Двойные интегралы

▶ **Определение и свойства двойного интеграла.** Пусть на плоскости задано ограниченное множество, которое можно поместить в некоторый круг минимального диаметра. Диаметр этого круга называется *диаметром множества*. Рассмотрим область D на плоскости x, y. Разобьем D на n непересекающихся частей (ячеек). Максимальный из диаметров ячеек называется *диаметром разбиения* и обозначается $\lambda = \lambda(\mathcal{D}_n)$ ($\mathcal{D}_n$ — разбиение области D на ячейки). Пусть в области D задана функция $z = f(x, y)$. Выберем в каждой ячейке по произвольной «опорной» точке (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и составим *интегральную сумму* $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i$, где ΔS_i — площадь i-й ячейки.

Если существует конечный предел сумм s_n при $\lambda \to 0$ и этот предел $\mathcal{J}$ не зависит ни от вида разбиений $\mathcal{D}_n$, ни от выбора «опорных» точек, то он обозначается $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ и называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\lambda \to 0} s_n.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех разбиений $\mathcal{D}_n$ таких, что $\lambda(\mathcal{D}_n) < \delta$, и любого выбора «опорных» точек будет выполняться неравенство $|s_n - \mathcal{J}| < \varepsilon$. (Если $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема по этой области, т.е. двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ существует.)

► Свойства двойного интеграла.

1. *Линейность*. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы по области D, то

$$\iint\limits_D [af(x, y) \pm bg(x, y)]\,dx\,dy = a\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \pm b\iint\limits_D g(x, y)\,dx\,dy,$$

где a и b — некоторые числа.

2. *Аддитивность*. Если $f(x, y)$ интегрируема по каждой из областей D_1 и D_2, не имеющих общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

3. *Теорема об оценке*. Если в области D выполняются неравенства $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$, то

$$mS \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \leqslant MS,$$

где S — площадь области D.

4. *Теорема о среднем*. Если $f(x,y)$ непрерывна в области D, то найдется хотя бы одна внутренняя точка $(\bar{x},\bar{y}) \in D$ такая, что

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\bar{x},\bar{y})\,S.$$

Число $f(\bar{x},\bar{y})$ называется средним значением функции в области D.

5. *Интегрирование неравенств*. Если $\varphi(x,y) \leqslant f(x,y) \leqslant g(x,y)$ в области D, то

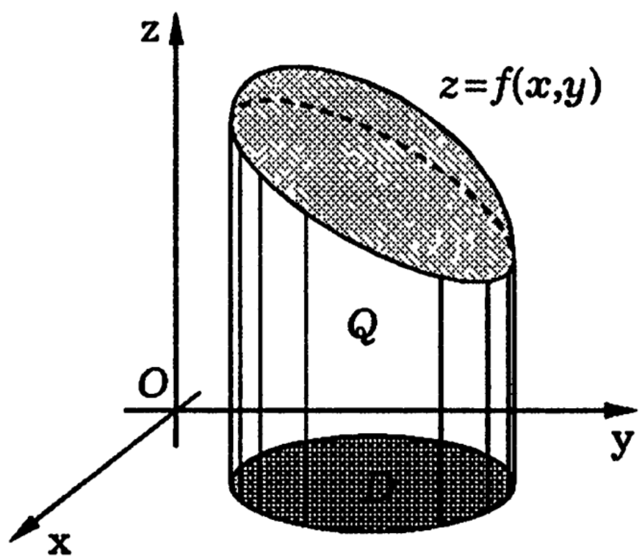
$$\iint\limits_D \varphi(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

В частности, если $f(x,y) \geqslant 0$ в D, то $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \geqslant 0$.

6. *Теорема о модуле интеграла*:

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant \iint\limits_D \left|f(x,y)\right|dx\,dy.$$

▶ **Геометрический смысл двойного интеграла.** Пусть функция $f(x,y)$ неотрицательна при $(x,y) \in D$. Тогда двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ равен объему цилиндрического тела, основанием которого служит область D плоскости $z = 0$ и которое сверху ограничено поверхностью $z = f(x,y)$.



