UNIVERSITATEA TEHNICĂ
A MOLDOVEI

Функции многих переменных

С помощью функций одной переменной можно описать очень малую часть зависимостей, существующих в природе. Основная часть процессов, происходящих в природе описывается более сложными зависимостями.

Например: 1) Формула Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Здесь T – период свободных колебаний в колебательном контуре, является функцией двух переменных: L – индуктивности катушки и C – емкости конденсатора.

2) Формула $V = \pi R^2 h$, выражающая объем цилиндра, является функцией 2 переменных: R – радиуса основания цил. и h – его высоты.

3) Закон Ома для полной цепи: $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R+r}$.
Здесь I – сила тока, функция трех переменных.
$\mathcal{E}$ – ЭДС, R – внешнее сопротивление,
r – внутреннее сопротивление.

Можно привести еще много примеров из других областей естествознания.
Поэтому возникает необходимость расширить понятие функции и ввести понятие функции нескольких переменных.

Определения:

- Множество называется *ограниченным* в $\mathbb{R}^2$, если существует круг, содержащий это множество.

- Точка M_0 называется *внутренней* точкой множества, если существует круг $U(M_0;\varepsilon)$ (круг с центром в точке M_0, радиуса ε), содержащийся в этом множестве.

- Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние.

- Множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить кусочно-гладкой кривой, лежащей целиком в этом множестве.

- Связное открытое множество называется *областью*.
- Точка M_0 называется *предельной точкой множества* A, если существует последовательность точек M_k, $k = 1, 2, ...$, такая, что $M_k \neq M_0$, $M_k \to M_0$ при $k \to \infty$.
- Если к множеству A добавить все его предельные точки, то полученное множество называется *замыканием* множества A и обозначается $\bar{A}$; ясно, что $A \subset \bar{A}$.
- Если множество совпадает со своим замыканием, то оно называется *замкнутым*.

• Рассмотрим множество $D \subseteq \mathbb{R}^2$ упорядоченных пар чисел (x, y). Если по некоторому закону f каждой паре $(x, y) \in D$ приведено в соответствие число z, то говорят, что на множестве D определена *функция* $z = f(x, y)$ *от двух переменных* x *и* y.

• Множество $D = D(f)$ называется *областью определения функции* $z = f(x, y)$.

Примеры: 1) Для $z = 2x - y$, $D(f) = \mathbb{R}^2$.

2) Для $z = \sqrt{2x - y}$, $D(f) = \{(x, y) |\, 2x - y \geq 0\}$.

3) Для $z = \ln(xy)$, $D(f) = \{(x, y) |\, xy > 0\}$.

Определение. *Графиком функции* $z = f(x, y)$ называется множество

$$G_f = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D(f)\}.$$

Примеры: 1) Графиком функции $z = x - 3y + 5$ является плоскость $x - 3y - z + 5 = 0$.

2) Графиком функции $z = xy$, является поверхность, называемая *гиперболическим параболоидом.*

3) Графиком функции $z = 2x^2 + 3y^2$, является поверхность, называемая *эллиптическим параболоидом.*

