Определение и свойства тройного интеграла

► **Определение тройного интеграла.** Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в некоторой области U пространства. Разобьем U на n частей (ячеек), не имеющих общих внутренних точек; обозначим через $\lambda = \lambda(\mathcal{U}_n)$ *диаметр* полученного разбиения $\mathcal{U}_n$, т.е. максимальный из диаметров ячеек (диаметром области в пространстве называется диаметр минимального шара, содержащего эту область). Выберем в каждой из ячеек по произвольной «опорной» точке (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и составим *интегральную сумму* $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i$, где ΔV_i — объем i-й ячейки. Если существует конечный предел сумм s_n при $\lambda(\mathcal{U}_n) \to 0$ (не зависящий ни от вида разбиения $\mathcal{U}_n$, ни от выбора «опорных» точек), то он называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области U и обозначается

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\lambda \to 0} s_n .$$

▶ **Свойства тройного интеграла.** Свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

1. *Линейность.* Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ интегрируемы по области U, то

$$\iiint\limits_U \left[a f(x, y, z) \pm b g(x, y, z)\right] dx\,dy\,dz =$$
$$= a \iiint\limits_U f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \pm b \iiint\limits_U g(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

где a и b — некоторые числа.

2. *Аддитивность.* Если $f(x, y, z)$ интегрируема по каждой из областей U_1 и U_2, не имеющих общих внутренних точек, то

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{U_1} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{U_2} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

3. *Теорема об оценке.* Если в области U выполняются неравенства $m \leqslant f(x, y, z) \leqslant M$, то

$$mV \leqslant \iiint\limits_U f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \leqslant MV,$$

где V — объем области U.

4. *Теорема о среднем*. Если $f(x, y, z)$ непрерывна в области U, то найдется хотя бы одна внутренняя точка $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in U$ такая, что

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\, V.$$

Число $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ называется средним значением функции в области U.

5. *Интегрирование неравенств*. Если $\varphi(x, y, z) \leqslant f(x, y, z) \leqslant g(x, y, z)$ в области U, то

$$\iiint\limits_U \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \leqslant \iiint\limits_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \leqslant \iiint\limits_U g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

6. *Теорема о модуле интеграла*:

$$\left| \iiint\limits_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \right| \leqslant \iiint\limits_U \left| f(x, y, z) \right| dx\, dy\, dz.$$

Вычисление тройного интеграла. Некоторые приложения

- **Использование повторных интегралов.**

1. Рассмотрим тело U, ограниченное сверху поверхностью $z = g(x, y)$, а снизу — поверхностью $z = h(x, y)$, проекцией которого является область D на плоскости x, y. Другими словами, область U задается условиями $\{(x, y) \in D,\ h(x, y) \leqslant z \leqslant g(x, y)\}$. Тогда

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_D dx\, dy \int\limits_{h(x,y)}^{g(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

2. Если область D плоскости x, y описывается неравенствами $\{a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$, то

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{h(x,y)}^{g(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

▶ **Замена переменных в тройном интеграле.** Пусть непрерывно дифференцируемые функции $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ осуществляют взаимно однозначное отображение области Ω пространства u, v, w на область U пространства x, y, z, а функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области U. Тогда

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint\limits_\Omega f\big(x(u, v, w),\, y(u, v, w),\, z(u, v, w)\big)\, |J(u, v, w)|\, du\, dv\, dw,$$

где $J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$ — *якобиан* отображения Ω на U.

Для цилиндрических координат ρ, φ, z, связанных с декартовыми координатами формулами $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, якобиан $J = \rho$.

Для сферических координат ρ, φ, θ имеем $x = \rho\cos\varphi\,\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\,\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$, а якобиан $J = \rho^2\sin\theta$.

► Некоторые геометрические и физические приложения тройного интеграла.

1. *Объем области* U:

$$V = \iiint\limits_U dx\,dy\,dz.$$

2. *Масса тела переменной плотности* $\gamma = \gamma(x, y, z)$, занимающего область U:

$$m = \iiint\limits_U \gamma\,dx\,dy\,dz.$$

3. *Координаты центра тяжести тела*:

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_U x\gamma\,dx\,dy\,dz,\;\; y_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_U y\gamma\,dx\,dy\,dz,\;\; z_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_U z\gamma\,dx\,dy\,dz.$$

4. *Моменты инерции тела* относительно координатных осей:

$$I_x = \iiint\limits_U \rho_{yz}^2 \gamma\, dx\, dy\, dz, \quad I_y = \iiint\limits_U \rho_{xz}^2 \gamma\, dx\, dy\, dz, \quad I_z = \iiint\limits_U \rho_{xy}^2 \gamma\, dx\, dy\, dz,$$

где $\rho_{yz}^2 = y^2 + z^2$, $\rho_{xz}^2 = x^2 + z^2$, $\rho_{xy}^2 = x^2 + y^2$.

В случае однородного тела в формулах следует положить $\gamma = \mathrm{const}$.