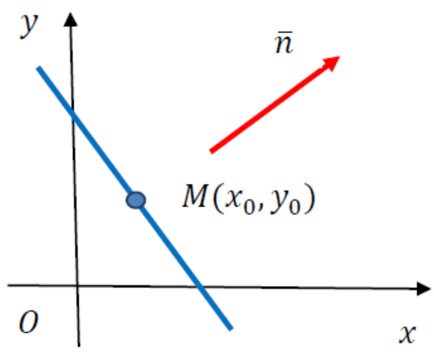
DREAPTA ÎN PLAN. DIVERSE ECUAŢII ALE DREPTEI

Diverse ecuaţii ale dreptei

Fie ca într-un plan este fixat un sistem cartezian rectangular de coordonate $O, \vec{i}, \vec{j}$.

Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct şi $\vec{n} = \{A, B\}$ un vector nenul. Atunci există o singură dreaptă l ce trece prin M_0 şi perpendicular vectorului $\bar{n}$, numit **vector normal** al dreptei l.



Un punct $M(x, y)$ aparţine dreptei l dacă şi numai dacă $\overline{M_0M} \perp \bar{n}$, de unde $\overline{M_0M} \cdot \bar{n} = 0$. Avem $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$. Obţinem

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ **(1.4.1)** - **ecuaţia dreptei determinată de punctul** $M_0(x_0, y_0)$ **şi vectorul normal** $\bar{n}$.

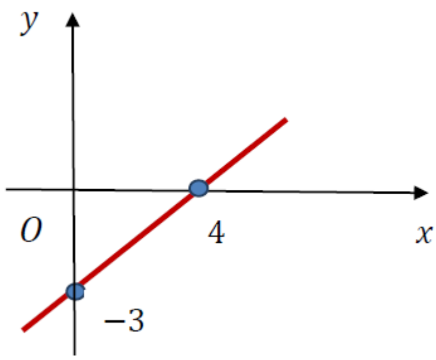
Această ecuaţie poate fi scrisă sub forma $Ax + By + C = 0$ **(1.4.2)**, unde $C = -Ax_0 - By_0$. Ecuaţia **(1.4.2)** se numeşte **ecuaţie generală a dreptei**.

Ecuaţii incomplete ale dreptei:

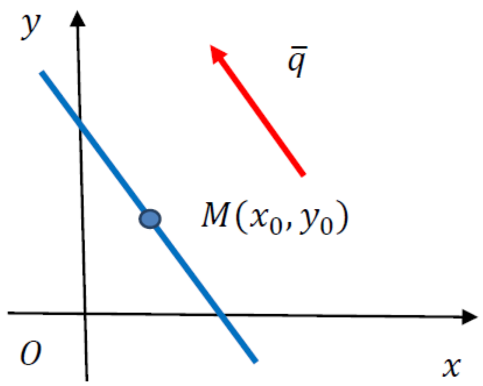
1. $C = 0$; ecuaţia $Ax + By = 0$ determină o dreaptă, care trece prin originea sistemului de coordonate.
2. $B = 0$; ecuaţia $Ax + C = 0$ determină o dreaptă paralelă axei OY (vectorul normal $\bar{n} = \{A, O\}$ al acestei drepte este perpendicular axei OY).
3. $A = 0$; ecuaţia $By + C = 0$ determină o dreaptă paralelă axei OX (vectorul normal $\bar{n} = \{O, B\}$ este perpendicular axei OX).
4. $B = C = 0$; ecuaţia $Ax = 0$ sau $x = 0$, defineşte axa OY.
5. $A = C = 0$, ecuaţia $By = 0$ sau $y = 0$, defineşte axa OX.

Dacă în ecuaţia **(1.4.2)** toţi coeficienţii sunt nenuli, atunci ecuaţia se numeşte **completă** şi poate fi scrisă sub forma $\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$ sau $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ **(1.4.3)** , numită **ecuaţie a dreptei „în segmente”.** Numerele a şi b sunt segmente tăiate de dreaptă pe axele OX şi OY, respectiv, un capăt fiind originea de coordonate. Semnele numerelor a şi b determină direcţia de la origine pe axele de coordonate.

De exemplu, dreapta $3x - 4y = 12$ poate fi scrisă sub forma $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$ şi $a = 4$, $b = -3$.



Definiţie . Se numeşte **vector director** al dreptei orice vector nenul paralel dreptei date.



Există o singură dreaptă, ce trece printr-un punct dat $M_0(x_0, y_0)$ având drept vector director vectorul $\vec{q} = \{m, n\}$. Să determinăm ecuaţia acestei drepte. Fie $M(x, y)$ un punct arbitrar al dreptei date, atunci vectorii $\vec{q}$ şi $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ sunt coliniari. Din condiţia de coliniaritate rezultă: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ **(1.4.4)** numită **ecuaţia canonică** a dreptei.

