LINII DE ORDINUL DOI: CONICE

O **conică** este o curbă, care se obţine la intersecţia unei suprafeţe conice circular drepte cu un plan.

În cazul când această curbă este închisă, linia de intersecţie este o **elipsă**. În partilular, dacă planul este perpendicular axei conului, linia de intersecție este un **cerc**.

În cazul când linia de intersecţie nu este o curbă închisă, vom obţine: o **hiperbolă**, dacă planul nu este paralel cu o careva generatoare a conului, sau o **parabolă**, dacă planul este paralel cu o generatoare a conului. Vom studia acestor patru linii şi vom deduce ecuaţiile lor.

Considerăm în plan un sistem rectangular de coordonate OXY.

CERCUL

Definiţie. Mulţimea punctelor planului, egal depărtate de un punct dat M_0 din plan, se numeşte **cerc**.

Fie $M_0(x_0, y_0)$, şi r un număr real pozitiv. Cercul C de centru M_0 şi rază r reprezintă mulţimea punctelor $M(x,y)$ ale planului astfel încât $|M_0M| = r$. Deoarce $|M_0M| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ obţinem $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ - **(1.6.1)** – **ecuaţia canonică a cercului** (sau **ecuaţia carteziană implicită a cercului**). Deci, $C = \left\{ M(x,y) \middle| (x,y) \in R^2,\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2 \right\}$. Se mai scrie $C: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$.

Ecuaţia cercului cu centrul în originea coordonatelor este $x^2+y^2=r^2$.

Ecuaţia **(1.6.1)** mai poate fi scrisă sub forma $x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-r^2=0$. Apare întrebarea dacă o ecuaţie de forma $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ reprezintă totdeauna un cerc.

Fie mulţimea $\Gamma: x^2+y^2+2ax+2by+c=0$. Deoarece ecuaţia $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ poate fi scrisă sub forma: $(x+a)^2+(y+b)^2 = a^2+b^2-c$, distingem cazurile:

1. $a^2+b^2-c>0$, atunci Γ este un cerc cu centrul în punctul $(-a,-b)$ şi raza $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$;
2. $a^2+b^2-c=0$, atunci $\Gamma = \{-a,-b\}$;
3. $a^2+b^2-c<0$, atunci $\Gamma = \varnothing$.

Ecuaţia $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ cu $a^2+b^2-c>0$ **(1.6.2)** se numeşte **ecuaţia generală a cercului.**

Din ecuaţia **(1.6.1)** rezultă $\left[\begin{array}{l} y = y_0 + \sqrt{R^2-(x-x_0)^2} \\ y = y_0 - \sqrt{R^2-(x-x_0)^2} \end{array}\right.$ **(1.6.1)** –**ecuaţii explicite ale cercului.**

Un cerc C separă planul în două mulţimi disjuncte- *interiorul* lui C notat cu $Int\,C$ şi *exteriorul* lui C notat cu $Ext\,C$: $Int\,C = \left\{ M(x,y) \middle| x^2+y^2+2ax+2by+c<0 \right\}$ şi $Ext\,C = \left\{ M(x,y) \middle| x^2+y^2+2ax+2by+c>0 \right\}$.

LINII DE ORDINUL DOI: CONICE

Fie dreapta $l: Ax+By+C=0$ și cercul $C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$. Poziția dreptei l față de cercul C poate fi determinată de distanța $d(M_0,l)=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ de la centrul M_0 al cercului la dreapta *l*.

1. Dacă $d(M_0,l)<r$, atunci dreapta este secantă cercului (are două puncte comune cu cercul);
2. Dacă $d(M_0,l)=r$, atunci dreapta este tangentă cercului;
3. Dacă $d(M_0,l)>r$, atunci dreapta și cercul nu au puncte comune.

Punctele de intersecție ale dreptei cu cercul (dacă există) sunt soluții ale sistemului .

$$\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2,\\ Ax+By+C=0.\end{cases}$$

Fie cercul $C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ și $M_1(x_1,y_1)\in C$. Atunci ecuația de gradul întâi $(x_1-x_0)(x-x_0)+(y_1-y_0)(y-y_0)=r^2$ reprezintă **tangenta la cercul** C în punctul M_1.

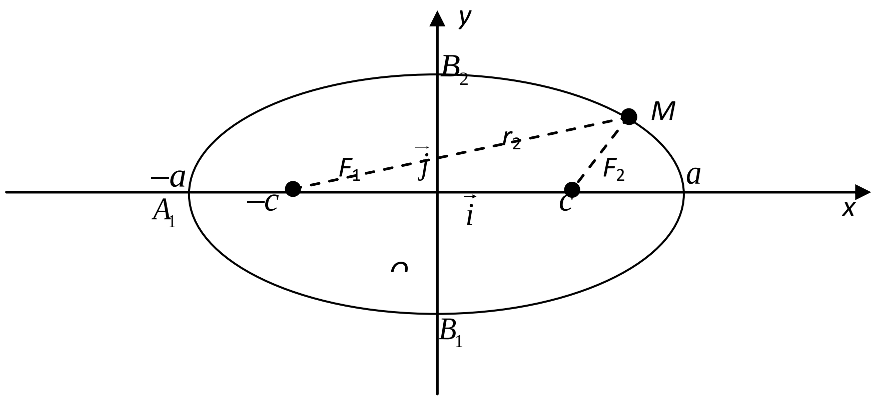
ELIPSA

Definiție. Se numeşte **elipsă** locul geometric al punctelor, pentru care suma distanțelor la două puncte fixe, numite **focare**, este constantă.

