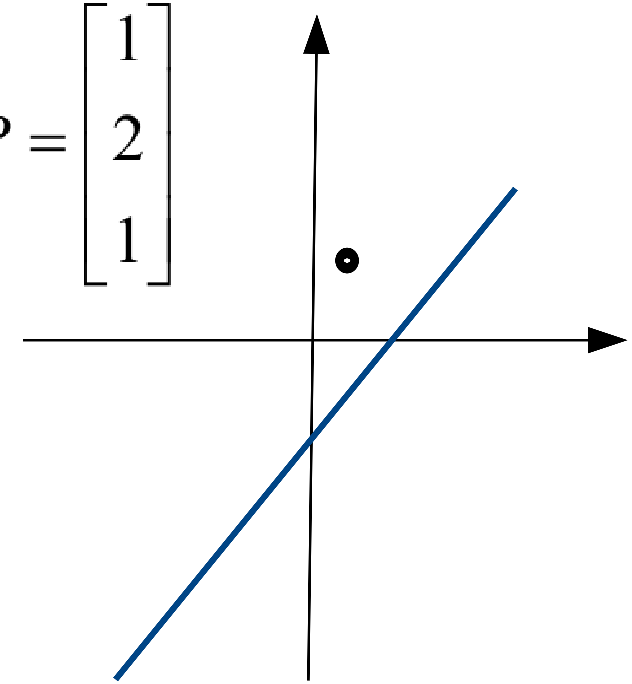
<u>Exerciţiu</u>

Oglindirea față de dreapta y=x-2

Fie y=x-2

a=1, b=-2

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



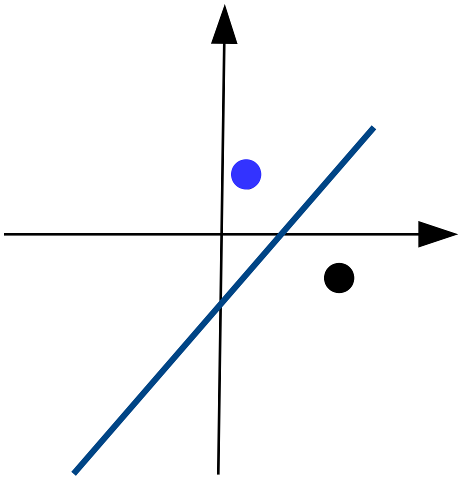
Definiți matricea compusă a acestei transformări și, fiind dat un punct P(x,y), calculați coordonatele punctului P'(x', y')

$$M = T^{-1} * R^{-1} * O * R * T = T(0,-2) * R(45) * O(OX) * R(-45) * T(0,2)$$

# Oglindirea faţă de o dreaptă arbitrară

Oglindirea față de dreapta y=x-2 a punctului P(2,1)

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}&0\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}=$$



$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}&0\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&\sqrt2\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&\sqrt2\\0&0&1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&-2\\0&0&1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}&0\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&\sqrt2\\\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}&-\sqrt2\\0&0&1\end{bmatrix}=$$

Calculați oglindirea față de y=x-2 a punctelor : $P_1(-5,7)$ ; $P_2(5,-5)$ ; $P_3(5,1)$

$$\boxed{\begin{aligned}x'&=4\\y'&=-1\end{aligned}}$$

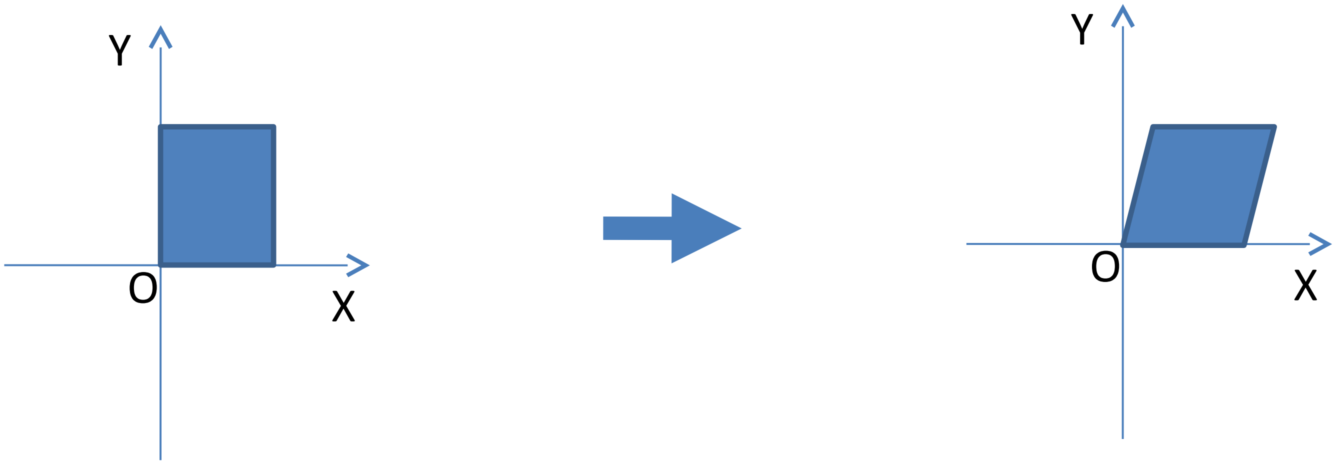
$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

# Alte transformări: forfecarea

Forfecarea (înclinarea) fata de OX

$$\begin{cases} x' = x + F_x y \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & F_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$F_x$: factorul de forfecare pe axa OX

