II.2. ANALIZA UNOR ALGORITMI RECURSIVI. RELAȚII DE RECURENȚĂ

Timpul de execuție al unui algoritm care conține o apelare recursivă la el însuși poate fi, de cele mai multe ori, descris printr-o relație de recurență. O relație de recurență constă într-o formulă care ne permite a calcula elementele unui șir în funcție de elemente precedente lor, pornind de la una sau mai multe valori date inițial. Ea se prezintă sub forma unei egalități sau inegalități.

II.2.1. Relații de recurență de ordinul întâi cu coeficienți constanți

Să presupunem că dorim să construim un șir f(0),f(1),f(2), … pornind de la relația $f(n)=cf(n-1)$ ($n \ge 1$;f(0) = 1, c este o constantă).

Din condițiile date rezultă: f(1) = c, f(2) = c^2, f(3) = c^3,..., f(n) = c^n... O astfel de relație de recurență se numește *relație de recurență de ordinul întâi* pentru că orice element nou din șir se calculează în funcție de precedentul său. Condiția inițială, $n \ge 1$, indică faptul că pentru orice valoare a lui $n \in N$, formula de recurență este validă, iar f(0) = 1 precizează o valoare inițială de la care se începe determinarea elementelor șirului și asigură unicitatea soluției.

Soluția generală a relației de recurență date este de forma $f(n) = kc^n$ ($n \ge 0$; f(0) = k (valoare inițială)). Prin inducție matematică se verifică ușor corectitudinea soluției. O astfel de soluție definește o funcție discretă al cărui domeniu de definiție îl constituie mulțimea numerelor naturale.

O relație de recurență de forma $f(n) + cf(n-1) = 0$ este *liniară* fiindcă fiecare termen al său se află la puterea întâi.

Cum se poate determina șirul f(1), f(2) ,….. . , pornind de la o *relație de recurență de ordinul întâi* de forma $f(n) = b_n f(n-1)$ ($n \ge 1$; f(0) cunoscut), unde șirul b_1 , b_2 , b_3, b_4, …. este cunoscut?

Se găsește, în mod succesiv, $f(1) = b_1 f(0)$, $f(2) = b_2 f(1) = b_2 b_1 f(0)$,… Se observă că soluția relației este de forma ***f(n)***= $\left(\prod_{1}^{n} b_k\right) f(0)$ (n = 1,2,…). Se verifică prin inducție matematică.

Forma generală a unei relații de recurență de ordinul întâi cu coeficienți constanți este $f(n)+ cf(n-1) = p(n)$ ($n \geq 1$; c este o constantă, p(n) o funcție discretă).

Dacă $p(n) \equiv 0$, pentru orice $n \geq 1$, relația se numește *omogenă*. În caz contrar, relația se numește *neomogenă.*

Unele relații de recurență neliniare, printr-o anumită substituție algebrică, se pot transforma în relații liniare care se pot rezolva imediat.

Exemplul II.2.1.1. Găsiți elementul f(20) din șirul definit prin relația $(f(n))^2 = 8(f(n-1))^2$ ($f(n) > 0$ pentru orice $n \geq 0$; $f(0) = 2$).

Se observă că o astfel de relație nu este liniară. Dacă se substituie $(f(n))^2$ cu g(n), atunci se obține relația liniară $g(n)=8g(n-1)$ ($n \geq 1$; $g(0) =4$) a cărei soluție este $g(n) = 4*8^n$, iar $f(n)= 2\left(2\sqrt{2}\right)^n$. Deci $f(20) = 2^{31}$.

În general, nu există o anumită metodă pentru rezolvarea relațiilor de recurență neomogene cu coeficienți constanți. Se va aplica o anumită tehnică de rezolvare în raport cu forma funcției discrete din membrul drept al relației.

Să presupunem că avem o *relație de recurență neomogenă de ordinul întâi* de forma $f(n) + cf(n-1)= k\alpha^n$ ($n \geq 1$; k o constantă). Se observă că în acest caz particular $p(n)= k\alpha^n$.

Soluția generală a unei astfel de relații este de forma $f(n)=f(n)^{(o)}+f(n)^{(p)}$ unde $f(n)^{(o)}$ reprezintă soluția relației omogene asociate $f(n)+cf(n-1) =0$, iar $f(n)^{(p)}$ este o soluție particulară.

1) Dacă $p(n)=k\alpha^n$ nu este soluție a relației omogene asociate, atunci o soluție particulară va fi de forma $f(n)^{(p)} = m\alpha^n$ unde m

este o constantă care urmează a se determina prin înlocuirea lui $f(n)^{(p)}$ în relația dată.

2) Dacă $p(n)=k\alpha^n$ este soluție a relației omogene asociate, se va considera $f(n)^{(p)} = qn\alpha^n$, unde q este o constantă care se va determina ca la punctul 1).

3) Pentru p(n), funcție discretă de altă formă, vezi tabela generală de la finalul paragrafului II.2.

Exemplul II.2.1.2. Un caz particular îl constituie relația de recurență neomogenă de ordinul întâi *f(n) - f(n-1) = p(n)* (c = -1) care are soluția $f(n) = f(0) + \sum_{j=1}^{n} p(j)$. Verificați!

De exemplu, pentru relația de recurență f(n) – f(n-1) = $9n^2$ (n ≥ 1 ; f(0)=8), se obține:

$$f(n) = f(0) + \sum_{1}^{n} p(j) = 8 + 9\sum_{1}^{n} j^2 = 8 + 9 * \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 8 + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

Este adevărată afirmația f(n) ∈ O(n^3) ? Dar f(n) ∈ O($3n^3$) ? Justificați răspunsul.

Exemplul II.2.1.3. Să se rezolve următoarele relații de recurență:

(a) f(n) – 7f(n-1)=9(5^n) (n ≥1; f(0) = 3);

(b) f(n) - 7f(n-1)= 9(7^n) (n ≥ 1; f(0) =3).

În cazul (a) se observă că soluția relației omogene asociate este $f(n)^{(o)} = c(7^n)$. Pentru că p(n) = 9(5^n) nu este soluție a relației omogene asociate, se va lua ca soluție particulară $f(n)^{(p)} = m(5^n)$. Înlocuind această soluție particulară în relația dată, se obține m = - 45/ 2 .

$$f(n)^{(p)} = (-45/2)(5^n) = (-9/2)(5^{n+1}),\ n \geq 0.$$

Soluția generală este:

$f(n) = c(7^n) + (-9/2)(5^{n+1});\ f(n) = (51/2)7^n - (9/2)5^{n+1}\ , n \geq 0$

(valoarea c= (51/2) se obține din condiția inițială f(0) = 3).

