Exemple de itemi pentru promovare EXAMEN ALGA

SUBIECTE OBLIGATORII PENTRU PROMOVARE

I

Ex.1. Să se calculeze aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$

$\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q},\ \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q},\ |\vec{p}| = 1,\ |\vec{q}| = 2,\ \left(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}\right) = \pi/6.$

Ex. 2. Fie piramida ABCD cu $A(2,3,-3)$, $B(-2,1,0)$, $C(2,-1,0)$, $D(1,\ 0,-3)$. Să se determine:

a) unghiul format de muchiile BC şi BD,
b) aria feţei ABC,
c) volumul piramidei,
d) ecuația feței ABC,
e)lungimea înălţimii duse din D pe faţa ABC,
f) ecuația drepeti suport a înălţimii duse din D pe planul ABC.

II

Ex. 3. Fie $A(2;1), B(-1;-1), C(3;2)$ vârfurile unui triunghi. Să se găsească:

1) lungimea laturii *BC*,
2) ecuația dreptei suport a laturii *AB*,
3) ecuația dreptei suport a medianei *CM*,
4) ecuația dreptei suport a înălțimii *BH*,
5) ecuația dreptei ce trece prin vârful *C* paralel laturii *AB*,
6) aria triunghiului *ABC*,
7) ecuația mediatoarei laturii *AB*,

Ex. 4. Fie dată dreapta $2x + 3y + 4 = 0$. Să se scrie ecuația dreptei, ce trece prin punctul $M_0(2;1)$: 1)paralel dreptei date; 2) perpendicular dreptei date.

Ex. 5. Să se scrie ecuațiile dreptelor, care trec prin punctul $A(2;5)$ și

a) au pantele 2; –4, respectiv;

b) formează cu axa *Ox* unghiuri de $30^{\circ}, 135^{\circ}$.

Ex. 6. Să se găsească:

a) Proiecția punctului $P(-6;4)$ pe dreapta $4x - 5y + 3 = 0$;

b) Simetricul punctului $P(-6;4)$ față de dreapta $4x - 5y + 3 = 0$.

Ex. 7. Fie dreptele $AB: 2x - y - 3 = 0, AC: x - 2y + 3 = 0, BC: 2x + 3y + 1 = 0$. Să se afle:

a) coordonatele vârfurilor triunghiului *ABC*;

b) coordonatele centrului de greutate al triunghiului.

III.

Ex. 8. Să se scrie ecuația planului ce trece prin punctul $M(3;-2;-7)$, paralel planului $2x - 2z + 5 = 0$.

Ex. 9. Să se scrie ecuația planului ce trece prin originea de coordonate, perpendicular planelor $2x - y + 3z - 1 = 0$ și $x + 2y + z = 0$.

Ex. 10. Să se scrie ecuația planului ce trece prin punctele $M_1(1;-1;-2)$ și $M_2(3;1;1)$, perpendicular planului $x-2y+3z-5=0$.

Ex. 11. Să se scrie ecuația planului, care trece prin:
a) punctul $M_2(1;-2;4)$, paralel planului *Oxz*;
b) axa *Oy* și punctul $M_4(0;-1;2)$.

Ex. 12. Să se scrie ecuația planului, care trece: prin punctele $M_1(7;2;-3)$ și $M_2(5;6;-4)$, paralel axei *Ox*.

Ex. 13. Să se scrie ecuațiile canonice și parametrice ale dreptei, care trece prin punctul $M(2;0;-3)$, paralel:
a) vectorului $\vec{a}=\{2;-3;5\}$;
b) dreptei $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$;
d) axei *Oy*;
f) dreptei $\begin{cases} x=3t-1, \\ y=-2t+3, \\ z=5t+2, \end{cases} t\in\mathbb{R}$.

Ex. 14. Prin punctele $M_1(-1;0;2)$ și $M_2(2;3;1)$ este dusă o dreaptă. Să se găsească punctele de intersecție ale dreptei cu planul de ecuație $x+y-2z+3=0$.

Ex. 15. Să se scrie ecuațiile canonice ale dreptei, ce trece prin punctul $M(2;3;-5)$, paralel dreptei $\begin{cases} 3x-y+2z+3=0 \\ x+3y-2z+3=0 \end{cases}$.

Ex. 16. Să se demonsteze paralelismul dreptelor: $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ și $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z+8=0 \end{cases}$.

Ex. 17. Să se demonstreze perpendicularitatea dreptelor:
$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ și $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}$;

Ex. 18. Fie dreapta *l*: $\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$ și punctul $P(4;1;6)$. Să se determine:

a) proiecția punctului *P* pe dreapta *l*,
b) simetricul punctului *P* față de dreapta *l*.

Ex. 19. Să se găsească simetricul punctului $P(1;3;-4)$ față de planul $3x+y-2z=0$.