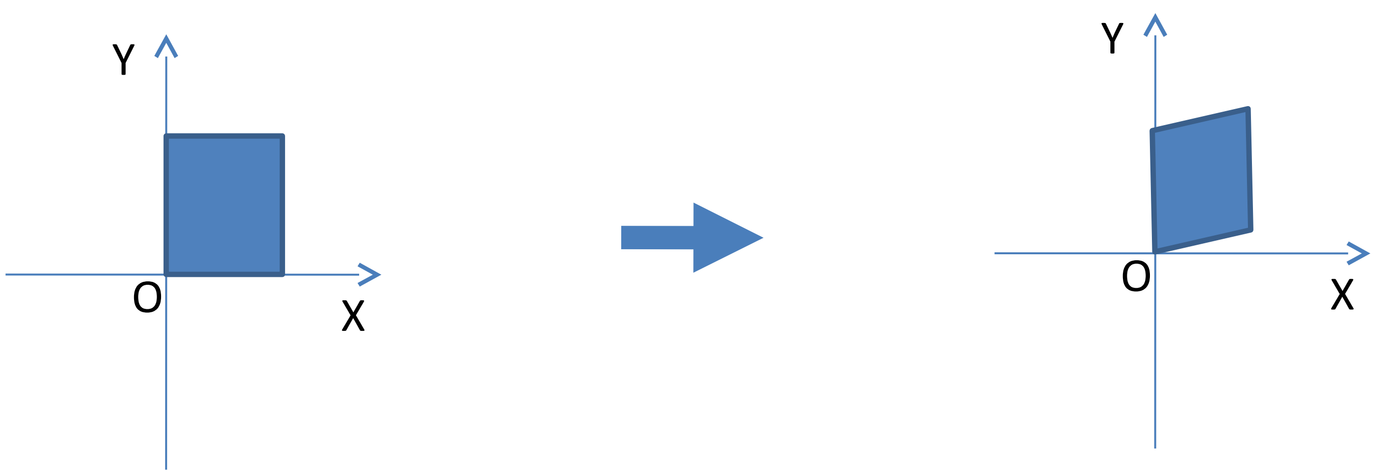


# Alte transformări: forfecarea

Forfecarea fata de OY

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + F_y x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ F_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

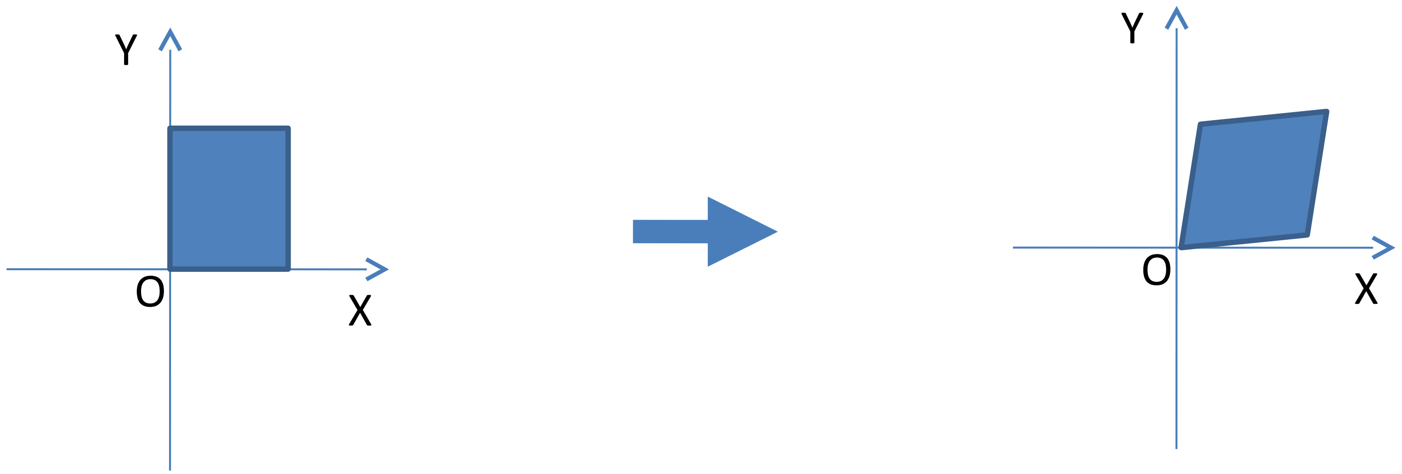
$F_y$: factorul de forfecare pe axa OY



# Alte transformări: forfecarea

Forfecarea caz general

$$\begin{cases} x' = x + F_x y \\ y' = y + F_y x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & F_x & 0 \\ F_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



# Alte transformări: forfecarea

Forfecarea față de un punct oarecare din plan, (xf,yf) , exprimata ca transformare compusa:

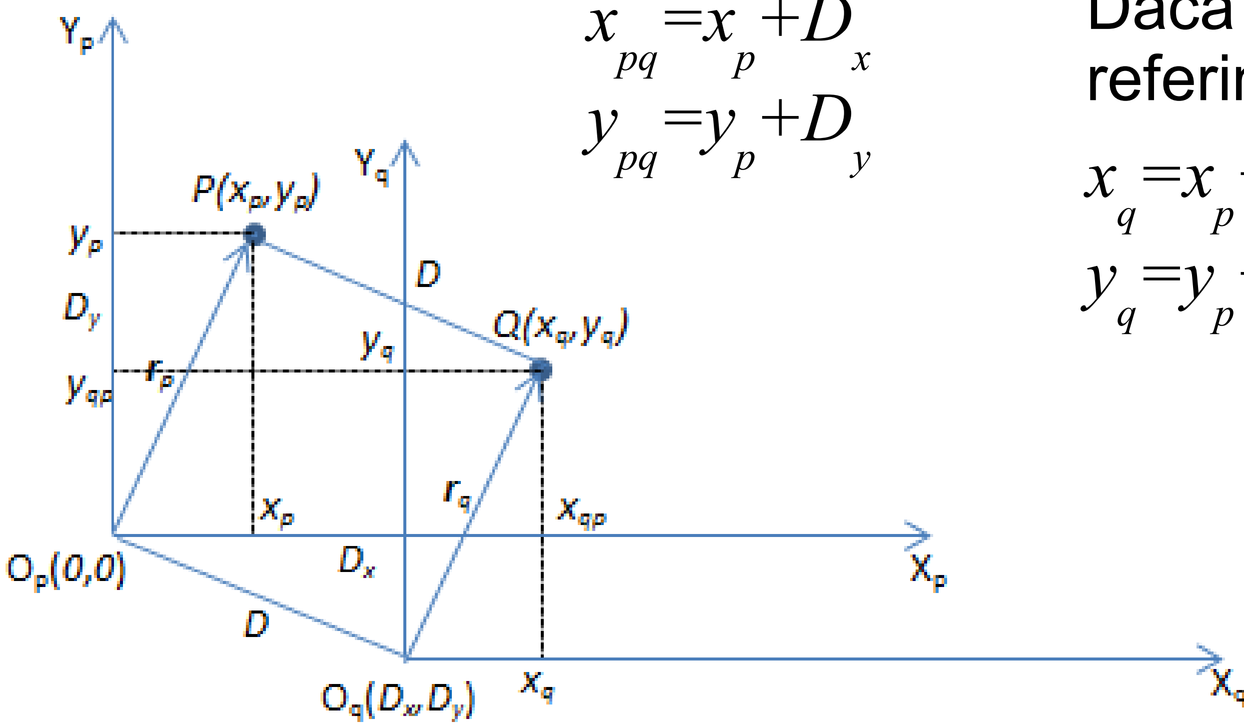
1. Translație prin care punctul (xf, yf) ajunge in origine

2. Forfecarea fata de origine

3. Translația inversă celei de la pasul 1

# Transformare de coordonate
# Translația

Fie reperele $X_pO_pY_p$ și $X_qO_qY_q$, ortogonale drepte. Translarea punctului curent din $P$ în $Q$ este interpretată în acest caz ca o transformare de coordonate, de la $(x_p,y_p)$ la $(x_q,y_q)$, adică o deplasare a referențialului $X_qO_qY_q$ față de $X_pO_pY_p$ cu distanța $D$.