În cazul (b) se observă că soluția relației omogene asociate $f(n)^{(o)} = c(7^n)$ și p(n) = $9(7^n)$ nu sunt liniar independente. Altfel zis, p(n) este soluție a relației omogene asociate. Ca atare, vom considera $f(n)^{(p)} = qn(7^n)$ și înlocuind în relația dată se obține q = 9.

Soluția generală este:

$f(n) = c(7^n) + 9n(7^n) = (9n+3)7^n\ (n \geq 0,\ f(0) = 3).$

(c=3 se obține din condiția inițială f(0)=3).

Ce se poate afirma despre ordinul de complexitate asimptotică a lui f(n) ?

În practică, se întâlnesc adesea relații de recurență liniare de ordinul întâi neomogene de forma *f(n) =* b_n *f(n-1) +* c_n *(n ≥ 1; f(0) dat),* unde șirurile $(b_j)_{j\in N}$ și $(c_j)_{j\in N}$ sunt cunoscute.

Pentru o astfel de relație, vom considera un nou șir astfel încât f(n) = $\left(\prod_1^n b_j\right)$g(n) (n ≥ 1; f(0)= g(0)). Înlocuind pe f(n) în relația dată inițial, se obține $\left(\prod_1^n b_j\right)$g(n) = b_n $\left(\prod_1^{n-1} b_j\right)$g(n-1) + c_n, adică g(n) =g(n-1)+d_n (n ≥ 1; g(0) cunoscut), iar d_n = c_n / $\left(\prod_1^n b_j\right)$.

Se vede că g(n)= g(0)+$\sum_1^n d_j$. Soluția relației inițiale este

f(n) = $\left(\prod_1^n b_j\right)\left(f(0) + \sum_1^n d_j\right)$ (n > 0).

Să se aplice această metodă pentru a găsi soluția relației

f(n) = 5f(n-1) + n (n ≥ 1; f(0)=0).

Exemplul II.2.1.4. Să considerăm un algoritm care descrie o tehnică cunoscută de sortare numerică.

Intrarea algoritmului constă într-un tablou unidimensional de N numere întregi distincte care urmează a fi sortat (ordonat crescător).
Dimensiunea intrării este N, adică dimensiunea tabloului.
Implementarea unui astfel de algoritm se prezintă în următorul segment de program C.

```
{…………
  for ( i=1;i <= N-1;i++)
    for ( j=N; j >= i+1; j--)
      if (  X[j] < X[j-1] )
        {
          T=X[j-1];
          X[j-1]=X[j];
          X[j]=T;
        }
   ........... ..………
```

Se observă că se începe compararea ultimului element din tablou (ultima intrare), X[N], cu predecesorul său X[N-1], urmând a se interschimba, dacă este cazul, valorile memorate în ele. După N-1 comparări, numărul cel mai mic se va afla memorat în X[1]. Se va repeta acest proces pentru cele N-1 valori memorate, în acest moment, în subtabloul X[2], X[3], …,X[N]. Se va reține fiecare timp (moment) contorizat prin variabila „*i*“ în desfășurarea acestui proces.

A stabili funcția de complexitate f(N) pentru un astfel de algoritm, cu intrarea precizată anterior, înseamnă a determina numărul total de comparări care s-au executat. Se observă că $f(1)=0;f(2)=f(1)+(2-1)=1;f(3)=f(2)+(3-1)=1+2;f(4)=f(3)+(4-1)=1+2+3$;.., $f(N)= 1+2+3+\ldots+ (N-1) = N(N-1)/2 = (N^2-N)/2$.

Se obține următoarea relație de recurență
$f(N)=f(N-1) + (N-1)$ ($N \geq 2$; $f(1)=0$).
Aceasta este o relație de recurență de ordinul întâi (liniară) cu coeficienți constanți.

În concluzie, ca o măsură a timpului de execuție a acestui algoritm, putem nota că $f(N) = O(N^2)$. Se mai spune că o astfel de metodă de sortare necesită $O(N^2)$ comparări.

Să desfășurăm algoritmul descris pe un caz particular. Fie N=5 și secvența următoare:

i=1:

X[1]	14	14	14	14	4
					j=2
X[2]	18	18	18	18	14
				j=3	
X[3]	4	4	4	18	18
			j=4		
X[4]	10	10	10	10	10
		j=5			
X[5]	16	16	16	16	16

Există patru comparări din care două conduc la interschimbări (cuprinse între dreptunghiuri).

i=2:

X[1]	4	4	4	4
X[2]	14	14	14	10
				j=3
X[3]	18	18	10	14
			j=4	
X[4]	10	10	18	18
		j=5		
X[5]	16	16	16	16

Din cele trei comparări, două sunt interschimbări.

i=3:

X[1]	4		4	4
X[2]	10		10	10
X[3]	14		14	14
			j=4	
X[4]	18		16	16
		j=5		
X[5]	16		18	18

Două comparări (o interschimbare).

i=4:

X[1]	4	
X[2]	10	
X[3]	14	
X[4]	16	
		j=5
X[5]	18	

O comparare (0 interschimbări).

Exemplul II.2.1.5. Fie n>=1 și S o mulțime ce conține 2^n numere naturale. Să se determine elementul maxim și elementul minim din S.

Intrarea algoritmului n, 2^n numere naturale.

Dimensiunea intrării cardinalul mulțimii date S.

Fie f(n), funcția care exprimă numărul de comparări între perechi de elemente din S.

Se observă că f(1)=1(n=1, $|S|=2^1=2$). Dacă n=2, $|S|=2^2=4$. Fie $S=S_1 \cup S_2$ unde $S_1=\{z_1,z_2\}$, $S_2=\{y_1,y_2\}$. Se vor găsi elementele maxim și minim din fiecare submulțime S_k(k=1,2) prin 2*1=2*f(1)

comparări, iar apoi se vor compara între ele elementele minime, respectiv maxime din cele două submulțimi. În total se execută f(2)=2*f(1)+2 comparări.
Dacă $|S|=2^n$, vom lua $S= S_1US_2$ cu $|S_1|=|S_2|=2^{n-1}$.

Este ușor a se observa relația de recurență neomogenă de ordinul întâi***, f(n)=2f(n-1)+2 (n>=2; f(1)=1).***

Relația omogenă asociată este f(n)-2f(n-1)=0. Se observă că $p(n)=2*1^n$ nu este soluție a acestei relații omogene. Soluția pentru această relație va fi de forma $f(n)^{(o)} = c(2^n)$. Ca soluție particulară se va lua $f(n)^{(p)} = m*1^n$ (m este o constantă). Se înlocuiește în relația inițială și se obține m= -2. Soluția va fi $f(n) = -2 + c*2^n$. Din condiția inițială f(1)=1 se obține c=3/2. În final, $f(n)=3*2^{n-1}-2$ (n>=1) ($f(n)= O(2^n)$).