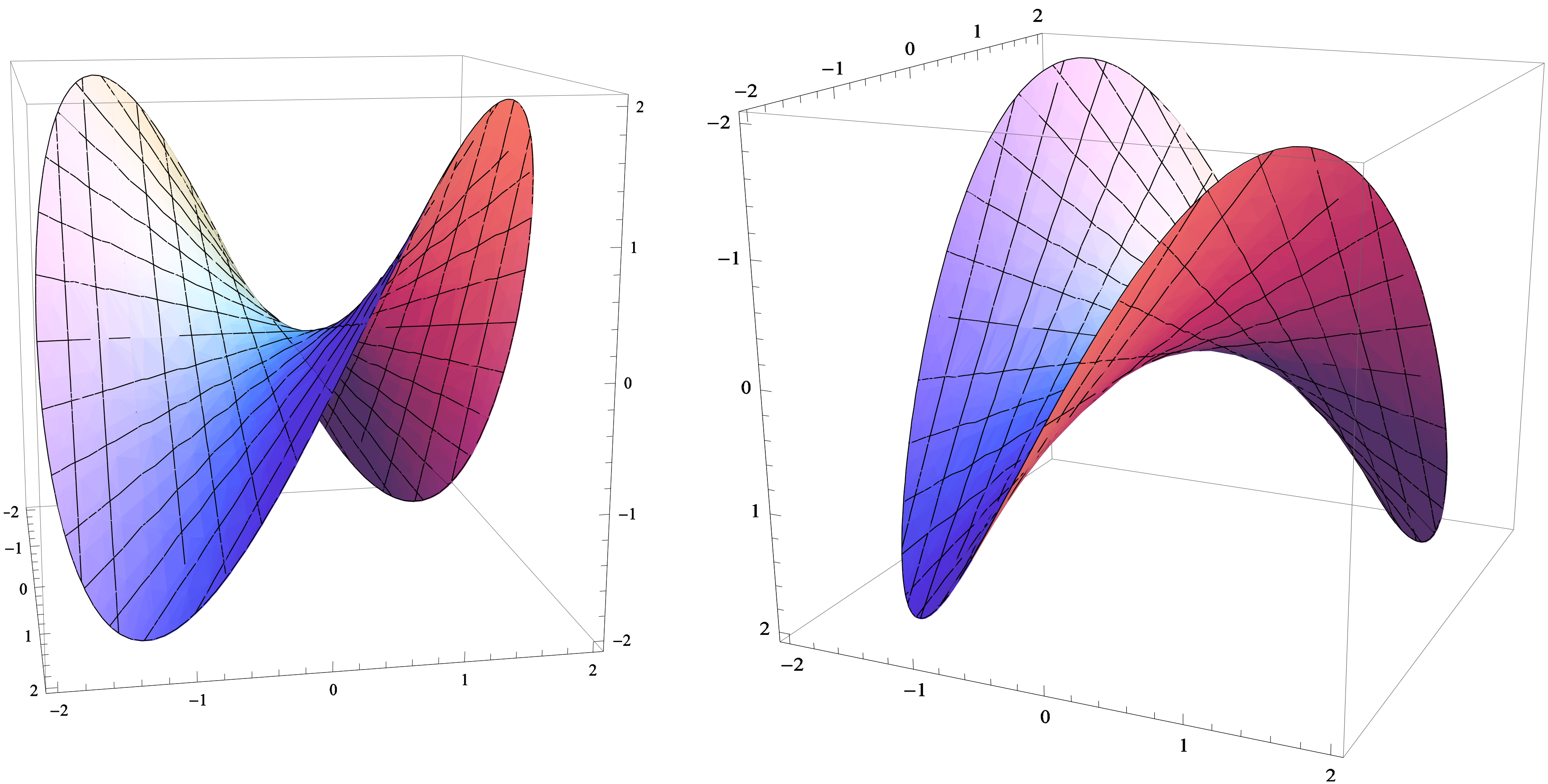
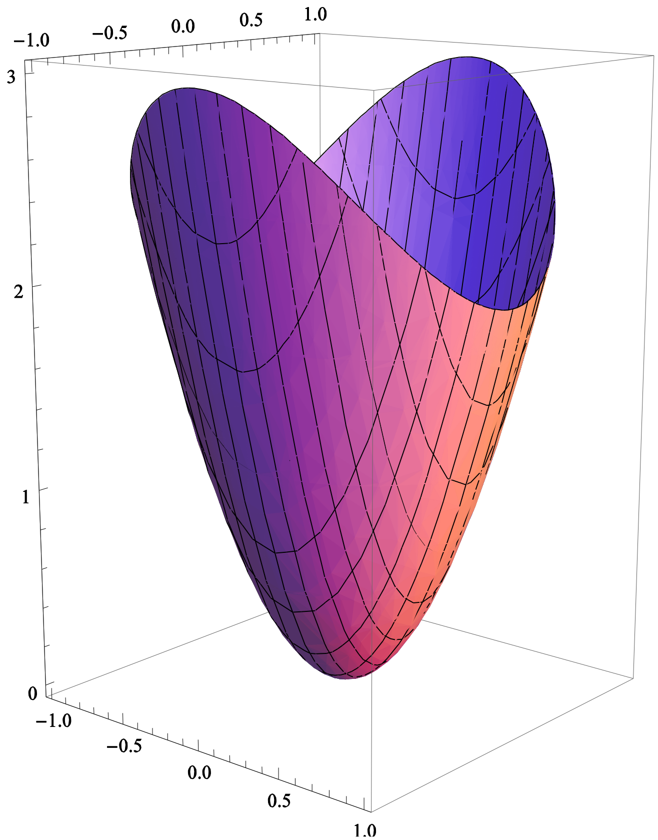