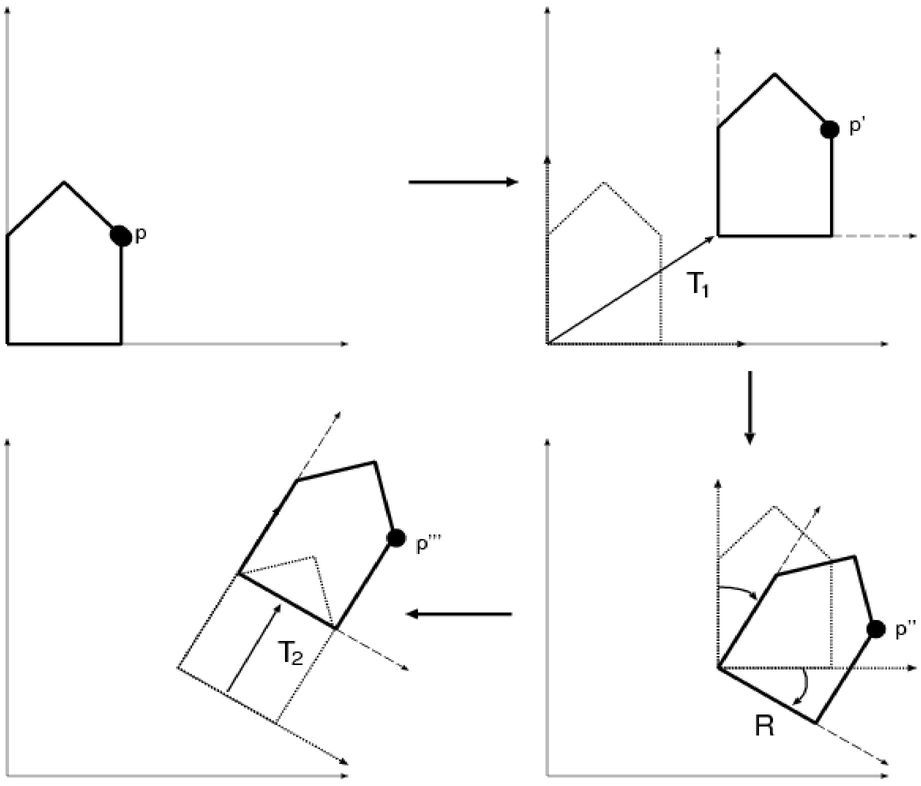



$$x_{pq} = x_p + D_x$$
$$y_{pq} = y_p + D_y$$

Daca se face referinta la $O_p(0,0)$ :

$$x_q = x_p + D_x$$
$$y_q = y_p + D_y$$

# Transformare de coordonate
# Alt exemplu

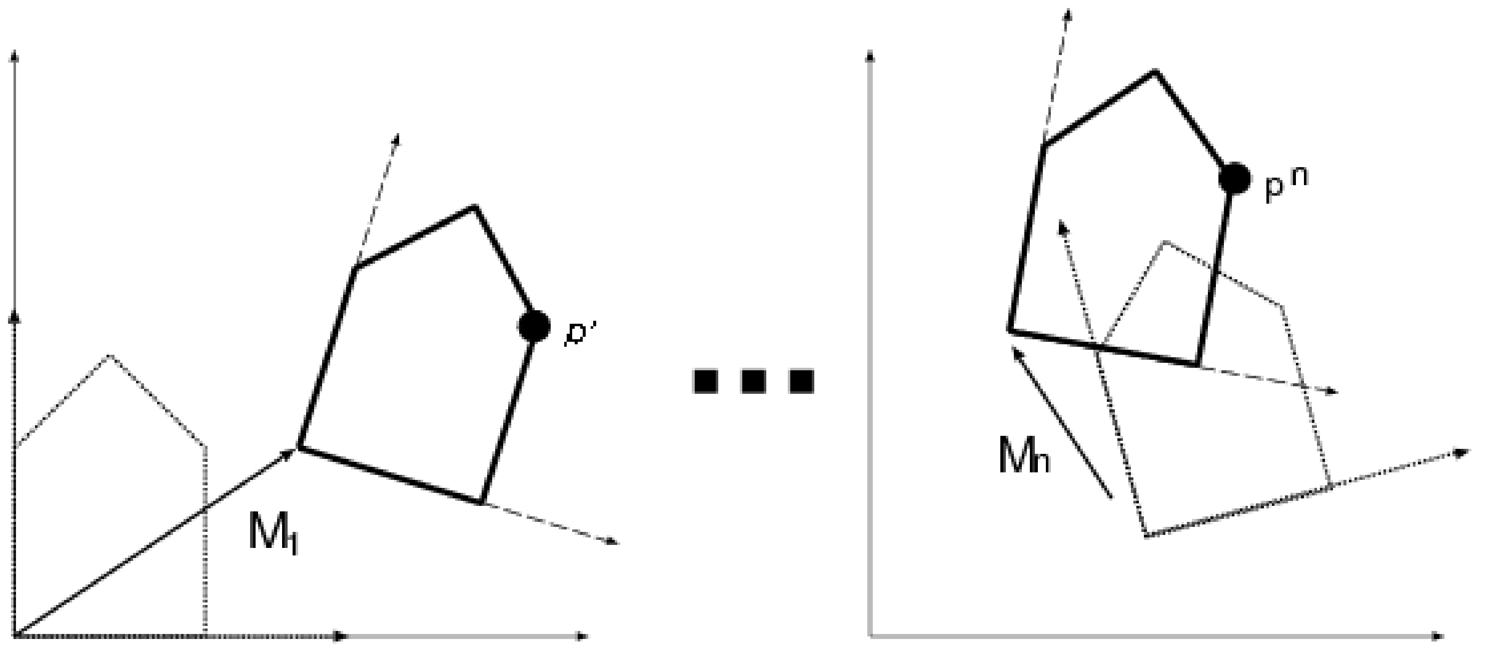



$p'=T_1p$
$p''=RT_1p'$
$p'''=T_2RT_1p'$

Obținerea matricei globale de transformare prin concatenarea transformărilor locale de la stânga spre dreapta