Fie c un număr real pozitiv, F_1 și F_2 două puncte fixate din plan astfel incât $|F_1,F_2|=2c$. Fie $a>c$. Mulțimea E a punctelor M ale planului cu proprietatea $|MF_1|+|MF_2|=2a$ reprezintă elipsa. Distanța $|F_1,F_2|=2c$ se numește **distanță focală**, iar dreapta F_1F_2 se numește **axă focală**, iar segmentele de dreaptă $[MF_1]$ și $[MF_2]$ se numesc **raze focale ale punctului** M.

Fixăm un sistem cartezian de coordonate $\{O,\vec{i},\vec{j}\}$ astfel încât O este mijlocul segmentului F_1F_2, vectorul $\vec{i}$ este coorientat vectorului $\overrightarrow{F_1F_2}$, de unde este evidentă poziția vectorului $\vec{j}$.

Astfel focarele au coordonatele $F_1(-c,0)$ și $F_2(c,0)$.



LINII DE ORDINUL DOI: CONICE

Punctele $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1\left(0,-\sqrt{a^2-c^2}\right)$, $B_2\left(0,\sqrt{a^2-c^2}\right)$ aparţin elipsei şi se numesc **vârfuri ale elipsei**.

Să deducem ecuația elipsei *E*. Fie $M(x,y)$ un punct arbitrar al elipsei. Avem $|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Avem $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$, de unde $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Ridicând ambele părţi la pătrat şi reducând termenii asemenea, obținem: $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$. Ridicând ultima ecuaţie la pătrat şi reducând termenii asemenea, obținem: $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. Cum $a>c>0$ rezultă că $0<a^2-c^2=b^2$, de unde avem că $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ sau $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **(1.6.2) - ecuație canonică a elipsei** sau **ecuație carteziană implicită**. Atunci vârfurile B_1 și B_2 au coordonatele $B_1(0,-b)$ și $B_2(0,b)$. Distanțele $|A_1A_2|=2a$, $|B_1B_2|=2b$ se numesc **axa mare** şi **axa mică**, respectiv, ale elipsei. Jumătățile a și b se numesc semiaxe. Punctul *O* este centrul de simetrie al elipsei. Din ecuația **(1.6.2)** rezultă $\left[\begin{array}{l} y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \\ y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \end{array}\right.$ **(1.6.3),** numite **ecuații carteziene explicite** ale elipsei.

Prima ecuație a totalității reprezintă porțiunea elipsei cuprinsă în semiplanul $y\ge 0$, iar a doua ecuație reprezintă porțiunea elipsei cuprinsă în semiplanul $y\le 0$.

Intersecția unei drepte $h: Ax+by+C=0$ şi a elipsei $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ este determinată de soluţiile în R^2 ale sistemului $\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$, ultimele fiind cel mult două la număr.

În cazul când dreapta l are un singur punct comun cu elipsa E, se spune că l este **tangentă la elipsa** E. Fie $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ şi $M_1(x_1,y_1)\in E$. Atunci **ecuația tangentei** la E în punctul M_1 este $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ **(1.6.4).**

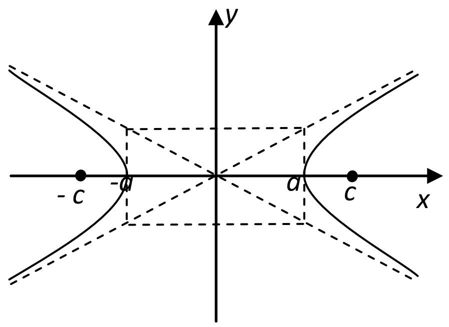
Proprietatea optică a elipsei. Razele de lumină ce pornesc din unul din focarele unei oglinzi eliptice sunt reflectate de oglindă în celălalt focar.

HIPERBOLA

Definiție. Se numește **hiperbolă** locul geometric al punctelor dintr-un plan cu proprietatea că valoarea absolută a diferenţei distanțelor până la două puncte date, numite focare, este o mărime constantă, mai mică decât distanța dintre focare.

Astfel, fie $c>0$ şi F_1, F_2 două puncte fixe din plan astfel încât $|F_1, F_2| = 2c$. Fie $0<a<c$. Mulţimea H a punctelor M cu proprietatea $\left||MF_1| - |MF_2|\right| = 2a$ determină **hiperbola.**

Punctele F_1, F_2 se numesc **focarele** hiperbolei, dreapta F_1F_2 se numeşte **axa focală**, iar distanţa $|F_1F_2| = 2c$ se numeşte **distanţa focală**; segmentele $[MF_1]$ şi $[MF_2]$ se numesc **raze focale** ale punctului M. Fixăm sistemul de coordonate $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ astfel: O este mijlocul segmentului $[F_1F_2]$, $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{F_1F_2}$, iar poziţia lui $\vec{j}$ este evidentă. Atunci focarele au coordonatele $F_1(-c,0)$ şi $F_2(c,0)$. Evident, punctele $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ aparţin hiperbolei.