График функции $z = xy$ (седло)



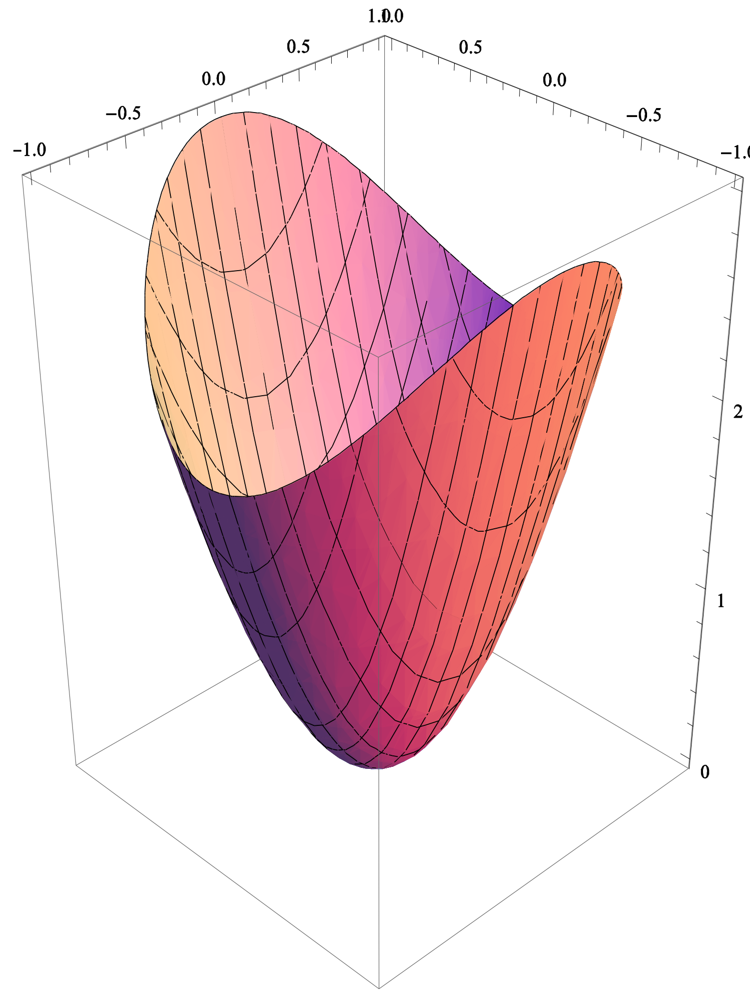


График функции z= 2x^2+3y^2

Существует еще один способ изображения функций двух переменных, основанный на сечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями $z = C$, где C – любое число, т.е. плоскостями, параллельными плоскости Oxy. Этот метод называется *методом линий уровня*.

Линией уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек плоскости Oxy, для которых данная функция принимает постоянное значение $f(x, y) = C$. Линия уровня принадлежит области определения функции.

По расположению линий уровня можно получить представление о графике функции.