p', p'', p''' coordonatele p după fiecare transformare

# Transformare de coordonate
# Alt exemplu



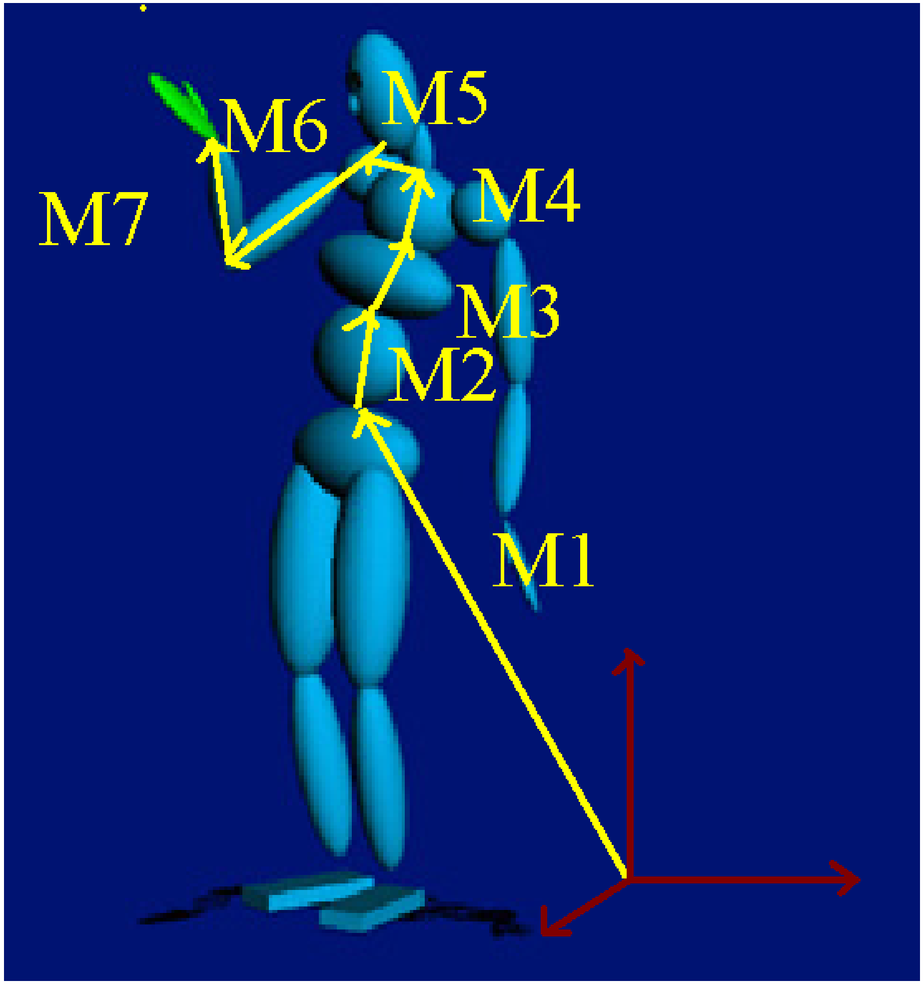

$p^n = M_n * M_{n-1} * \ldots * M_1 * p$

$p^n$ sunt coordonatele punctuti p dupa n transformari

# Poziții relative și absolute

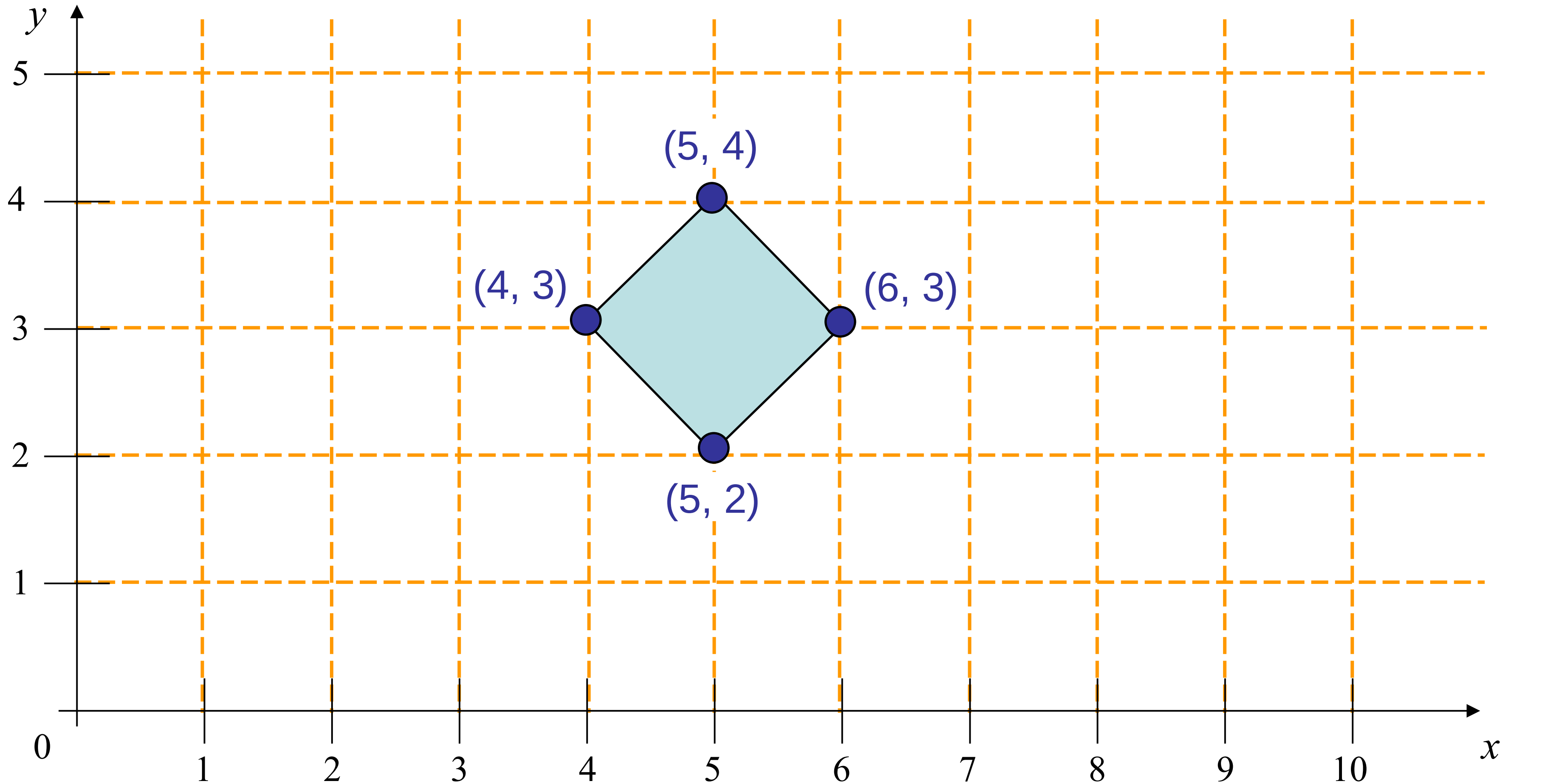
Utilizarea in robotica pentru a calcula poziția bratului in 3D in raport cu poziția robotului :