Exemplul II.2.1.6. În 1904, matematicianul suedez Helge von Kokh a creat curba ce îi poartă numele. Construcția curbei începe cu un triunghi echilateral cu latura egală cu unitatea. Perimetrul triunghiului este egal cu 3, iar aria $(\sqrt{3}/4)$. Triunghiul este supus unei transformări prin care fiecare latură este împărțită în trei părți egale, și pe fiecare latură a triunghiului se construiește, la mijloc, spre exterior un alt triunghi echilateral cu latura de (1/3). Se obține așa numita "steaua lui David".

În acest fel, pe fiecare latură a triunghiului echilateral inițial se află 4 segmente de lungime (1/3). Se va obține un poligon cu 12 laturi a cărui arie este $(\sqrt{3}/4) + (\sqrt{3}/4)*(1/3)^2 *3 = \sqrt{3}/3$.

Continuând algoritmul de construcție se obține, la pasul următor, un poligon cu $4^2*3=48$ laturi cu dimensiunea $1/9=(1/3)^2$ fiecare. Aria poligonului respectiv se exprimă prin relația $(\sqrt{3}/4) + \sqrt{3}/3 + (\sqrt{3}/4)*[(1/3)^2]^2 *4*3 = 10\sqrt{3}/27$.

Pentru n > 0 se va considera f(n) ca fiind aria poligonului care se obține din triunghiul echilateral inițial după aplicarea a n transformări de tipul celor descrise mai sus. Se va ajunge la un

poligon cu $4^n * 3$ laturi, iar la pasul următor, la un poligon cu $4^{n+1} * 3$ laturi.
Se poate, relativ ușor, observa următoarea relație de recurență

$$f(n) = f(n-1) + (\sqrt{3}/4) * (1/3^n)^2 * 4^{n-1} * 3 \textit{ sau}$$

$$f(n) = f(n-1) + (3\sqrt{3}/16)) * (4/9)^n \quad (n > 1;\ f(1) = \sqrt{3}/3)$$

Relația omogenă asociată este f(n)-f(n-1)=0. Se observă că $(4/9)^n$ nu este soluție a acestei relații. Prin urmare se va considera $f(n)^{(p)} = m(4/9)^n$. Se înlocuiește în relația inițială și se va obține m = $(-9/5)(1/4\sqrt{3})$.

Soluția relației omogene va fi de forma $f(n)^{(o)} = k * 1^n$. Scriind soluția generală și ținând cont de valoarea inițială, se obține:

$$f(n) = (1/(5\sqrt{3})) * (6 - (4/9)^{n-1}) \quad (n \geq 1).$$

Se vede că pentru un n suficient de mare ($(4/9)^{n-1} \to 0)$) și ca atare f(n) se aproximează cu un număr finit $6/(5\sqrt{3})$. Ordinul de complexitate se poate exprima prin $f(n)=O((4/9)^n)$.

Exemplul II.2.1.7. Se consideră trei tije identice T_1, T_2, T_3 și n discuri cu diametre diferite care se pot așeza pe oricare din cele trei tije. Stabiliți relația de recurență și ordinul de complexitate corespunzător algoritmului prin care cele n discuri aflate inițial în ordinea crescătoare a diametrelor lor (de la vârful tijei către baza ei) pe tija T_1, vor fi mutate în aceeași ordine pe tija T_3, utilizând tija T_2, cu respectarea următoarelor reguli:
(a) la fiecare pas se mută un singur disc;
(b) în fiecare moment, deasupra oricărui disc de pe tija T_3, se poate pune un alt disc care are diametrul mai mic decât al discului existent pe tijă (Problema turnurilor din Hanoi).
Intrarea algoritmului: n elemente (discuri).
Dimensiunea intrării: n.

Pentru $n \geq 0$, să notăm cu f(n) numărul minim de mutări (operații elementare) necesare pentru a fi transferate cele n discuri

de pe tija T_1 pe tija T_3 cu respectarea regulilor date. Pentru n discuri se vor realiza următoarele operații:
(1) Se transferă primele n-1 discuri de pe tija T_1 pe tija T_2, conform condiției (a), în f(n-1) mutări.
(2) Se realizează o singură mutare pentru a transfera al n–lea disc, cu diametrul cel mai mare, de pe tija T_1 pe tija T_3 .
(3) Se efectuează încă f(n-1) mutări pentru a transfera cele n-1 discuri de pe tija T_2 pe tija T_3.

În acest moment cele n discuri se află așezate pe tija T_3 conform regulilor date și algoritmul se încheie.

Se obține relația de recurență neomogenă de ordinul întâi $f(n)=2f(n-1)+1 (n\geq 1; f(0)=0)$. Relația omogenă asociată este $f(n)-2f(n-1)=0$ cu soluția $f(n)^{(o)} = c(2^n)$. Această soluție și $p(n)=1$ sunt liniar independente. Soluția particulară a relației este de forma $f(n)^{(p)} = m(1^n) = m$. Se găsește $m= -1$. Soluția este $f(n) = -1 + c(2^n)$. Din $f(0)=0$ se obține $c = 1$.

Soluția generală este $f(n) = 2^n - 1$ $(n \geq 0)$. Prin urmare, $f(n) \in O(2^n)$.

II.2.2. Relații de recurență de ordinul doi cu coeficienți constanți

O relație de forma *$f(n) = af(n-1) + bf(n-2)$ ($n \geq 2$; $f(0)$, $f(1)$ valori cunoscute, a,b constante)* se numește *relație de recurență omogenă de ordinul doi cu coeficienți constanți*. Se observă că fiecare nou termen al șirului se calculează în funcție de ultimii doi termeni precedenți lui. Având în vedere metoda folosită la rezolvarea ecuațiilor diferențiale de ordinul doi cu coeficienți constanți, relația de recurență dată, admite o soluție particulară de forma *$f(n) = \alpha^n$ (α nenul)*. Introducând pe *$f(n)$* în relația dată inițial și împărțind prin α^{n-2} în ambii membri, se obține ecuația de gradul doi $\alpha^2 = a\alpha + b$ numită *ecuație caracteristică.* Soluțiile acestei ecuații, numite *rădăcini caracteristice*, pot fi:

A) *rădăcini reale și distincte* α_+, α_-.

În această situație, $(\alpha_+)^n$ și $(\alpha_-)^n$ sunt soluții liniar independente, adică ele nu se pot exprima una ca un multiplu de cealaltă pentru orice $n \geq 0$. În concluzie, soluția relației date va fi de forma $f(n) = c_1 \alpha_+^n + c_2 \alpha_-^n$ (n=0,1,2…), iar constantele c_1, c_2 sunt determinate din valorile inițiale f(0), f(1).

Exemplul II.2.2.1. Să se găsească o relație de recurență prin care să se stabilească numărul secvențelor binare de lungime n care nu conțin zerouri consecutiv.

Să analizăm două variante.