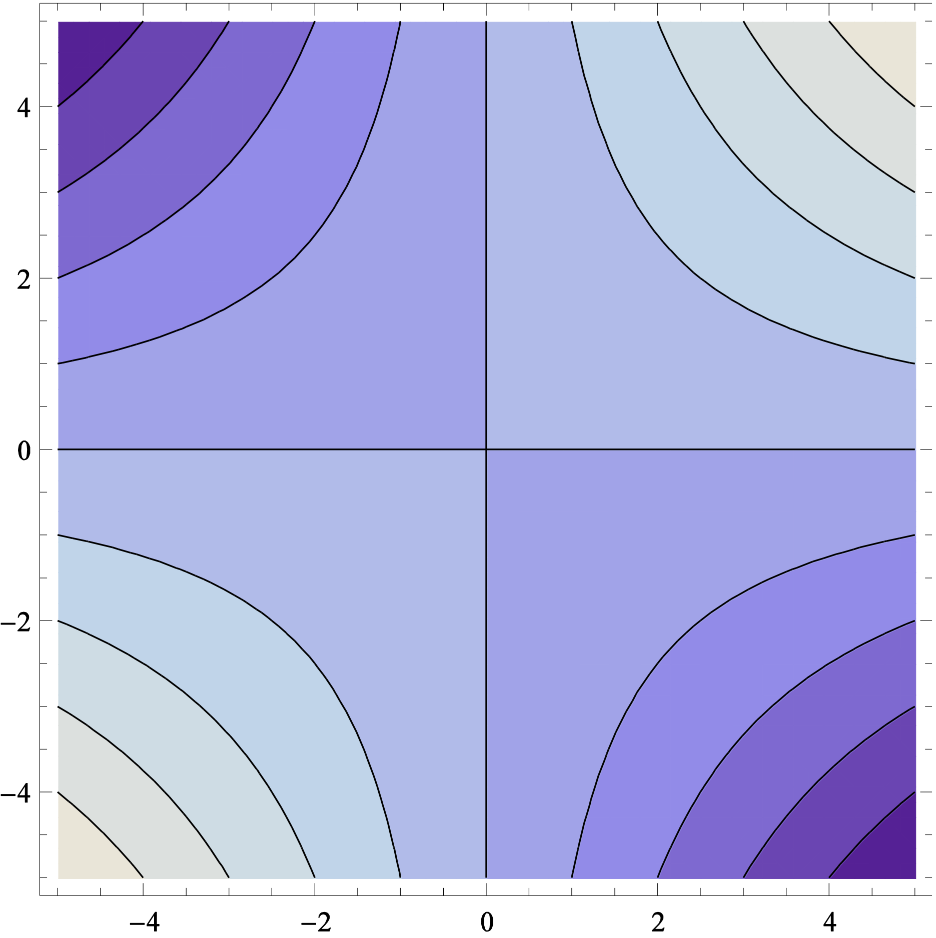
Линии уровня имеют широкие приложения.
В картографии линиями уровня называют линии, на которых высота точек земной поверхности над уровнем моря одинакова. Также по ним можно судить о характере рельефа данной местности.
В метеорологии изотерма – линия одинаковых температур.

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называется поверхность $f(x, y, z) = C$, в точках которой функция принимает одно и то же значение $u = C$.

