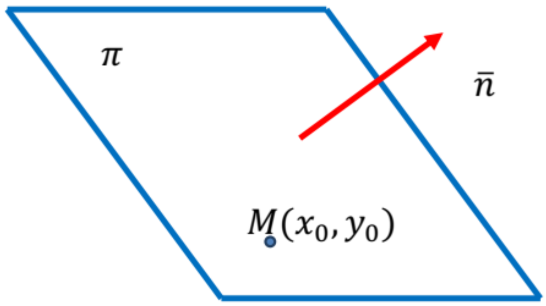
C 1.5.

PLANUL ŞI DREAPTA ÎN SPAŢIU

Planul. Diverse ecuaţii ale planului

Fie ca într-un plan este fixat un sistem cartezian rectangular de coordonate $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct şi $\vec{n} = \{A, B, C\}$ un vector nenul. Există un singur plan π ce conţine punctul M_0 şi este perpendicular vectorului $\vec{n}$, numit **vector normal** al planului π. Un punct $M(x, y, z)$ aparţine planului π dacă şi numai dacă $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, de unde $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$. Avem $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. Obţinem



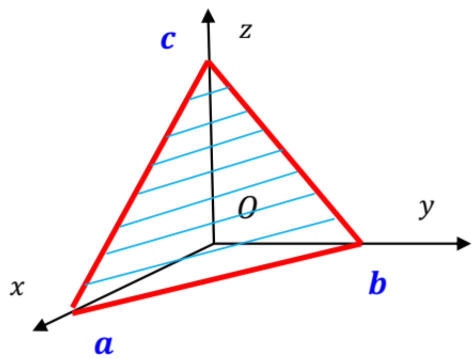
$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ **(1.5.1)** - **ecuaţia dreptei determinată de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi vectorul normal $\vec{n}$** .

Ecuaţia **(1.5.1)** poate fi scrisă sub forma $Ax + By + Cz + D = 0$ **(1.5.2)**, $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, numită **ecuaţia generală a planului.**

Ecuaţii incomplete ale planului

1. $D = 0$; ecuaţia $Ax + By + Cz = 0$, determină un plan ce trece prin originea de coordonate.
2. $A = 0$; ecuaţia $By + Cz + D = 0$, determină un plan paralel axei OX (vectorul normal $\vec{n} = \{0, B, C\}$ este perpendicular axei OX).
3. $B = 0$; ecuaţia $Ax + Cz + D = 0$ determină un plan paralel axei OY.
4. $C = 0$; ecuaţia $Ax + By + D = 0$ determină un plan paralel axei OZ.
5. $A = D = 0$; ecuaţia $By + Cz = 0$ determină un plan ce conţine axa OX.
6. $B = D = 0$; ecuaţia $Ax + Cz = 0$ determină un plan ce conţine axa OY.
7. $C = D = 0$; ecuaţia $Ax + By = 0$ determină un plan paralel axei OZ.
8. $A = B = 0$; ecuaţia $Cz + D = 0$ determină un plan paralel planului OXY.
9. $B = C = 0$; ecuaţia $Ax + D = 0$, determină un plan paralel planului OXY.
10. $A = C = 0$; ecuaţia $By + D = 0$, determină un plan paralel planului OXZ.
11. $A = B = D = 0$; ecuaţia $Cz = 0$ sau $z = 0$ - ecuaţia planului OXY.
12. $A = C = D = 0$; ecuaţia $By = 0$ sau $y = 0$ - ecuaţia planului OXZ.
13. $B = C = D = 0$; ecuaţia $Ax = 0$ sau $x = 0$ - ecuaţia planului OYZ.

Dacă în ecuaţia **(1.5.2)** toţi coeficienţii sunt nenuli, iar ecuaţia se numeşte **completă.** Atunci ea poate fi scrisă sub forma: $\dfrac{x}{-D/A} + \dfrac{y}{-D/B} + \dfrac{z}{-D/C} = 1$ sau $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ **(1.5.3)**, numită **ecuaţia planului „în segmente”.** Numerele a, b, c reprezintă valorile segmentelor tăiate de plan pe axele OX, OY, OZ, respectiv.