Varianta 1. Pentru n>=1, fie f(n) numărul secvențelor de lungime dată n care nu conțin zerouri consecutiv. Un astfel de număr se poate exprima sub forma *f(n)=f(n,0)+f(n,1) (f(1)=2, f(2)=3)* unde ***f(n,0)*** reprezintă numărul secvențelor de lungime n care nu conțin zerouri consecutiv și au pe zero ca ultim element, iar ***f(n,1)*** reprezintă numărul secvențelor de lungime n care nu conțin zerouri consecutiv și au pe unu ca ultim element.

Atunci , să considerăm o secvență de lungime n-1>0 care nu conține elemente zero consecutiv.

1) Dacă secvența respectivă se încheie cu 1, atunci pe poziția a n-a se poate pune un 0 sau un 1, obținându-se un număr de 2f(n-1,1) astfel de secvențe de lungime n.

2) Dacă secvența considerată se încheie cu 0, atunci pe poziția a n-a se poate pune doar 1, obținându-se un număr de f(n-1,0) secvențe de lungime n.

Cele două situații cuprind toate posibilitățile și sunt disjuncte. Prin urmare se obține relația *f(n)=2f(n-1,1)+f(n-1,0).*

Dacă s este o secvență numărată în f(n-2) (de lungime n-2>0), atunci secvența “s1” care are plasat 1 pe poziția (n-1) se va contoriza

în f(n-1,1). Invers, dacă secvența "s1" este numărată în f(n-1,1), atunci s se numără în f(n-2). În concluzie, *f(n-2)=f(n-1,1)*.
Așadar, f(n)=f(n-1,1)+(f(n-1,1)+f(n-1,0))=f(n-1,1)+f(n-1), ceea ce conduce la relația de recurență *f(n)=f(n-1)+f(n-2) (n>2; f(1)=2, f(2)=3)*. Se observă că f(0)=f(2)–f(1)=1 (secvența vidă). Ecuația caracteristică $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ are rădăcinile reale distincte $(1+\sqrt{5})/2, (1-\sqrt{5})/2$. Soluția este $f(n) = c_1\alpha_+^n + c_2\alpha_-^n$.
Ținând cont de condițiile inițiale se va obține

$$f(n) = ((5+3\sqrt{5})/10)((1+\sqrt{5})/2)^n + ((5-3\sqrt{5})/10)((1-\sqrt{5})/2)^n.$$

(n>=0)

Varianta 2. Fie f(n) numărul tuturor secvențelor de lungime n>=1 care nu conțin zerouri consecutiv. Este evident că f(1)=2, f(2)=3. Pentru secvențele binare de lungime n>=3, există două situații:

1) Al n-lea simbol dintr-o astfel de secvență să fie 1, iar precedentele
n-1 simboluri să formeaze o secvență binară care nu conține zerouri consecutiv.
Există f(n-1) astfel de secvențe de lungime n-1.

2) Al n-lea simbol din secvență să fie 0. O astfel de secvență se va termina cu succesiunea "10", iar primele n-2 simboluri vor forma o secvență binară care nu conține zerouri consecutiv.
Există f(n-2) astfel de secvențe binare de lungime n-2.

Aceste două posibilități sunt disjuncte (în sensul că nu au nici o secvență comună) și acoperă toate posibilitățile.
Se ajunge la relația de recurență stabilită la *Varianta 1*.

Exemplul II.2.2.2. Relația lui Fibonacci constituie un caz des întâlnit în practică. Ea este o relație de recurență omogenă de ordinul doi cu coeficienți constanți.

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \ (n \geq 2;\ F_0 = 0,\ F_1 = 1)$$

Considerând soluția particulară de forma $F_n = \alpha^n$, se găsește ecuația caracteristică $\alpha^2 = \alpha+1$. Rădăcinile caracteristice sunt $\alpha_+ = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ =1.61803... și $\alpha_- = \left(1-\sqrt{5}\right)/2 = -\alpha_+^{-1}$. Soluția relației lui Fibonacci este :

$F_n = c_1(1+\sqrt{5}/2)^n + c_2(1-\sqrt{5}/2)^n$ (n $\geq$ 0). Din condițiile inițiale, se obține:

$$F_0 = 0(= c_1 + c_2)$$
$$F_1=1(=c_1\alpha_+ + c_2\alpha_-)$$

Rezolvând acest sistem de ecuații se găsește

$c_1 = 1/\sqrt{5}$; $c_2 = -1/\sqrt{5}$.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(((1+\sqrt{5})/2)^n - ((1-\sqrt{5})/2)^n)$$

Având în vedere faptul că $(1+\sqrt{5})/2 \geq 1$, $\left|(1-\sqrt{5})/2\right| \leq 1$, pentru valori ale lui n suficient de mari, se obține $F_n \sim ((1+\sqrt{5})/2)^n/\sqrt{5}$. Simbolul „~“ dă o aproximare mai bună decât „O“, adică $F_n \in O(((1+\sqrt{5})/2)^n)$.

În literatura de specialitate, rădăcina caracteristică α_+ se mai notează cu ϕ și se numește secțiunea de aur. Așadar, $f(n) = (1/\sqrt{5})(\phi^n - (-\phi^{-n})$ (relația lui de Moivre descoperită la începutul secolului XVI).

Relația de recurență Fibonacci constituie rezultatul analizei complexității unui algoritm care implementează definiția șirului lui Fibonacci. Acest șir a fost descoperit în anul 1202 de către Leonardo Pisano (Leonardo din Pisa) cunoscut sub numele de Leonardo Fibonacci.

Numerele Fibonacci sunt legate de raportul de aur ϕ și de conjugatul său.

$$F_k = (\phi^k - \hat{\phi}^k)/\sqrt{5} \quad unde\ \phi = (1+\sqrt{5})/2 = 1.61803...$$

$$\hat{\phi} = (1-\sqrt{5})/2 = -.61803..$$

Demonstrația se poate face prin inducție.

Deoarece $\left|\hat{\phi}\right| < 1$, $\left|\hat{\phi}^k\right| / \sqrt{5} < 1/\sqrt{5} < 1/2$. Prin urmare, numărul Fibonacci F_k este $F_k = \phi^k / \sqrt{5}$ rotunjit la cel mai apropiat întreg.

Se observă, relativ ușor, faptul că $F_n \in \Omega(\phi^n)$. Mai mult, $F_n \in \Theta(\phi^n)$.

Numerele Fibonacci cresc exponențial. De exemplu, F_{30} depășește un milion. Deși această viteză de creștere nu este de ordinul 2^n, ea este de aproximativ $2^{.694.*n}$.

Șirul lui Fibonacci, care rezultă din relația stabilită, este 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,….