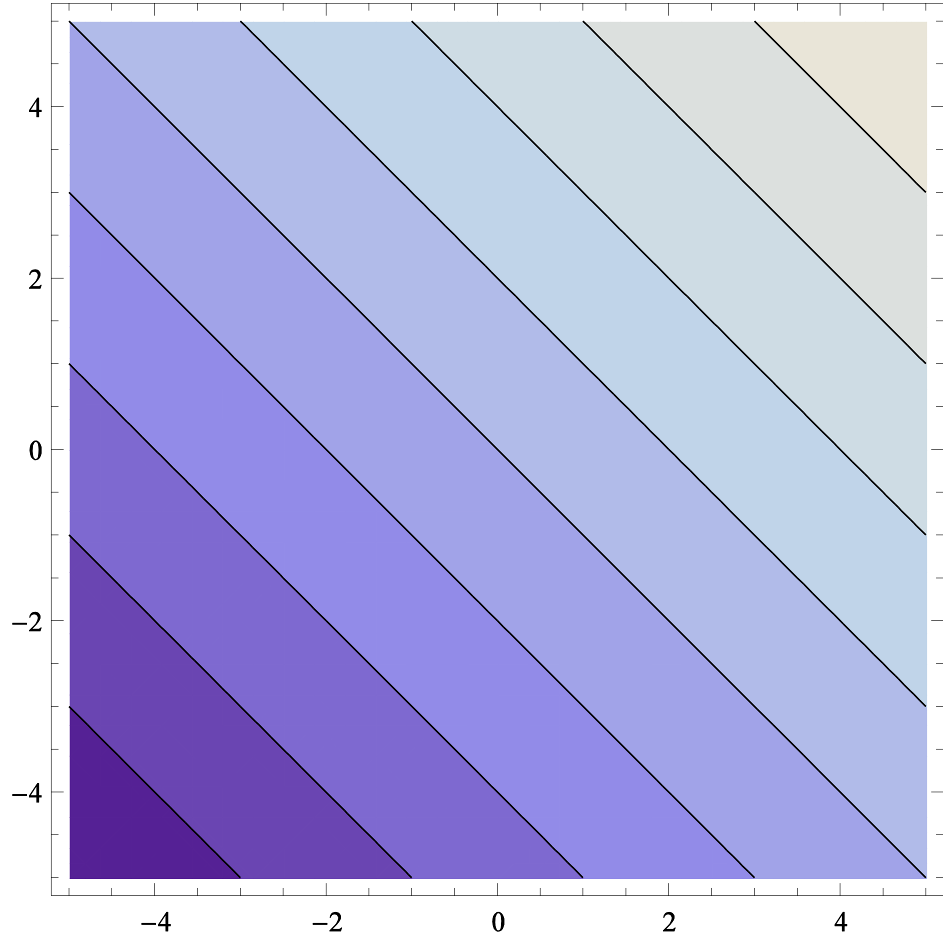
Примеры: 1) Функция $z = x^2 + y^2$ определена при всех (x, y), т.е. во всей плоскости Oxy. Графиком функции $z = x^2 + y^2$ является параболоид вращения. Ее линии уровня являются окружностями $x^2 + y^2 = C^2$;

2) Функция $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$ определена внутри круга $x^2 + y^2 < 1$. Ее линии уровня – тоже окружности $x^2 + y^2 = C^2$ $(|C| < 1)$;

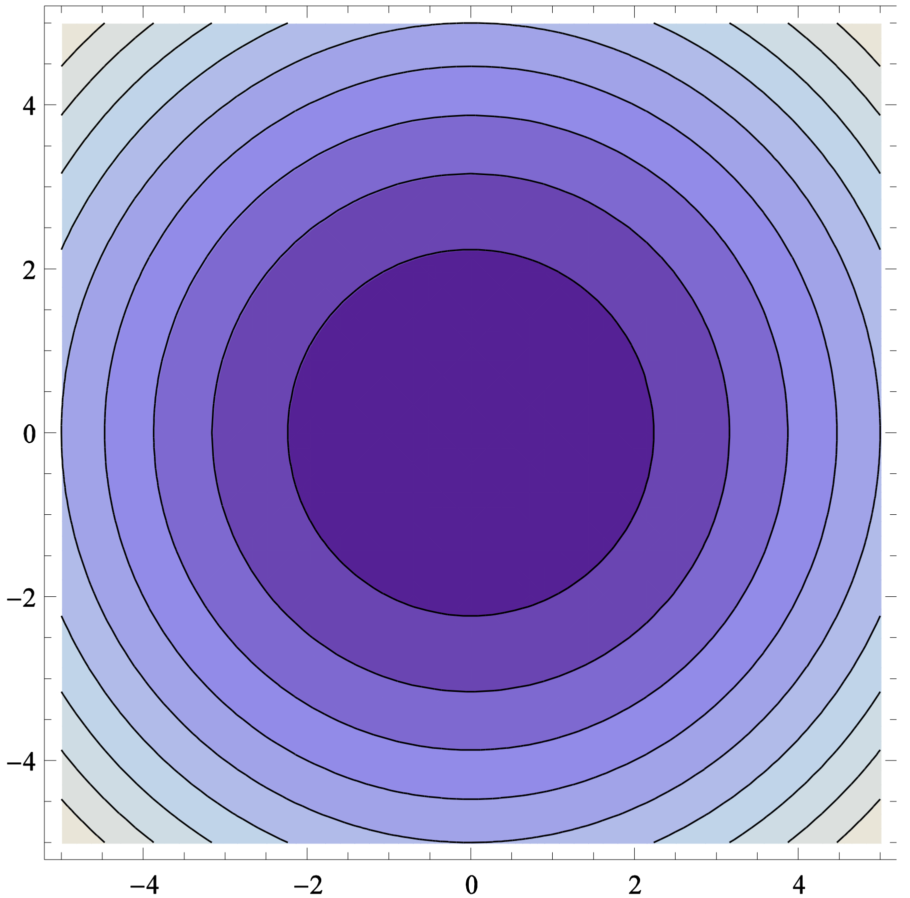
3) $z = xy$; 4) $z = x + y$; 5) $z = x^2 - y$.