PLANUL ŞI DREAPTA ÎN SPAŢIU

Fie punctele necoliniare $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$. Există un singur plan ce trece prin aceste puncte. Să determinăm ecuaţia acestui plan.

Fie $M(x,y,z)$ un punct arbitrar al planului. Atunci vectorii $\overline{M_1M}=\{x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1\}$, $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$, $\overline{M_1M_3}=\{x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1\}$ sunt coplanari. Condiţia de coplanaritate a acestor vectori este ca produsul lor mixt să fie egal cu zero, adică $\left(\overline{M_1M},\overline{M_1M_2},\overline{M_1M_3}\right)=0$ sau $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ **(1.5.4)**

Ecuaţia **(1.5.4)** se numeşte **ecuaţia planului ce trece prin trei puncte necoliniare.**

Unghiul dintre plane. Condiţiile de paralelism şi perpendicularitate

Fie planele $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ şi $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Aceste plane formează două perechi de unghiuri diedre, unul dintre care este congruent cu unghiul format de vectorii normali $\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ şi $\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$ ai acestor plane. Atunci,

$$\cos\left(\sphericalangle \pi_1,\pi_2\right)=\cos\left(\sphericalangle \vec{n}_1,\vec{n}_2\right)=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Condiţia de paralelism a planelor π_1 şi π_2 este echivalentă condiţiei de coliniaritate a vectorilor $\vec{n}_1$ şi $\vec{n}_2$, adică $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

Condiţia de perpendicularitate a planelor π_1 şi π_2 este echivalentă condiţiei de ortogonalitate a vectorilor $\overline{n_1}$ şi $\overline{n_2}$: $\cos\left(\sphericalangle \pi_1,\pi_2\right)=\cos\left(\sphericalangle \overline{n_1},\overline{n_2}\right)=0$ sau $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Distanţa de la punct la plan. Fie punctul $M_0(x_0y_0)$ şi planul $\pi: Ax+By+Cz+D=0$. Atunci distanţa de la punctul M_0 la π se calculează după formula

$$d(M_0,\ \pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Dreapta în plan. Diverse ecuaţii ale dreptei

În spaţiu o dreaptă este bine determinată de un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ce-i aparţine şi un vector nenul $\overline{q} = \{m, n, p\}$ paralel dreptei date, numit **vector director al** dreptei date. Să deducem ecuaţia acestei drepte. Fie $M(x, y, z)$ un punct arbitrar al dreptei. Atunci vectorii $\overline{q}$ şi $\overline{M_0M} = \{x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0\}$ sunt coliniari, verificând condiţia $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ **(1.5.5),** numită **ecuaţie canonică** a dreptei. Notând în **(1.5.5)** fiecare raport cu t, obţinem $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$, $t \in R$, **(1.5.6)**, numite **ecuaţii parametrice** ale dreptei.

Fie punctele distincte $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Ecuaţia ce trece prin punctele M_1 şi M_2 rezultă din **(1.5.5)**, având drept vector director vectorul $\overline{q} = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, adică $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ **(1.5.7) - ecuaţia dreptei ce trece prin două puncte.**

Intersecţia a două plane neparalele $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ şi $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ reprezintă o dreaptă în spaţiu. Atunci sistemul $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ **(1.5.8)** se numeşte **ecuaţie generală a dreptei**.

Dreapta cu ecuaţie generală dată nu este „comodă” pentru „lucru”. Mai comodă este ecuaţia canonică **(1.5.5)**. Trecerea de la ecuaţia **(1.5.8)** la ecuaţia **(1.5.5)**, se poate face folosind, de exemplu, următoarea cale: în calitate de vector director al dreptei **(1.5.8)** putem lua vectorul $\vec{q} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ (într-adevăr, vectorii $\vec{n}_1$ şi $\vec{n}_2$ sunt perpendiculari dreptei, de unde vectorul $\vec{q} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ este paralel dreptei date), iar un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$, ce aparţine dreptei, poate fi găsit, determinând o soluţie (x_0, y_0, z_0) a sistemului **(1.5.8)**.