Să deducem ecuaţia hiperbolei. Fie $M(x,y)$ un punct arbitrar al hiperbolei. Din definiţie rezultă $\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$, de unde $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a$. Ridicând ambele părţi la pătrat şi reducând termenii asemenea, obţinem $\pm 2a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc$. Ridicând încă o data ambele părţi la pătrat, avem $(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$. Notând $b^2 = c^2 - a^2$, obţinem $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **(1.6.5)**, numită **ecuaţia canonică a hiperbolei** (sau **ecuaţia carteziană implicită** a hiperbolei). Punctele $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ se numesc **vârfuri** ale hiperbolei. Hiperbola nu intersectează axa OY. Astfel axa OX se numeşte **axa transversă** a hiperbolei, iar OY **axă netransversă**. Originea de coordonate O este centru de simetrie al hiperbolei.

Din **(1.6.5)** rezultă $\left[\begin{array}{l} y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \\ y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \end{array}\right.$ cu $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ **(1.6.6)**, numite **ecuaţii carteziene explicite** ale hiperbolei. Considerăm funcţiile $\left[\begin{array}{l} f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \\ f(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \end{array}\right.$. Dreptele $y = \pm\frac{b}{a}x$, sunt asimptote ale acestor funcţii şi se numesc **asimptote ale hiperbolei**.

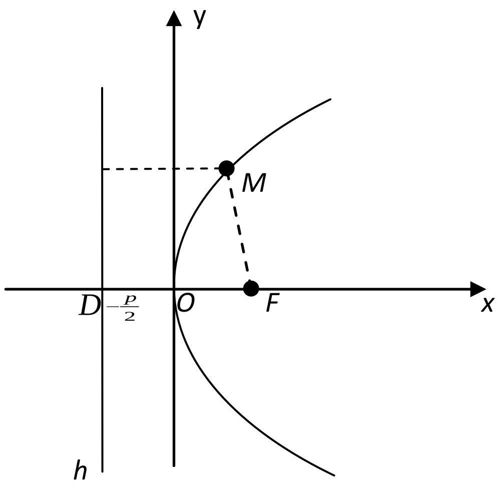
Intersecţia dintre dreapta $l: Ax+By+C=0$ şi hiperbola $H:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ este determinată de soluţiile sistemului $\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$.

Fie hiperbola $H:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ şi $M_0(x_0,y_0)\in H$. **Ecuaţia tangentei** la H în punctul M_0 este $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ **(1.6.7).**

HIPERBOLA

Definiţie. Se numeşte **parabolă** locul geometric al punctelor dintr-un plan pentru care distanţa până la un punct fix F din acest plan este egală cu distanţa până la dreapta h fixată, situată în planul considerat.

Punctul din definiţie se numeşte **focarul parabolei**, iar dreapta h se numeşte **directoarea** parabolei, segmentul $[MF]$ se numeşte **raza focală a punctului** M. Deci, mulţimea P a punctelor M cu proprietatea $d(M,h)=|MF|$ determină **o parabolă**.



Pentru a deduce ecuaţia canonică a parabolei să alegem sistemul rectangular cartezian de coordonate. Fie punctul D proiecţia punctului F pe dreapta h, iar O-mijlocul segmentului FD. Direcţia vectorului $\vec{i}$ (respectiv a axei OX), coincide cu direcţia vectorului $\overrightarrow{OF}$, iar direcţia vectorului $\vec{j}$ (respectiv a axei OY) rezultă imediat. Fie p lungimea segmentului FD. Atunci $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, iar ecuaţia dreptei h este $x=-\frac{p}{2}$ sau $x+\frac{p}{2}=0$. Să deducem ecuaţia canonică a parabolei.

Fie $M(x,y)$. Atunci $d(M,h)=\frac{\left|x+\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1+0}}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$. $|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$. Deci, $\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$. Ridicând ambele părţi la pătrat şi reducând termenii asemenea, obţinem $y^2=2px$ **(1.6.8)** – **ecuaţia canonică a parabolei**. Punctul $O(0,0)$ se numeşte **vârful parabolei**, axa OX se numeşte **axa transversă**, iar OY este **netransversă**.

Din **(1.6.8)** avem: $\left[\begin{array}{l} y=-\sqrt{2px} \\ y=\sqrt{2px} \end{array}\right.$ **(1.6.9)-** numite **ecuaţii explicite ale parabolei**.

Intersecţia dreptei $d: ax+by+c=0$ cu parabola $P: y^2=2px$ este determinată de sistemul $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ y^2=2px \end{cases}$.

Fie parabola $P: y^2=2px$ şi $M_0(x_0, y_0) \in P$. Tangenta la parabola P în punctul M_0 are ecuaţia $yy_0=p(x+x_0)$.