Timpul de execuție al algoritmului recursiv pentru calculul unui termen F_n este exprimat prin relația de recurență dată anterior. Funcția de complexitate a algoritmului pentru determinarea șirului lui Fibonacci se poate exprima prin

$$f(n) = \begin{cases} 1, & daca \quad n \leq 2 \\ f(n-2) + f(n-1), & daca\ n \geq 3 \end{cases}$$

Acest lucru trebuie înțeles în sensul că timpul de execuție al algoritmului pentru intrarea n este dat de suma timpilor de execuție ai acestui algoritm pentru intrarea n-2, adică f(n-2), și respectiv intrarea n-1, adică f(n-1).

Ca o concluzie se poate spune că timpul de execuție al algoritmului crește la fel ca numerele Fibonacci, adică foarte repede.

Scopul ar fi să obținem un algoritm mai bun (cu o creștere mai lentă).

Să analizăm următorul algoritm prin care se obține termenul F_n=Fib din șirul lui Leonardo Fibonacci.

```
.........................................................
if (n = = 0) Fib=0; return;
```

```
if ( n = = 1)  Fib=1; return;
   else
  {
    FP2=0;
    FP1=1;
    for (i=2; i<=n; i++)
      {
          t=FP1;
          FP1=FP1+FP2;
          FP2=t;
        }
   Fib=FP1;
 }
```

Fie f(n) funcția de complexitate corespunzătoare acestui algoritm. Se observă că f(n)=n-1 (numărul de execuții al instrucțiunii FP1=FP1+FP2 din ciclul *for)* ceea ce conduce la O(n) operații de adunare și tot atâtea asignări.

Să construim un tablou T[n+1] care, inițial, va avea toate componentele simbolic egale cu ∞, mai puțin elementele T[0]=0 și T[1]=1. Să considerăm funcția:

```
.........................
int T[n+1];
int FF(int n)
 {T[0]=0;
  T[1]=1;
  for (int i=2;i<=n;i++)
      T[i]=T[i-2]+T[i-1];
   return T[n];
}
```

Există deosebiri între prima și a doua variantă de calcul a termenului F_n din șirul lui Fibonacci?

Se poate trage concluzia că și în acest caz complexitatea este O(n)?

Mai mult, algoritmul de calcul al șirului lui Fibonacci se poate realiza și în termeni matriceali, folosind următoarea relație:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n * \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} \quad (\ n>=2;\ F_0=0,\ F_1=1)$$

Fiecare produs a două matrice de două linii și două coloane solicită un număr de 12 operații aritmetice (8 înmulțiri și 4 adunări).

Pentru a calcula pe F_n este suficient a calcula puterea a n-a a unei matrice de două linii și două coloane. Problema care se pune este stabilirea numărului operațiilor de înmulțire necesare în acest calcul.

Pentru a calcula pe X^n (X fiind matricea mai sus menționată) se va proceda astfel

$$X^n = \begin{cases} (X^{\lfloor n/2 \rfloor})^2 & daca\ \ n\, este\ par \\ (X^{\lfloor n/2 \rfloor})^2 * X & daca\ \ n\, este\, impar \end{cases}$$

Prin urmare, $f(n) = f(\lfloor n/2 \rfloor) + O(1)$ reprezintă numărul operațiilor de înmulțire efectuate, la care se adaugă un număr constant de alte operații elementare. Aceasta conduce la O(log n), pentru că log(n) reprezintă numărul timpilor de calcul pentru $\lfloor \bullet \rfloor$ sau $\lceil \bullet \rceil$ înainte de a obține 1.

Se observă că în algoritmul de înmulțire se utilizează frecvent împărțirea întregului n la 2 (la exponent) și operații de adunare.

Verificați și analizați algoritmul de calcul și pentru

$X^n = (X)^{\sum_{i=0}^{\lfloor \log n \rfloor + 1} c_i 2^i}$ (folosind reprezentarea lui n în binar). Se știe că $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \le \log_2 n + 1.$

Se poate afirma că s-a distrus bariera creșterii exponențiale trecând la O(log n)? În mod cert, nu.

În metodele prezentate se omite un aspect esențial. Trebuie să se aibă în vedere semnificația unui pas elementar. În general, în analiza algoritmilor prezentați, am presupus că fiecare operație aritmetică solicită o unitate de timp, pentru că numerele implicate vor fi relativ mici, aproximativ n (dimensiunea problemei), care au o lungime de aproximativ log(n) biți.

În cazul de față, avem de efectuat operații aritmetice cu numere foarte mari (uriașe), cu aproximativ n biți fiecare și bineînțeles suntem interesați în calcul de valori ale lui n foarte mari. Când se lucrează cu astfel de numere uriașe, și se cere un calcul exact, se vor folosi pachete sofisticate de tipul ***long int.*** Astfel de algoritmi iau O(n) timpi pentru adunarea a două numere de câte n biți.

Prin urmare complexitatea algoritmilor ce corespund primelor două metode $O(F_n)$, respectiv O(n), devine $O(nF_n)$, respectiv $O(n^2)$. Al treilea algoritm matriceal implică înmulțiri de întregi de câte O(n) biți.

Fie U(n) timpul solicitat la înmulțirea a două numere de n biți. Atunci timpul de execuție pentru al treilea algoritm va fi O(U(n)). Raționamentul conduce la relația de recurență

$f(n) = f(\lfloor n/2 \rfloor) + O(U(n))$ unde ultimul termen este solicitat de calculul a 4 înmulțiri și 12 adunări.

Așadar f(n) nu se comportă asimptotic ca ***log(n)***, în schimb, se ajunge la o serie geometrică

$U(n) + U(\lfloor n/2 \rfloor) + U\left(\left\lfloor \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{2} \right\rfloor\right) + \ldots$ care însumează până la O(U(n)).

Exemplul II.2.2.3. Pentru $n \geq 1$, fie mulțimea S = {1,2,3,4,…,n} care se mai notează și sub forma [n]. Dacă n=0, atunci S = Ø. Fie f(n), numărul de submulțimi ale lui S care conțin întregi neconsecutivi. Să se găsească o relație de recurență pentru f(n) și să se rezolve.

Pentru $0 \le n \le 4$ se obține: f(0) = 1,f(1) =2, f(2) =3, f(3) =5, f(4) =8. De exemplu, pentru n=3, submulțimile lui [3] în condițiile date, sunt: Ø, {1},{2}, {3},{1,3}.

Pentru $n \ge 2$ și S=[n], dacă $A \subseteq S$ se numără printre cele f(n) submulțimi, atunci există două situații:

a) $n \in A$ și evident $n-1 \notin A$. Submulțimea obținută prin eliminarea lui n din A se numără printre cele f(n-2) submulțimi ale lui S.

b) $n \notin A$ și $n-1 \in A$. În acest caz A se află printre cele f(n-1) submulțimi ale lui S.