Fie punctele distincte $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$. Vectorul $\vec{q} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ este vector director al dreptei M_1M_2. Folosind formula **(1.4.4)**, obţinem:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$ **(1.4.5)** – **ecuaţia dreptei ce trece prin două puncte**.

Ecuaţia **(1.4.5)** mai poate fi scrisă sub forma: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y - y_1 \end{vmatrix} = 0$ sau $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **(1.4.6).**

Astfel, **punctele** $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ **sunt coliniare** $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

În ecuaţia canonică a dreptei, notând fiecare raport cu t, $t \in R$, obţinem:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases},$$ **(1.4.7) – ecuaţii parametrice ale dreptei**.

Fie dată o dreaptă l. Notăm cu α unghiul format de direcţia pozitivă a axei OX şi dreapta l, măsurat împotriva mişcării acelor ceasornicului. Avem că $\alpha \in [0^0, 180^0)$ (sau $\alpha \in [0, \pi)$). Unghiul α se numeşte ***unghi de înclinare*** a dreptei l faţă de OX. Dacă $\alpha = 0^0$, dreapta se numeşte ***orizontală;*** dacă $\alpha = 90^0$, dreapta se numeşte ***verticală***. În celelalte cazuri, dreapta se numeşte ***oblică***. Pentru orice dreaptă neverticală se defineşte numărul $m = tg\alpha$, numit **pantă** a dreptei. Dreapta verticală nu are pantă.

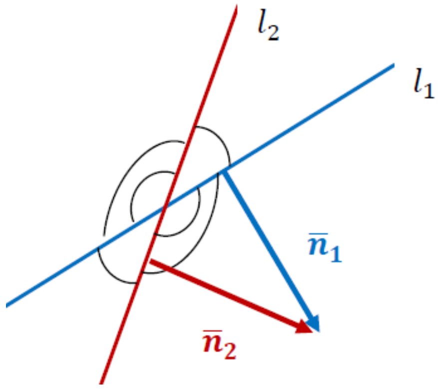
Fie dreapta M_1M_2 cu $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$. Evident, **panta** dreptei este $m = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ **(1.4.8).**

Ecuaţia **(1.4.5)** poate fi scrisă astfel: $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ sau, folosind formula **(1.4.8),** avem $y-y_1=m(x-x_1)$ **(1.4.9).** Ecuaţia poate fi utilizată când se cunoaşte panta m a dreptei şi un punct $M_0(x_0,y_0)$ ce aparţine dreptei, obținând $y-y_0=m(x-x_0)$ - **ecuaţia dreptei determinată de punct cu pantă.**

Din ecuația de mai sus rezultă $y=mx+n$ **(1.4.10),** unde $n=y_0-mx_0$
Panta dreptei $Ax+By+C=0$ cu $B\neq 0$ este egală cu $m=-A/B$.

Unghiul dintre drepte. Condiţiile de paralelism şi perpendicularitate

În cele ce urmează vom determina unghiul dintre drepte, fiind date diferite ecuaţii ale dreptei.

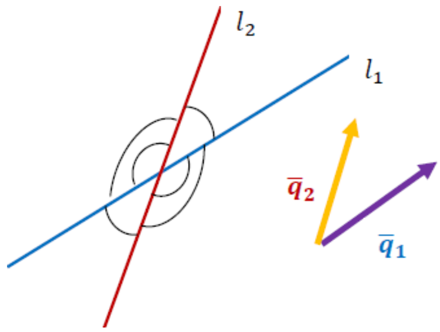


Fie dreptele $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ şi $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$. Ele formează două perechi de unghiuri, congruente două câte două.
Vectorii normali respectivi $\vec{n_1}=\{A_1,B_1\}$ şi $\vec{n_2}=\{A_2,B_2\}$ formează un unghi, congruent cu una dintre perechile de unghiuri formate de l_1 şi l_2. Atunci

$$\cos(\sphericalangle l_1,l_2)=\cos\left(\sphericalangle\vec{n_1},\vec{n_2}\right)=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

Este evident că $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \overline{n_1}\perp\vec{n_2}\Leftrightarrow \overline{n_1}\cdot\overline{n_2}=0$ şi $A_1A_2+B_1B_2=0$ este **condiţia de perpendicularitate** a dreptelor l_1 şi l_2. Iar $l_1\parallel l_2 \Leftrightarrow \overline{n_1}\parallel\overline{n_2}\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ este **condiţia de paralelism** a dreptelor l_1 şi l_2.