$$M = \prod_{1}^{n} M_i$$



# Exercițiu practic

Utilizând multiplicarea matricelor calculați rotația figurii de mai jos cu 45 de grade în jurul punctului (5, 3), iar apoi scalarea cu $s_x$=10, $s_y$=20



Întrebări ?

# Problemă

Ma aflu in mașină iar retrovizorul e in cu 0,4 m in dreapta mea și cu 0,3 m mai in faţă

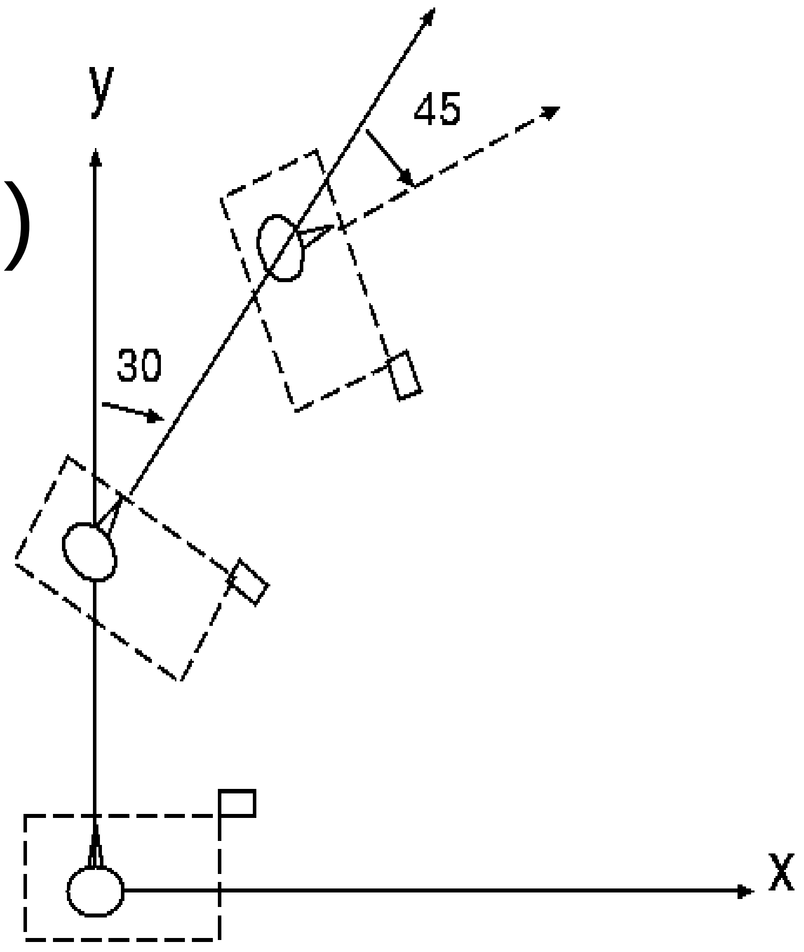
Pornesc mașina și ma deplasez înainte cu 5 m, după care întorc la dreapta cu 30 de grade, conduc iarăși înainte 5 m după care iarăși întorc la dreapta cu 45 de grade și ma opresc.

Care este poziția retrovizorului in raport cu poziția mea inițială înainte de a porni mașina?

# Soluție

- Poziția inițială a retrovizorului: (0.4;0.3)
- Matricea pentru deplasarea la primii 5 metri

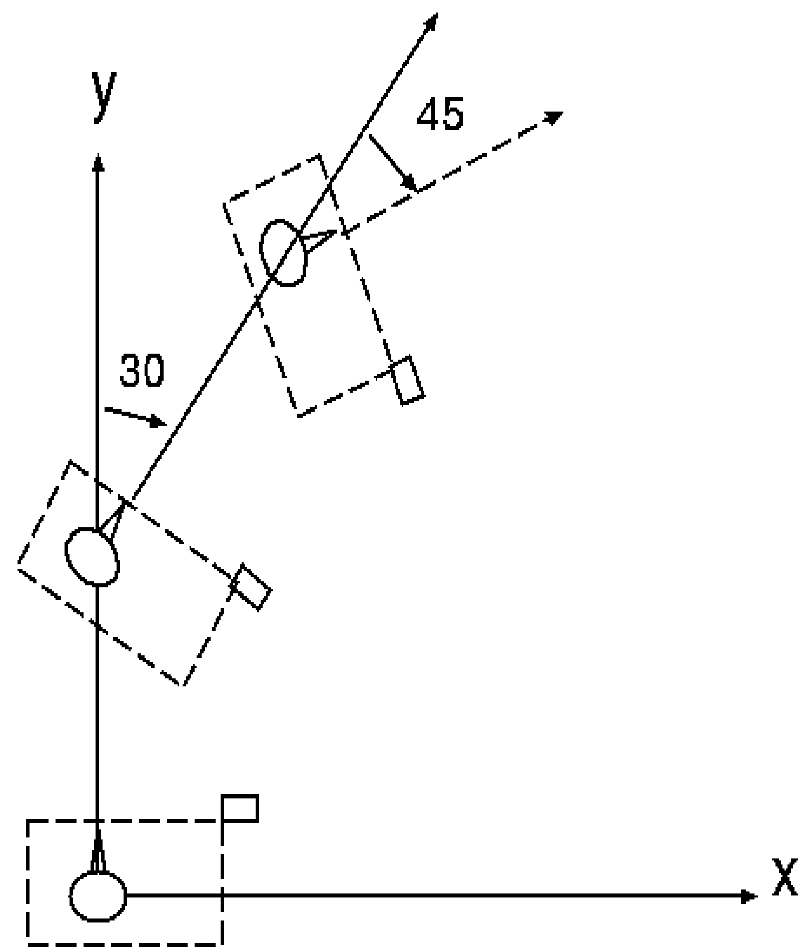
$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Soluție