Cele două situații sunt disjuncte și acoperă orice posibilitate. Se obține relația de recurență

f(n) = f(n-1) + f(n-2) (n ≥ 2 ; f(0)=1, f(1)=2).

Se observă că $f(n) = F_{n+2}$ $(n \ge 0)$. Așadar, printr-un calcul similar cu cel de la relația Fibonacci, se obține f(n) ~ ? (exercițiu !).

Exemplul II.2.2.4. Ne propunem să construim expresii aritmetice fără paranteze, având ca operanzi succesiuni finite de cifre zecimale, iar ca operatori, operatorii aritmetici binari: + , *, /. În evaluarea unor astfel de expresii se ține cont de precedența și asociativitatea operatorilor pe care îi conțin.

Fie f(n) $(n \ge 0)$, numărul expresiilor care se construiesc cu n astfel de simboluri. De exemplu, f(1) =10 pentru că în acest caz avem expresii formate doar dintr-o cifră zecimală: 0,1,2,…,9; f(2)=100 pentru că întâlnim expresiile formate din două cifre zecimale: 00, 01, 02,…, 10,11,12,…,98,99.

Să se găsească o relație de recurență pentru f(n), să se rezolve și să se stabilească complexitatea algoritmului de calcul.

Pentru $n \ge 3$, există două cazuri care vor conduce la stabilirea relației de recurență solicitată:

a) dacă E este o expresie cu n-1 simboluri, atunci al n-lea simbol ce se poate adăuga la dreapta sa nu poate fi decât o cifră, adică noua expresie se încheie cu două cifre pentru a se respecta corectitudinea construcției ei. Prin adăugarea unei cifre la dreapta lui E se vor obține 10f(n-1) noi expresii cu n simboluri fiecare.

b) dacă E este o expresie cu n-2 simboluri, atunci putem construi noi expresii cu n simboluri (în afara cazului (a)) prin adăugarea la dreapta a încă două simboluri care nu pot fi decât de forma +0,+1,…,+9,*0,*1,*2,…,*9, /1, /2,…, /9, adică 29 de posibilități, care vor da 29f(n-2) expresii de câte n simboluri.

Prin urmare, relația de recurență căutată este
f(n) = 10f(n-1) + 29f(n-2) (n ≥ 3; f(1)=10, f(2)=100).
Ecuația caracteristică este $\alpha^2 - 10\alpha - 29 = 0$ și are rădăcinile caracteristice $5 \pm 3\sqrt{6}$. Printr-un calcul simplu, se va ajunge la soluția $f(n) = (5/3\sqrt{6})((5+3\sqrt{6})^n - (5-3\sqrt{6})^n)$ (n≥0). Precizați ordinul de complexitate !

Exemplul II.2.2.5. Se consideră alfabetul $\Sigma = \{1,2,3,4\} \cup \{a,b,c,d,e,f,g\}$. Să se găsească și să se rezolve o relație de recurență care să dea numărul cuvintelor de lungime n (din $\sum^*$) cu proprietatea că nu conțin caractere alfabetice consecutive (identice sau distincte).

Fie f(n) numărul cuvintelor de lungime n cu proprietatea respectivă. Atunci, f(0) =1 (cuvântul vid de lungime 0), f(1)=11 pentru că aceste cuvinte de lungime unu sunt cele 11 simboluri din alfabetul dat. Se observă că f(2)=72 deoarece avem următoarele posibilități: (cifră,cifră) =16 posibilități, (cifră,literă)= 28 posibilități, (literă,cifră)= 28 posibilități.

Pentru n ≥ 3 există următoarele două situații disjuncte:

1) Al n-lea simbol de la finalul unui cuvânt $w \in \sum^*$ de lungime n-1 poate fi cu certitudine o cifră, adică se poate obține un număr de 4f(n-1) cuvinte de lungime n.

2) Pornind de la un cuvânt oarecare $w \in \sum^*$ de lungime n-2, se poate folosi pe pozițiile n-1 și n combinația (cifră,literă), care nu include cazul (1), adică există 4*7f(n-2) = 28f(n-2) astfel de cuvinte de lungime n.
Prin urmare, relația de recurență este :
f(n)=4f(n-1)+28f(n-2) (n ≥ 2*; f(0)=1, f(1)=11).*
Ecuația caracteristică este $\alpha^2 - 4\alpha - 28 = 0$ cu rădăcinile caracteristice $\alpha_+ = 2 + 4\sqrt{2}$, $\alpha_- = 2 - 4\sqrt{2}$. Soluția generală este de forma $f(n) = c_1\,\alpha_+^n + c_2\,\alpha_-^n$, iar din condițiile inițiale, se obține
$11 = c_1\,(2 + 4\sqrt{2}) + c_2\,(2 - 4\sqrt{2})\ si\ 1 = c_1 + c_2$.
Rezultă $c_1 = (8 + 9\sqrt{2})/16$ *si* $c_2 = (8 - 9\sqrt{2})/16$.
Soluția generală este următoarea
$f(n) = ((8 + 9\sqrt{2})/16)(2 + 4\sqrt{2})^n + ((8 - 9\sqrt{2})/16)(2 - 4\sqrt{2})^n$,
n ≥ 0.
Stabiliți ordinul de complexitate !

B) *rădăcini reale egale*

Exemplul II.2.2.6. Să se rezolve relația de recurență
f(n)= 6f(n-1) – 9f(n-2) (n ≥ 0 *; f(0)=1, f(1)=2).*

Ca și în cazul precedent, vom lua $f(n)=c\alpha^n$ cu c și α nenuli, n ≥ 0. Înlocuind în relația dată se obține ecuația caracteristică $\alpha^2 - 6\alpha+9 = 0$ cu rădăcinile caracteristice $\alpha_{1,2} = 3$ (rădăcina are ordinul doi de multiplicitate). Neavând soluții independente, se vor lua soluțiile de forma (3^n) și $n(3^n)$. Într-adevăr, înlocuind în relația dată, se observă că $6f(n-1) - 9f(n-2)= 6(n-1)3^{n-1} - 9(n-2)3^{n-2} = 2(n-1)3^n - (n-2)3^n = (2n-2-n+2)3^n = n3^n = f(n)$ (adică $n(3^n)$ este soluție).
Este evident că cele două soluții sunt liniar independente în sensul că nu există o constantă k astfel încât să aibă loc relația $n(3^n) = k(3^n)$ pentru orice n ≥ 0. Soluția generală este de forma

$f(n) = c_1 3^n + c_2 n 3^n$ $(n \geq 0;\ f(0) = 1,\ f(1) = 2)$. Din condițiile inițiale rezultă $c_1 = 1$, $c_2 = -1/3$.
Soluția este $f(n) = 3^n - (1/3)n3^n = 3^n - n\,3^{n-1}$ $(n \geq 0)$.