Fie că dreptele l_1 şi l_2 au ecuaţiile canonice



$l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}$ şi $l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$. În md similar, unghiul dintre drepte este determinat de unghiul dintre vectorii directori $\vec{q_1}=\{m_1,n_1\}$ şi $\vec{q_2}=\{m_2,n_2\}$, adică

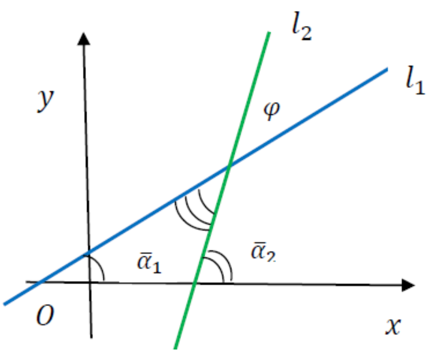
$$\cos(\sphericalangle l_1,l_2)=\cos\left(\sphericalangle\overline{q_1},\overline{q_2}\right)=\frac{\overline{q_1}\cdot\overline{q_2}}{|\overline{q_1}|\cdot|\overline{q_2}|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}.$$

Condiţia de **perpendicularitate** a dreptelor l_1 şi l_2 rezultă din:

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow\overline{q_1}\perp\vec{q_2}\Leftrightarrow\overline{q_1}\cdot\overline{q_2}=0,\text{ de unde } m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Avem: $l_1\parallel l_2\Leftrightarrow\overline{q_1}\parallel\overline{q_2}\Leftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ - **condiţia de paralelism** a dreptelor l_1 şi l_2.

Fie dreptele definite de ecuaţiile cu pantă, adică $l_1 : y = m_1 x + n_1$, $l_2 : y = m_2 x + n_2$. Să determinăm măsura unghiului format de aceste drepte. Din reprezentarea de mai jos



avem $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$. De unde $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ - unghiul dintre dreptele l_1 şi l_2.

Obţinem că $tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$. Deoarece

$m_1 = tg\alpha_1,\ m_2 = tg\alpha_2,$ atunci $tg\varphi = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$.

În general, $tg\varphi = \left|\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$.

Este evident că $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Cum $tg\dfrac{\pi}{2}$ nu există, avem $1 + m_1 m_2 = 0$. sau

$m_1 m_2 = -1$ - **condiţia de perpendicularitate** a dreptelor.

Dreptele l_1 şi l_2 sunt **paralele**, dacă şi numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

Aria triunghiului. Distanţa de la punct la dreaptă

Fie triunghiul $M_1M_2M_3$ cu $M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ M_3(x_3, y_3)$.

Avem $A_{M_1M_2M_3} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| \cdot \left|\overline{M_1M_3}\right| \sin(\sphericalangle M_2M_1M_3)$. Ştim că:

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad \left|\overline{M_1M_3}\right| = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2},$$

$$\sin(\sphericalangle M_2M_1M_3) = \sqrt{1 - \cos^2(\sphericalangle M_2M_1M_3)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3}}{\left|\overline{M_1M_2}\right| \cdot \left|\overline{M_1M_3}\right|}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left|\overline{M_1M_2}\right|^2 \cdot \left|\overline{M_1M_3}\right|^2 - \left(\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3}\right)^2}}{\left|\overline{M_1M_2}\right| \cdot \left|\overline{M_1M_3}\right|}.$$

Fie $\overline{M_1M_2} = \{a_1, b_1\},\ \overline{M_1M_3} = \{a_2, b_2\}$. Găsim

$$\left|\overline{M_1M_2}\right|^2 \cdot \left|\overline{M_1M_3}\right|^2 - \left(\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3}\right)^2 = \left(a_1^2 + b_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2\right) - (a_1a_2 + b_1b_2)^2 = (a_1b_2 - b_1a_2)^2.$$

Atunci, $\sin(< M_2M_1M_3) = \dfrac{|a_1b_2 - b_1a_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

Deci, $A_{\Delta M_1M_2M_3} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \cdot \dfrac{|a_1b_2 - b_1a_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \dfrac{1}{2}|a_1b_2 - b_1a_2| = \dfrac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Astfel $A_{\Delta M_1M_2M_3} = \dfrac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$ sau $A_{\Delta M_1M_2M_3} = \dfrac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ **(1.4. 11)**

Fie dreapta $l: Ax + By + C = 0$ şi punctul $M_0(x_0, y_0)$. Distanţa de la M_0 până la l se determină după formula $d(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ **(1.4. 12).** Lăsăm demonstraţia acestei formule pe seama cititorului.