Unghiul dintre drepte. Condiţiile de paralelism şi perpendicularitate

Analog, cazului dreptei în plan cu ecuaţia canonică, putem determina unghiul dintre drepte în spaţiu.

Fie date dreptele $l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ şi $l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$.

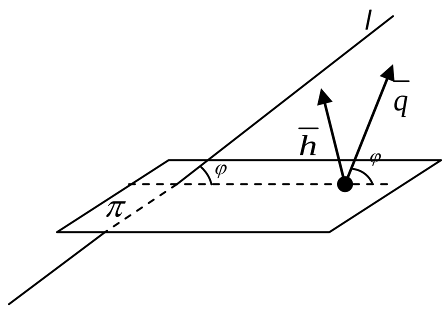
Atunci, $\cos(\sphericalangle l_1, l_2) = \cos(\sphericalangle \vec{q}_1, \vec{q}_2) = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$.

Dreptele l_1 şi l_2 sunt **perpendiculare** în cazul când $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

Dreptele l_1 şi l_2 sunt **paralele**, dacă vectorii $\vec{q}_1$ şi $\vec{q}_2$ sunt coliniari, adică: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

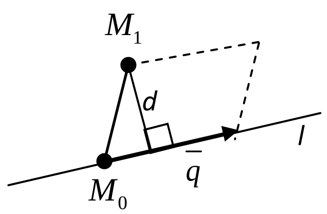
Unghiul dintre dreaptă şi plan. Distanţa de la punct la dreaptă. Distanţa minimă dintre două drepte neconcurente

Fie planul $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ şi dreapta $l: \frac{x - x_0}{m_0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$. Unghiul dintre dreapta l şi planul π este complementar unghiului dintre vectorul director $\vec{q} = \{m, n, p\}$ şi vectorul normal $\vec{n} = \{A, B, C\}$. Avem: $\sin(\measuredangle l, \pi) = \left|\cos\left(\measuredangle \vec{q}, \vec{l}\right)\right| = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$.



Dreapta l este perpendiculară planului π, dacă şi numai dacă vectorii $\vec{q}$ şi $\vec{n}$ sunt coliniari, adică $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

Dreapta l este paralelă planului π, dacă şi numai dacă $\sin(\measuredangle l, \pi) = 0$, adică $Am + Bn + Cp = 0$.



Fie dată dreapta $l: \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$ şi punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$. **Distanţa de la M_0 la dreapta** l este egală cu $d(M_0, l) = \frac{A}{|\vec{q}|}$, unde A este aria paralelogramului, construit pe vectorii $\vec{q} = \{m, n, p\}$ şi $\overrightarrow{M_0M_1}$, cu $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

Mai putem scrie $d(M_0, l) = \frac{\left|\vec{q} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\vec{q}|}$.

Fie dreptele neconcurente: $l_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ şi $l_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$.

Distanţă minimă dintre două drepte se numeşte lungimea segmentului de perpendiculară, comună ambelor drepte, cu extremităţile situate pe aceste drepte. Avem vectorii directori

$\vec{q}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$, $\vec{q}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ şi punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ce aparţin dreptelor l_1 şi l_2, respectiv. Construim un paralelipiped pe vectorii $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}$. Distanţa minimă dintre dreptele date va fi egală cu distanţa dintre planele feţelor paralele ale paralelipipedului, care conţin dreptele date, şi se poate calcula ca fiind înălţimea acestui paralelipiped. Prin urmare, $d = \frac{V_p}{A_b}$. Deoarece volumul $V_p = \left|\left(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \overrightarrow{M_1M_2}\right)\right|$, iar aria bazei $A_b = |\vec{q}_1 \times \vec{q}_2|$, atunci distanţa minimă dintre drepte va fi $d = \frac{\left|\left(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \overrightarrow{M_1M_2}\right)\right|}{|\vec{q}_1 \times \vec{q}_2|}$.