Exemplul II.2.2.7. Pentru $n \geq 1$, considerăm determinantul de ordinul n, D_n, de forma următoare

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Găsiți și rezolvați o relație de recurență care să conducă la valoarea lui D_n.

Dezvoltând determinantul dat după prima linie, se obține:

$$D_n = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$2D_{n-1} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - D_{n-2}.$$

Prin urmare, $D_n=2D_{n-1} - D_{n-2}$ $(n \geq 3)$.

Fie $f(n)(n \geq 1)$, funcția ce va exprima valoarea determinantului D_n. Atunci $f(1) = |2| = 2$, $f(2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, iar relația de recurență este *$f(n)=2f(n-1) - f(n-2)$ $(n \geq 3; f(1)=2, f(2)=3)$*. Se ia $f(n)=c\alpha^n$ cu $c,\alpha \neq 0$, $n \geq 1$. Înlocuind în relație, se ajunge la ecuația caracteristică $\alpha^2-2\alpha+1=0$ cu rădăcina caracteristică multiplă de ordinul doi $\alpha=1$. Se vor considera rădăcinile liniar independente 1^n și $n(1^n)=n$. Înlocuind în relație se vede că $2f(n-1) - f(n-2) = 2(n-1)-(n-2) = n$, adică $f(n) = n$ este soluție. Soluția generală este de forma *$f(n)=c_1(1^n) + c_2 n (1^n)$*. Din condițiile inițiale se obține $c_1=c_2=1$. Așadar soluția relației este *$f(n)=n+1$ $(n \geq 1)$* cu ordinul de complexitate $O(n)$.

În general, dacă $c_n f(n) + c_{n-1} f(n-1) + \ldots + c_{n-k} f(n-k) = 0$ cu $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_{n-k}$ constante reale nenule, iar α este o rădăcină caracteristică multiplă de ordin m $(2 \leq m \leq k)$, atunci soluția generală se va lua de forma *$f(n)= c_0 \alpha^n + c_1 n\alpha^n + \ldots + c_{m-1} n^{m-1} \alpha^n = (c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \ldots + c_{m-1} n^{m-1})\alpha^n$ $(n \geq 0; c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ constante$)$.*

C) *rădăcini complexe*

Exemplul II.2.2.8. Să se rezolve relația de recurență $f(n)=2f(n-1) - 4f(n-2)$ $(n \geq 2; f(0)=1, f(1)=3)$.

Se găsește ecuația caracteristică $\alpha^2=2\alpha-4$ cu rădăcinile caracteristice

$\alpha_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$. Soluția generală va fi de forma $f(n) = c_1(1+i\sqrt{3})^n + c_2(1-i\sqrt{3})^n$, unde c_1, c_2 sunt constante complexe. Se observă că soluțiile $(1+i\sqrt{3})^n$,$(1-i\sqrt{3})^n$ sunt liniar independente.

$1+i\sqrt{3} = 2(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))$

$1-i\sqrt{3} = 2(\cos(\pi/3)-i\sin(\pi/3))$.

$f(n) = 2^n\left[(c_1+c_2)\cos(n\pi/3)+(c_1-c_2)i\sin(n\pi/3)\right]=$

$2^n(C_1\cos(n\pi/3)+C_2\sin(n\pi/3))$ unde C_1,C_2 sunt constante.

Din condițiile inițiale, f(0)=1,f(1)=3 se obține, în final,

$f(n) = 2^n(\cos(n\pi/3)+(2/\sqrt{3})\sin(n\pi/3)) \quad (n \ge 0)$

(complexitate exponențială).

În general, pentru a rezolva o relație de recurență neomogenă de ordinul doi de forma $f(n)+c_{n-1}f(n-1)+c_{n-2}f(n-2)=k\alpha^n$ unde k este o constantă, c_{n-1} , c_{n-2} , constante nenule, se va proceda astfel:

(1) Dacă $k\alpha^n$ nu este soluție pentru relația omogenă asociată, atunci o soluție particulară se va lua de forma $f(n)^{(p)} = m\alpha^n$, unde m este o constantă care se va determina prin înlocuirea acestei soluții în relația dată;

(2) Dacă $f(n)^{(o)} = c_1\alpha^n + c_2\alpha_1^n \quad (\alpha_1 \neq \alpha)$, atunci $f(n)^{(p)} = qn\alpha^n$, unde q este o constantă care se va determina ca la punctul (1);

(3) Dacă $f(n)^{(o)} = (c_1+c_2n)\alpha^n$, atunci $f(n)^{(p)} = cn^2\alpha^n$, unde c este o constantă care se va determina ca la punctele anterioare.

Generalizând, o relație de recurență neomogenă cu coeficienți constanți este de forma:

$c_n f(n)+c_{n-1}f(n-1)+c_{n-2}f(n-2)+\ldots+c_{n-k}f(n-k)=p(n)$ cu coeficienții c_j ($n-k\le j\le n$) nu toți nenuli .

(**)

1. Dacă p(n) se exprimă ca un produs dintre o constantă și o expresie cuprinsă în prima coloană din tabla de mai jos și nu este soluție a relației omogene asociate, atunci $f(n)^{(p)}$ are forma care corespunde lui p(n) în a doua coloană a tablei respective.

2. Dacă p(n) se exprimă ca o sumă de expresii din prima coloană multiplicate eventual cu anumite constante nenule și dacă termenii sumei respective nu sunt simultan soluții ale relației de recurență omogene asociate, atunci $f(n)^{(p)}$ se poate exprima ca sumă a expresiilor corespunzătoare din a doua coloană.

Coloana I	Coloana II
c(constantă)	m (constantă)
n	m_1n+m_0 (m_0, m_1 constante)
n^2	$m_2n^2+m_1n+m_0$ (m_0, m_1, m_2 constante)
n^u ($u \in N$)	$m_un^u + m_{u-1}n^{u-1} + \ldots + m_1n + m_0$ (coeficienții sunt constante)
r^n ($r \in R$)	mr^n (m constantă)
$\sin \alpha n$ sau $\cos \alpha n$	$m_1\sin \alpha n + m_2\cos \alpha n$ (m_1, m_2 constante)
n^ur^n	$r^n (m_un^u+m_{u-1}n^{u-1} + \ldots + m_1n + m_0)$ ($m_0, \ldots, m_u$ constante)
$r^n \sin \alpha n$ sau $r^n \cos \alpha n$	$mr^n \sin \alpha n + m_1 r^n \cos \alpha n$ (m_1, m constante)

Exemplul II.2.2.9. Să se rezolve relația de recurență $f(n) - 9f(n-1)=2n$ ($n \geq 1$; $f(0)=1$).