Matricele pentru întoarcerea spre dreapta la 30 și la 45 grade (rotirea la -30 și la -45 grade în jurul originii)

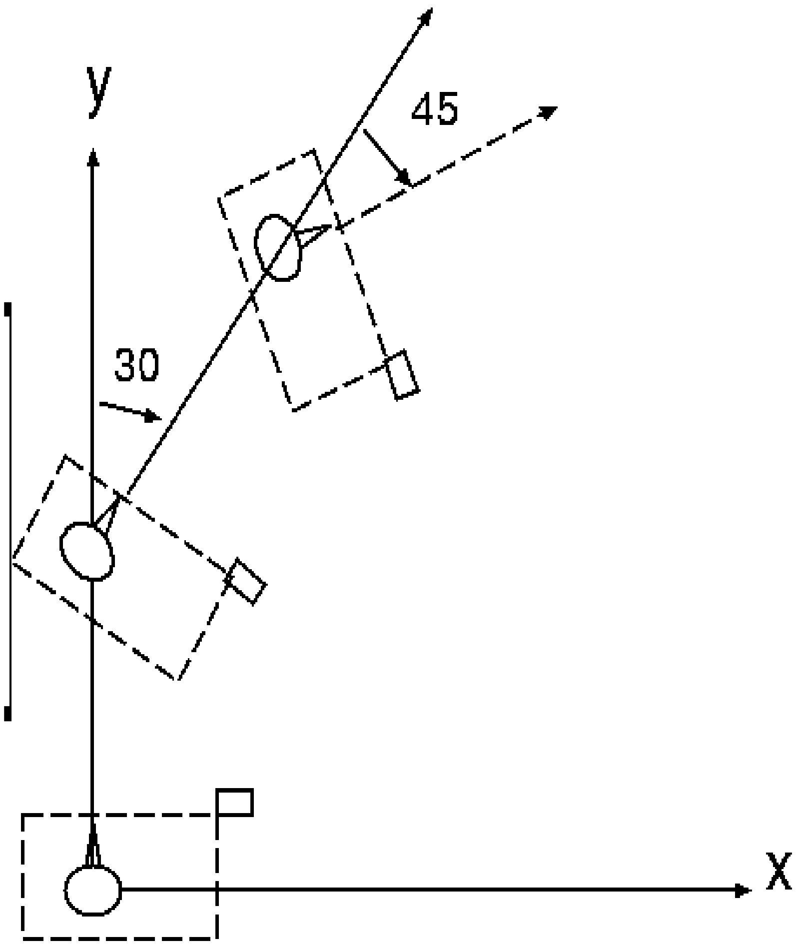
$$R_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Soluție

Matricea finală

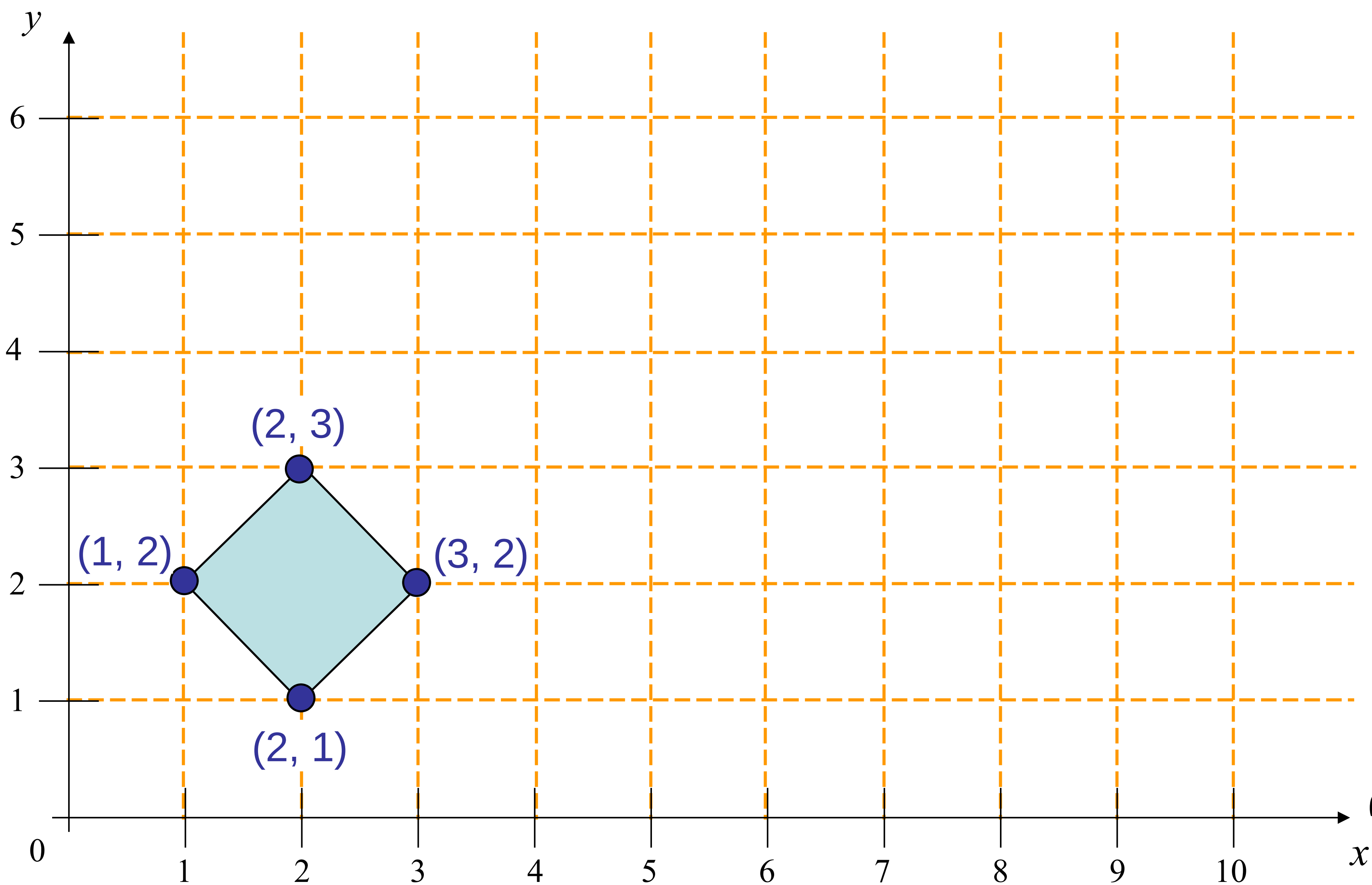
$$TR_1 TR_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$