IV

Ex. 20. Să se scrie ecuația cercului:

a) cu diametrul *AB*, unde *A*(7;8) și *B*(1;4);
b) cu centrul *O*(1;2) și care este tangent la dreapta $5x-12y+2=0$,
c) care trece prin punctele *A*(-3;0), *B*(0;4) și *O*(0,0).

Ex. 21. Să se scrie ecuația dreptei ce trece prin centrele cercurilor: $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$ și $x^2 + y^2 - 6y = 0$.

Ex. 22. Să se găsească punctele de intersecție a cercului $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ cu dreapta $x - 7y - 12 = 0$.

Ex. 23. Să se scrie ecuația elipsei cu focarele situate pe axa absciselor, simetrice față de originea sistemului de axe ortogonale, dacă:

a) axa mare este egală cu 26 și distanța dintre focare este egală cu 10;

b) distanța dintre focare este egală cu 12 și $\frac{c}{a} = \frac{3}{5}$;

c) elipsa trece prin punctele $(1; 2)$ și $(7; 1)$;

d) elipsa trece prin punctul $(-4; 1)$ și un focar este $(3; 0)$.

Ex. 24. Să se scrie ecuația hiperbolei, ale cărei focare sunt situate pe axa absciselor și sunt simetrice față de originea sistemului de axe ortogonale, dacă:

a) distanța dintre focare este egală cu 10 și axa $2a = 6$;

b) asimptotele hiperbolei au ecuațiile $y = \pm\frac{3}{4}x$ și distanța dintre focare este egală cu $10\sqrt{2}$.

c) vîrfurile și focarele hiperbolei coincide respectiv cu focarele și vîrfurile elipsei $5x^2 + 64y^2 = 320$.

Ex. 25. Să se scrie ecuația canonică a hiperbolei, care trece prin punctul de coordonate $(-9; 8)$ și are asimptotele $3y = \pm 2\sqrt{2}x$.

Ex. 27. Să se calculeze distanța de la focarele hiperbolei $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$ la asimptotele ei.

Ex.28. Să se scrie ecuațiile tangentelor la hiperbola $x^2 - 4y^2 = 20$ paralele cu dreapta $3x - 4y + 9 = 0$.

Ex. 29. Să se determine focarul și directoarea parabolei:

a) $y^2 = 8x$; b) $y^2 = -4x$; c) $x^2 = 4y$; d) $x^2 = -16y$; e) $y = -8x^2$.

Ex. 30. Să se scrie ecuația parabolei, care are vârful în origine, este simetrică față de axa absciselor și trece prin punctul: a) $A(9; 6)$; b) $A(-9; -3)$.

Ex. 31. Să se scrie ecuația parabolei, care are vîrful în origine, este simetrică față de axa ordonatelor și trece prin punctul: a) $A(-2; 1)$; b) $A(1; -4)$.

Ex. 32. Să se scrie ecuația tangentei la parabola $y^2 = 36x$ în punctul $H(1; 6)$.

Ex. 33. Să se scrie ecuația tangentei la parabola $y^2 = 8x$ paralelă cu dreapta $y = 2x - 3$.

Ex. 34. Să se scrie ecuația tangentei la parabola $y^2 = 16x$ perpendiculară dreptei $2x - y - 3 = 0$.

ITEMI SPECIALI ☺

S.1. Fie mulțimea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \quad 2x - y + z = 0\}$.

a) Arătați că U este subspațiu în $\mathbb{R}^3$.

b) Determinați o bază în U.

S.2. Fie mulțimea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + z = 0,\ x + y + 2z = 0\ \}$.

a) Arătați că U este subspațiu în $\mathbb{R}^3$.

b) Determinați o bază în U.

S.3. Fie mulțimea $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x + y + 2z = 0, \\ x + 4y + 5z = 0, \end{cases} \right\}$.

a) Arătați că U este subspațiu în $\mathbb{R}^3$.

b) Determinați o bază în U.

S.4. Fie mulțimea $U = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})\right\}$, unde $M_2(\mathbb{R})$ este mulțimea matricelor pătrate de ordinul 2 cu coeficienți reali.

a) Arătați că U este subspațiu în $M_2(\mathbb{R})$.

b) Determinați o bază în U.

S.5. Fie $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, unde $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (2, 1, -3)$, $e_3 = (-1, 1, 0)$ sunt vectori în $\mathbb{R}^3$.

a) Arătați că B formează bază în $\mathbb{R}^3$.

b) Construiți o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$, pornind de la B.

S.6. Fie mulțimea $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \quad x - y + z - t = 0\}$.

a) Arătați că U este subspațiu în $\mathbb{R}^4$.

b) Determinați o bază în U.

c) Determinați complementul ortogonal $U^{\perp}$ al lui U.

S.7. Fie mulțimea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \quad x - y - z = 0\}$.

a) Arătați că U este subspațiu în $\mathbb{R}^3$.

b) Determinați o bază în U.

c) Determinați complementul ortogonal $U^{\perp}$ al lui U.

d) Determinați o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$, diferită de cea canonică.