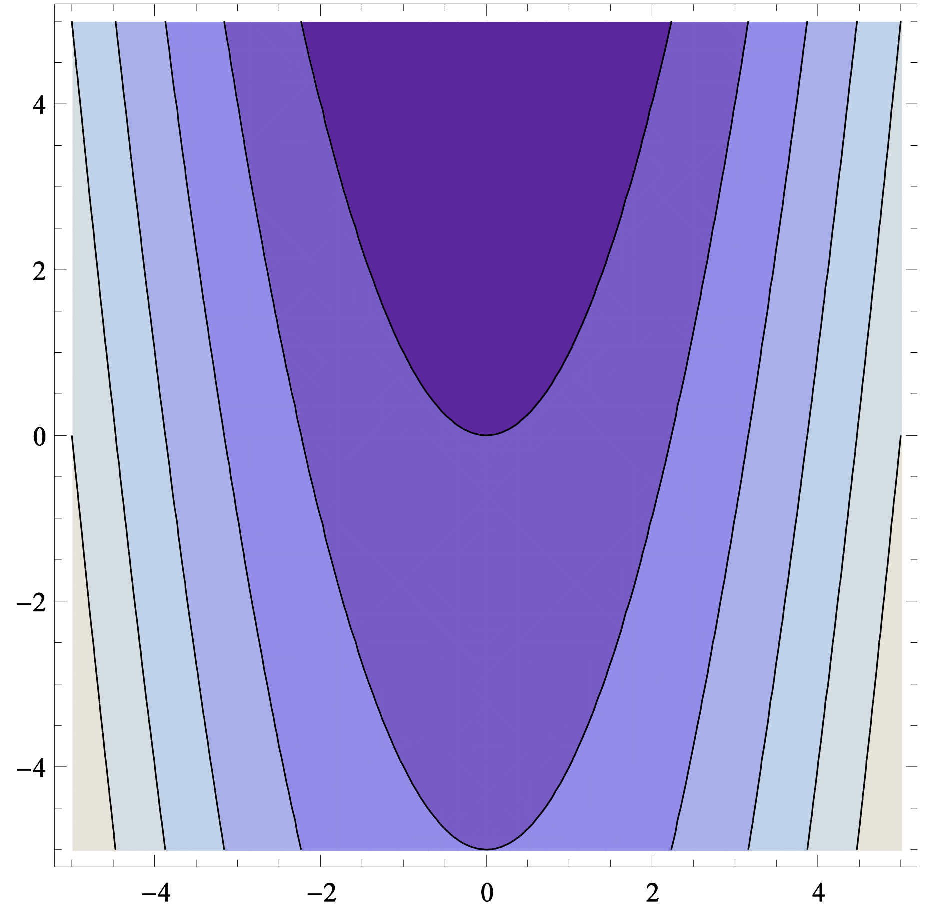


Линии уровня функции z= xy



Линии уровня функции z= x+y





Линии уровня функции $z = x^2 + y^2$

Линии уровня функции $z = x^2 - y$

Аналогично определяются функции n – переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ или $u = f(M)$, где M элемент пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. $M \in D = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | \, x_i \in \mathbb{R}\}$.

Предел и непрерывность функций нескольких переменных.