Poziția finala a retrovizorului va fi (2.89331, 9.0214)

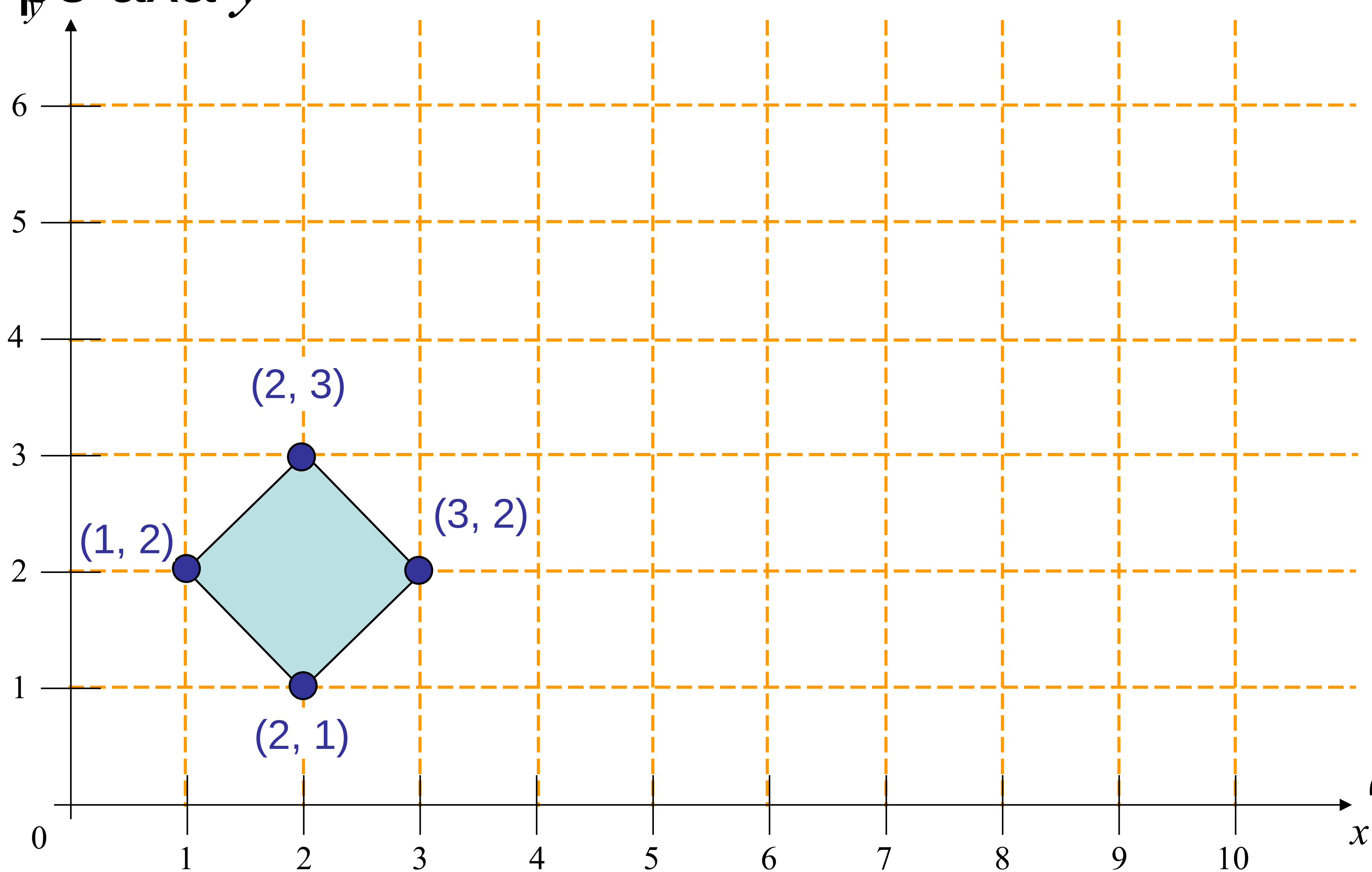
# Exercițiul 1

## Translati figura de mai jos cu coeficientii (7,2)



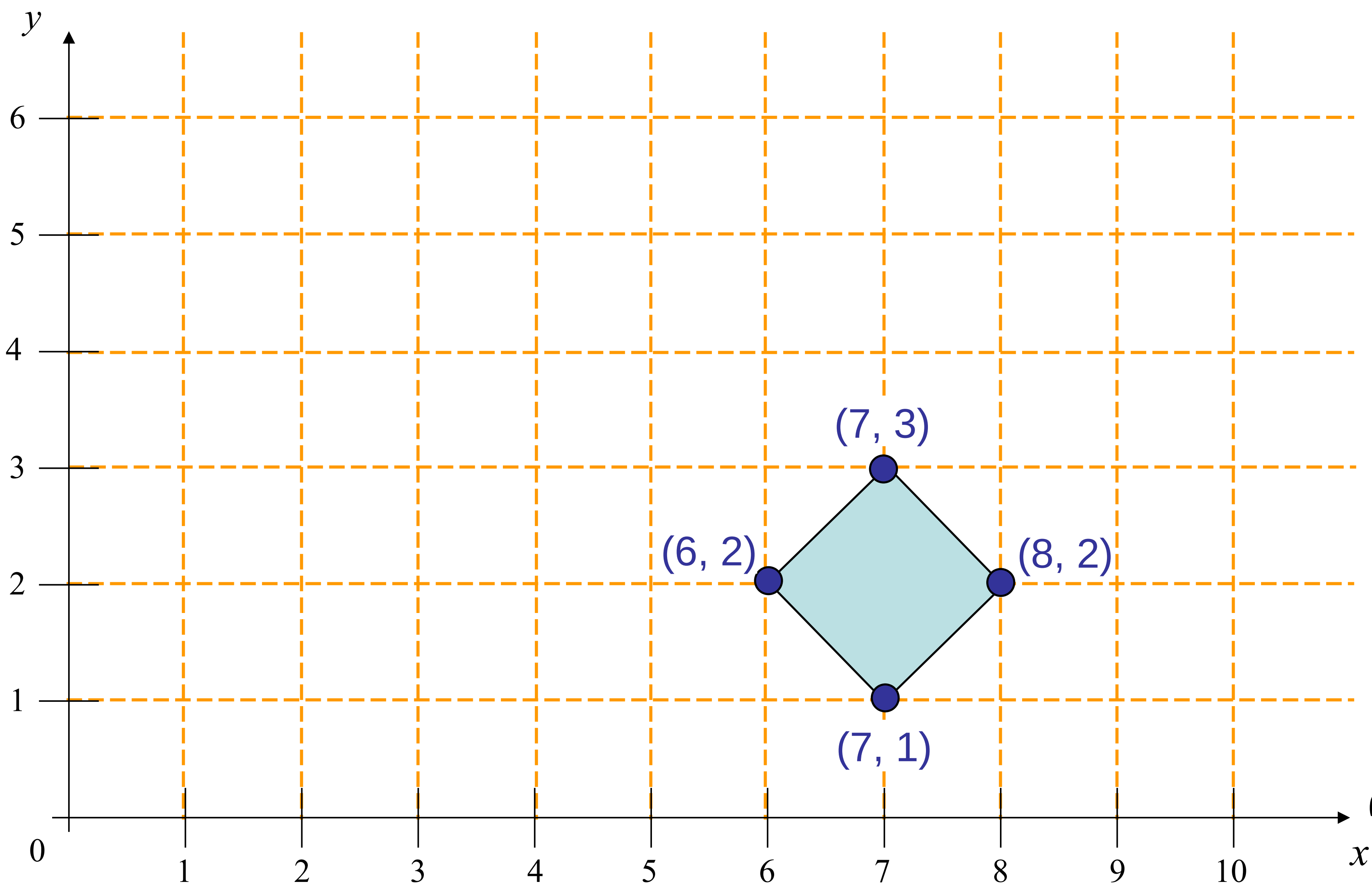
# Exercițiul 2

Scalati figura co coeficientul 3 pe axa $x$ si cu 2 pe axa $y$



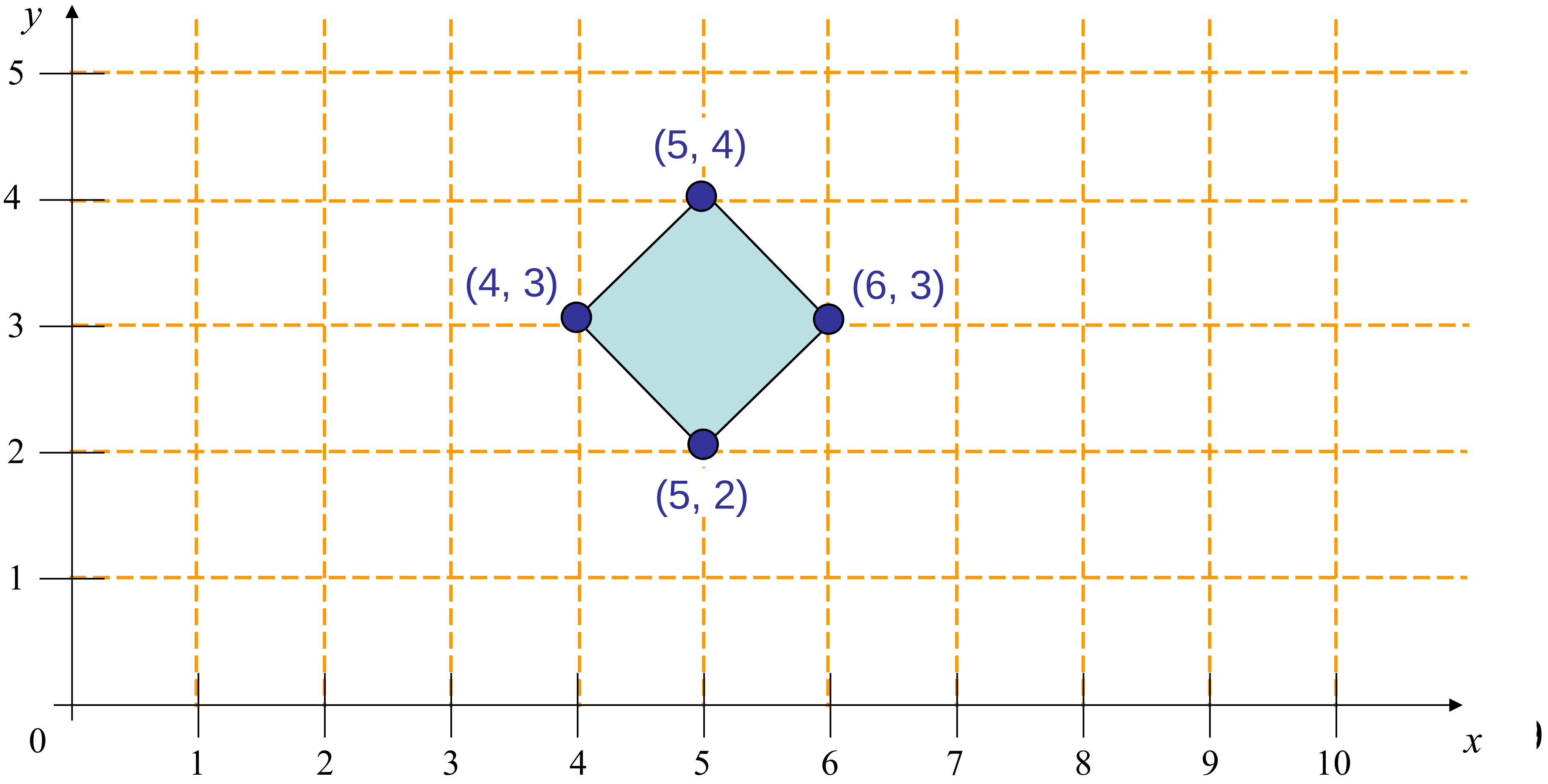
# Exercițiul 3

Rotiti figura cu 30° in jurul originii



# Exercițiul 5

Utilizand multiplicarea matricelor calculati rotatia figurii de mai jos cu 45 de grade in jurul punctului (5, 3)



# Exercițiul 4

Scrieti matricele omogene pentru cele trei transfofmari anterioare

Translatie Scalare Rotatie

$$\begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix}$$

Intrebari ?