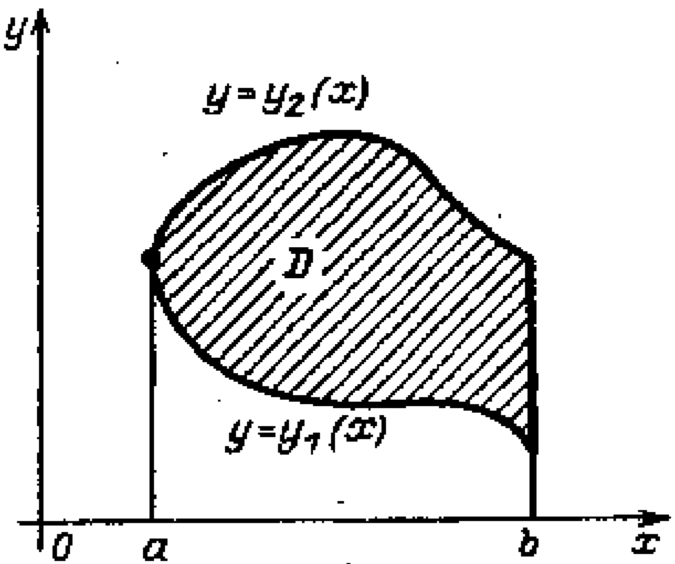
Вычисление двойного интеграла

► **Использование повторных интегралов.**

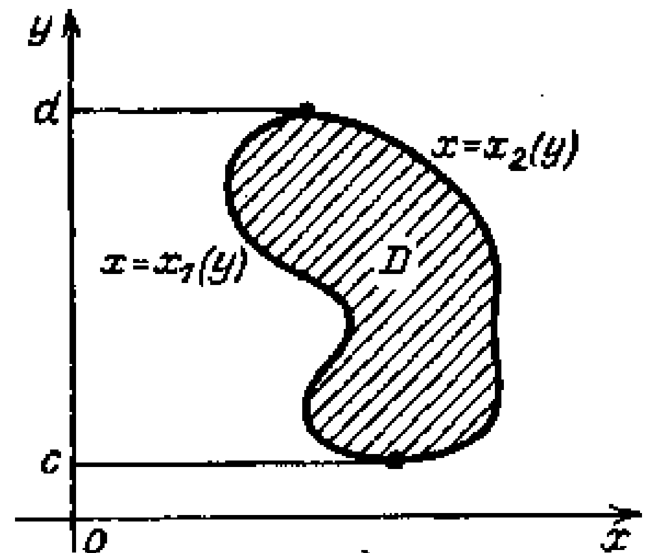
1. **Если** область D на плоскости x, y задается неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$ (рис. a), то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Интеграл в правой части этой формулы называется *повторным*.



а)



б)

2. Если $D = \{c \leqslant y \leqslant d,\ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)\}$ (рис. *б*), то

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx.$$

В общем случае область D разбивают на области указанных типов с последующим использованием свойства аддитивности двойного интеграла.

Пример 1. Вычислим двойной интеграл от функции

$f(x,y) = 1/(x+y)^3$ по замкнутой области

$$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2\colon x \in [2, 3],\ y \in [1, 2]\}.$$

$$\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^3} = \int\limits_2^3 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^3}.$$

Сначала вычисляем внутренний интеграл:

$$\int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^3} = -\frac{1/2}{(x+y)^2}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2}\right).$$

Затем следует вычисление внешнего интеграла. В результате

$$\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^3} = \frac{1}{2}\int\limits_2^3 \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right)\Bigg|_2^3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{60}.$$

Пример 2 Вычислим двойной интеграл от функции $f(x,y) = x/(1+x^2+y^2)^{3/2}$ по области интегрирования

$$D = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2\colon x \in [0,2],\ y \in [1,2]\right\}$$

$$\iint\limits_D \frac{x\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^2 \frac{x\,dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} =$$

$$= -\int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Bigg|_0^2 dy = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{5+y^2}}\right) dy =$$

$$= \ln\left|\frac{y+\sqrt{1+y^2}}{y+\sqrt{5+y^2}}\right|\Bigg|_1^2 = \ln\frac{2+\sqrt{5}}{5} - \ln\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{6}} =$$

$$= \ln\frac{(2+\sqrt{5})(1+\sqrt{6})}{5(1+\sqrt{2})}.$$

Пример 3 Вычислим двойной интеграл от функции $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-y^2}}$ по прямоугольнику $D = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2\colon x \in [1,3],\ y \in [0, \sqrt{2}/2]\right\}$

имеем

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{\sqrt{1-y^2}}\,dx\,dy = \int\limits_1^3 x^2 dx \int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3 \cdot \arcsin y\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{26}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{13}{6}\pi. \quad \#$$

▶ **Замена переменных в двойном интеграле.** Пусть непрерывно дифференцируемые функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ взаимно однозначно отображают область D_1 плоскости u, v на область D плоскости x, y, а функция $f(x, y)$ непрерывна в D. Тогда

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D_1} f\big(x(u, v),\, y(u, v)\big)\,|J(u, v)|\, du\, dv,$$

где $J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ — *якобиан* отображения D_1 на D.

Для отображения $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ (которое часто используется и соответствует переходу от декартовых координат x, y к полярным координатам ρ, φ) якобиан $J(\rho, \varphi) = \rho$.

Геометрические и физические приложения двойного интеграла

- **Геометрические приложения двойного интеграла.**

1. *Площадь области D на плоскости x, y:*

$$S = \iint\limits_D dx\,dy.$$

2. *Площадь поверхности, заданной уравнением $z = f(x,y)$* для $(x,y) \in D$ (рассматриваемая поверхность проектируется в область D на плоскости x, y), находится по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\,dx\,dy.$$

3. *Вычисление объемов.* Если область U трехмерного пространства задается условиями $\{(x,y) \in D,\ f(x,y) \leqslant z \leqslant g(x,y)\}$ (D — некоторая область на плоскости x, y), то ее объем равен

$$V = \iint\limits_D \left[g(x,y) - f(x,y)\right] dx\,dy.$$

▶ **Физические приложения двойного интеграла.** Далее считаем, что плоская пластина занимает область D плоскости x, y, а $\gamma(x,y)$ — поверхностная плотность материала пластины (для однородной пластины $\gamma = \text{const}$).

1. *Масса плоской пластины*:

$$m = \iint\limits_D \gamma(x,y)\,dx\,dy.$$

2. *Координаты центра тяжести плоской пластины*:

$$x_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\gamma(x,y)\,dx\,dy, \quad y_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\gamma(x,y)\,dx\,dy,$$

где m — масса пластины.

3. *Моменты инерции плоской пластины* относительно координатных осей:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\gamma(x,y)\,dx\,dy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2\gamma(x,y)\,dx\,dy.$$

Момент инерции пластины относительно начала координат вычисляется по формуле $I_0 = I_x + I_y$.