Relația omogenă asociată este $f(n)-9f(n-1)= 0$ cu $f(n)^{(o)} = c(9^n)$. Luând j=1 în relația (**), se observă că $p(n) = 2n$, nu este soluție a relației de recurență omogene asociate, deci se va lua $f(n)^{(p)} = m_1n + m_0$. Înlocuind în relația dată și ținând cont că $f(0)=1$ se va obține $f(n)=(41/32)9^n - (1/4)n - (9/32)$.

In stabilirea ordinului de complexitate al unor relații de recurență este utilă ***metoda iterației*** care constă în desfășurarea primilor pași și intuirea formei generale. Se demonstrează corectitudinea formei intuite prin inducție matematică.

Exemplul II.2.2.10. Să reluăm relația de recurență stabilită la problema turnurilor din Hanoi (exemplul II.2.1.7), f(n)=2f(n-1)+1 (n>=1;f(0)=0).

Prin iterare se obține f(n)=2f(n-1)+1=2(2f(n-2)+1)+1= 2^2f(n-2)+ 2+1=...=2^{n-1}f(1)+$\sum_{i=0}^{n-2} 2^i$ ceea ce conduce la soluția f(n)=2^n-1 (se demonstrează corectitudinea formulei prin inducție matematică).
Se observă foarte ușor că $f(n) \in \Theta(2^n)$.

Pentru relațiile de recurență neomogene de forma $c_n f(n)+c_{n-1} f(n-1)+c_{n-2} f(n-2)+\ldots+ c_{n-k} f(n-k)= b^n p(n)$ unde b este o constantă, iar p(n) este un polinom de gradul d în n, se poate aplica următoarea tehnică. Se consideră ecuația caracteristică de forma $(c_n \alpha^k + c_{n-1}\alpha^{k-1} + \ldots + c_{n-k})(\alpha - b)^{d+1} = 0.$ Când se obține o astfel de ecuație se procedează ca în cazul relațiilor omogene.

Exemplul II.2.2.11. Se consideră următoarea relație de recurență f(n)-2f(n-1)=3^n.

Se observă că b=3, iar p(n)=1 (polinom de gradul 0). Ecuația caracteristică este $(\alpha - 2)(\alpha - 3)^{0+1} = 0.$ Stabilirea ordinului de complexitate din acest moment devine facilă.

Exemplul II.2.2.12. Să presupunem, în continuare, că n este o putere naturală a lui 2, adică n=2^k. Să se stabilească ordinul de complexitate pentru următoarele relații de recurență:
a) f(n) = 4f(n/2)+n (n>1);
b) f(n) = 4f(n/2)+n^2 (n>1);

c) f(n) = 3f(n/2)+cn (n>1, c constantă).

a) Se va substitui n cu 2^k, f(n) = f(2^k) cu g(k) și se obține g(k)=4g(k-1)+2^k. Ecuația caracteristică pentru relația g(k)-4g(k-1) = 2^k este $(\alpha-4)(\alpha-2)^{0+1}=0$. În mod succesiv se obține: g(k) = $c_1 4^k * c_2 2^k$; f(n) = $c_1 4^{\log n} + c_2 2^{\log n} = 2c_1 n^2 + c_2 n$.
Prin urmare, f(n)=O(n^2).
Celelalte exerciții se rezolvă similar.

Tematica propusă

II.2.1. Să se rezolve următoarele relații de recurență și să se stabilească ordinul timpilor de execuție pentru algoritmii recursivi ce corespund relațiilor respective.

a) f(n+1) – 2f(n) = 5 (n ≥ 0; f(0)=1);
b) f(n+1) – f(n) = 2n+3 (n ≥ 0;f(0)=1);
c) f(n) – f(n-1) = $3n^2$ – n (n ≥ 1; f(0)=3);
d) f(n+1) – 2f(n)= 2^n (n ≥ 0; f(0) =1);
e) f(n)+nf(n-1)=n! (n>0; f(0)=1);
f) $f^2(n) - 2f(n-1) = 0\ (n \geq 1;\ f(0) = 2)$;
g) f(n) + f(n-2) = 0 (n ≥ 2; f(0)=0, f(1)=3);
h) f(n) + 4f(n-2) = 0 (n ≥ 2; f(0)=1, f(1)=1);
i) f(n) + 4f(n-1) + 4f(n-2) = 7 (n ≥ 2; f(0)=1, f(1) =2);
j) f(n) – 6f(n-1) + 9f(n-2) =0 (n ≥ 2; f(0)=5, f(1) = 12);
k) f(n) + 2f(n-1) + 2f(n-2)= 0 (n ≥ 2; f(0)=1 , f(1)=3);
l) $f^2(n+2) - 5f^2(n+1) + 4f^2(n) = 0$ (n ≥ 0; f(0) =4, f(1)=13);
m) $f^2(n+2) - 5f^2(n+1) + 6f^2(n) = 7n$ (n ≥ 0; f(0)=1, f(1)=1);
n) f(n+2) – f(n) = sin(nπ/2) (n ≥ 0; f(0)=1, f(1) =1);

II.2.2. Să se demonstreze următoarele proprietăți ale termenilor din șirul Fibonacci:

1) $\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1 \quad (n \geq 0)$;

2) $F_{k+2} \geq \phi^k$ pentru k>=0 .
Calculați
a) $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1}$
b) $F_0 + F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n}$

II.2.3. Fie f(1) , f(2) , f(3) ….o secvență de întregi definită recursiv, astfel: f(1) = 0 și $f(n) = 1 + f(\lfloor n/2 \rfloor)$ pentru n >1. Arătați că f(n) $= \lfloor \log n \rfloor$ pentru toți $n \in N$. Ce puteți afirma dacă, în loc de a folosi operatorul „$\lfloor\ \rfloor$“, folosiți operatorul „$\lceil\ \rceil$“ ? Reamintim că prin $\lceil x \rceil$ se înțelege cel mai mic întreg care depășește pe x.

II.2.4. Să se găsească relația de recurență corespunzătoare pentru calculul valorii determinantului de ordinul n ($n \geq 1$) dat mai jos ($a \in R^+$).

$$D_n = \begin{vmatrix} a\ a\ 0\ 0\ 0\ 0 \cdots\cdots 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ a\ a\ a\ 0\ 0\ 0 \cdots\cdots 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ a\ a\ a\ 0\ 0 \ldots\ldots\ldots 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \cdots\cdots 0\ 0\ a\ a\ a \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \cdots\cdots 0\ 0\ 0\ a\ a \end{vmatrix}$$

II.2.5. Să se găsească și să se rezolve o relație de recurență prin care să se stabilească numărul secvențelor de „1“ și „2“ a căror sumă a cifrelor componente să fie egală cu un număr natural dat n.
De exemplu, pentru n = 5, există secvențele: 11111; 1112; 2111; 1211;1121; 122; 221;212.

II.2.6. Găsiți și rezolvați o relație de recurență pentru calculul numărului secvențelor binare care au aceeași lungime n și nu conțin cifra unu consecutiv.