Определение. *Число A называется* **пределом функции** $z = f(x, y)$ **в точке** $M_0(x_0; y_0)$, *если для любого $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек $M(x; y)$, отстоящих от M_0 на расстоянии меньше δ, выполняется неравенство* $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Обозначения:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A; \qquad \lim_{M\to M_0} f(M) = A.$$

Определение. *Говорят, что* **предел функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$, равен $+\infty$ $(-\infty)$**, *если для любого $N > 0$ $\exists\ \delta = \delta(N) > 0$ такое, что для всех точек $M(x;y)$, отстоящих от M_0 на расстоянии меньше δ, выполняется неравенство $f(x,y) > N$ $(f(x,y) < -N)$.*

Заметим, что если предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ существует, то он не должен зависеть от пути, по которому точка M стремится к точке M_0.

Свойства пределов функций одной переменной сохраняются и для функций многих переменных, т.е. если функции $f(M)$ и $g(M)$ имеют в точке M_0 конечные пределы, то

$$1)\ \lim_{M\to M_0} C\cdot f(M) = C\cdot \lim_{M\to M_0} f(M);$$

$$2)\ \lim_{M\to M_0} (f(M)\pm g(M)) = \lim_{M\to M_0} f(M) \pm \lim_{M\to M_0} g(M);$$

$$3)\ \lim_{M\to M_0} f(M)\cdot g(M) = \lim_{M\to M_0} f(M)\cdot \lim_{M\to M_0} g(M);$$

$$4)\ \lim_{M\to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \lim_{M\to M_0} f(M) / \lim_{M\to M_0} g(M),$$

$$\text{если } \lim_{M\to M_0} g(M)\neq 0;$$

Примеры: 1) Вычислить предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

2) Вычислить предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\ln\left(1 - x^2 - y^2\right)}.$$

Определения:

- Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0; y_0) \in D(f)$, если

$$f(x_0, y_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y).$$

- Точки в которых не выполняются условия непрерывности, называются *точками разрыва*.
- Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной* в этой области.

Свойства непрерывных функций:

- Сумма, разность, произведение и частное двух непрерывных функций в области D является непрерывной функцией;
- Функция, непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$, ограничена в этой области и достигает в ней своих наибольшего и наименьшего значений.
- Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области D. Если в точках M_1 и M_2 из области D, имеем $f(M_1) \cdot f(M_2) < 0$, то существует точка $M_0 \in D$, такая, что $f(M_0) = 0$.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

Задачи: I. Найти область определения следующих функций.

$$a)\ z = \frac{2}{x} + \frac{3}{y}; \qquad b)\ z = \arcsin\frac{y-1}{x};$$

$$c)\ z = \ln(y^2 - 2x + 4); \qquad d)\ z = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

II. Начертить семейство линий уровня каждой из следующих функций.

$$a)\ z = \frac{x^2}{4} + y^2; \qquad b)\ z = \ln(x - y^2);$$

$$c)\ z = x\sqrt{y-1};$$

III. Вычислить пределы.

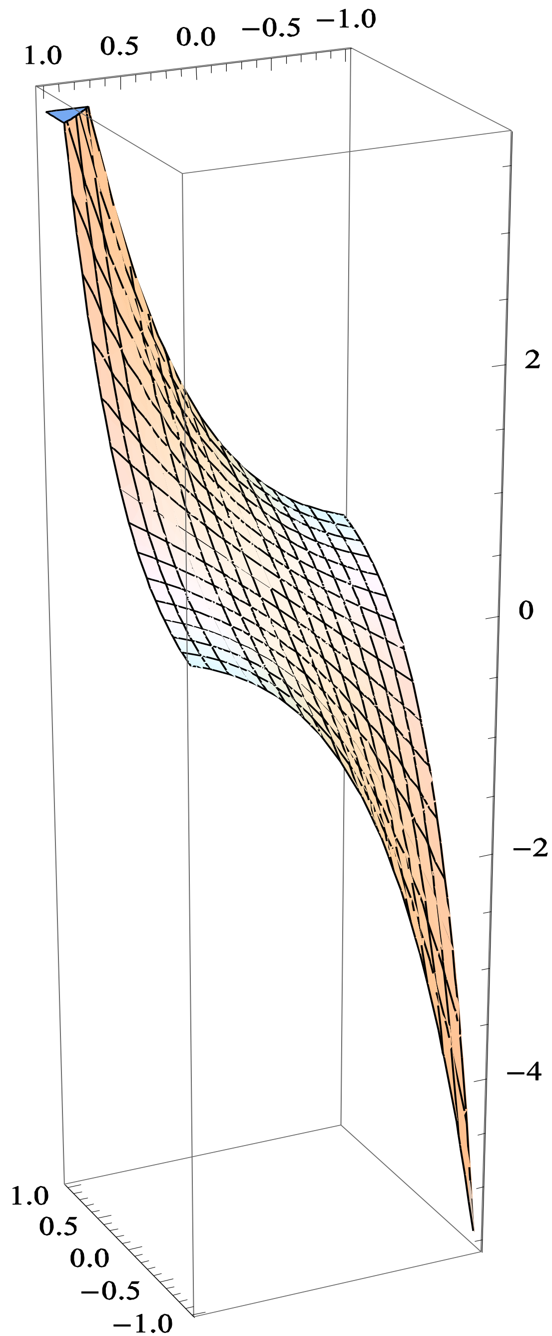
$$a)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}; \qquad b)\ \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y};$$

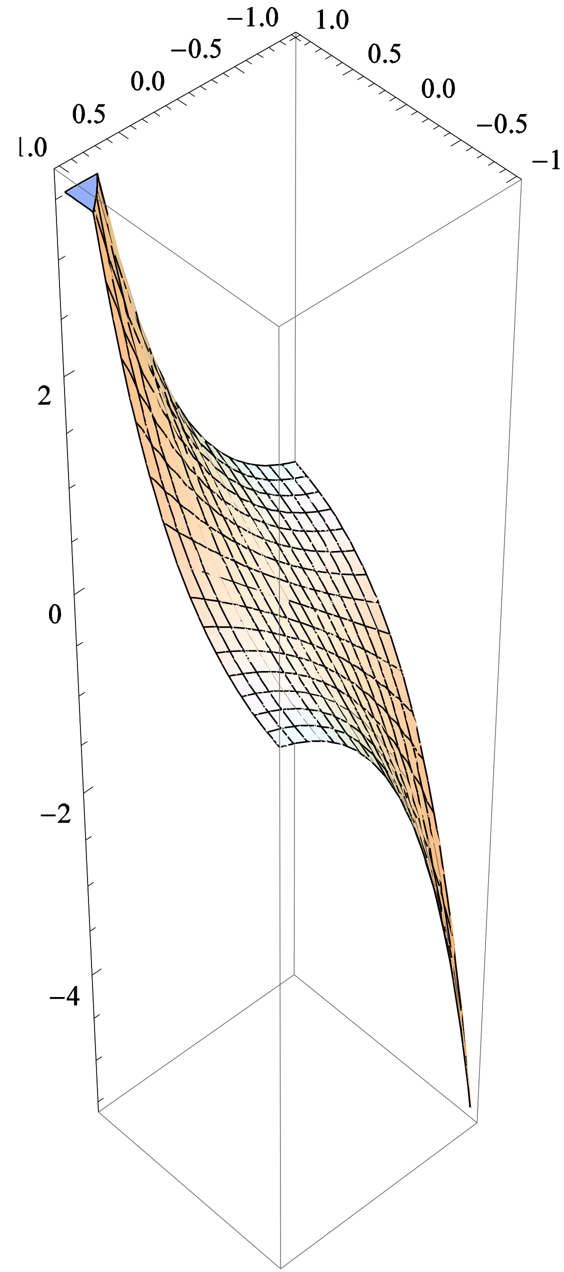
$$c)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}.$$

IV. Найти наибольшее и наименьшее значения функции.

$$a)\ z=(x+y)e^{xy} \text{ при } 0\le x+y\le 1;$$

$b)\ z=|x+y|-\sqrt{1-x^2-y^2}$ в ее области непрерывности.


1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
2
0
−2
−4
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0


−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
2
0
−2
−4