EP 1.4.

PRODUSELE VECTORIAL ŞI MIXT

Produsul scalar

1. Vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ cu $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ formează un unghi de mărimea $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Să se determine: $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\vec{a}^2$; $\vec{b}^2$; $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$; $(\vec{a} + 3\vec{b})^2$; $|\vec{a} + 3\vec{b}|$; $\cos(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$; $\text{pr}_{2\vec{b}}(\vec{a} + 3\vec{b})$.
2. Se dau vectorii unitari $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, astfel încât $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Să se calculeze $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.
3. Fie vectorii $\vec{a} = \{4; -2; -4\}, \vec{b} = \{6; -3; 2\}$. Să se calculeze:
   1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $|\vec{a}|$; 3) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$; 4) $\cos(\vec{a}, \vec{b})$; 5) $\text{pr}_{\vec{b}}\vec{a}$.
4. Să se calculeze lucrul rezultantei $\vec{F}$ a forțelor $\overrightarrow{F_1} = \{3; -4; 5\}$, $\overrightarrow{F_2} = \{2; 1; -4\}$, $\overrightarrow{F_3} = \{-1; 6; 2\}$ aplicate la punctul material, care sub acțiunea lor se mișcă liniar din punctul $M_1(4; 2; -3)$ în punctul $M_2(7; 4; 1)$.
5. Știind vârfurile triunghiului *ABC*: $A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0), C(3; -2; 1)$, să se calculeze măsura unghiului exterior al vârfului *B*.
6. Se cunosc coordonatele $A(1; -2; 2), B(1; 4; 0), C(-4; 1; 1), D(-5; -5; 3)$ ale vârfurilor patrulaterului *ABCD*. Să se determine măsurile unghiurilor formate de diagonalele lui.
7. Pentru ce valori ale lui α vectorul $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ și $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ sunt reciproc perpendiculari.
8. Să se determine vectorul $\vec{b}$, coliniar vectorului $\vec{a} = \{6; -8; -7{,}5\}$, care formează cu axa *Oz* un unghi ascuțit, și $|\vec{b}| = 50$.
9. Să se determine vectorul $\vec{b}$, coliniar vectorului $\vec{a} = \{2; 1; -1\}$, astfel încât $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$.
10. Să se determine vectorul $\vec{c}$, perpendicular vectorilor $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$, și care formează cu axa *Oy* un unghi obtuz, știind, că $|\vec{c}| = 14$.
11. Să se determine proiecția vectorului $\vec{a} = \{\sqrt{2}; -3; -5\}$ pe axa, ce formează cu axele de coordonate *Ox*, *Oz* unghiurile $\alpha = 45°, \gamma = 60°$, iar cu axa *Oy* – unghi ascuțit.
12. Să se determine vectorul $\vec{b}$, perpendicular axei *Oz* și vectorului $\vec{a} = \{8; -15; 3\}$, și care formează cu axa *Ox* un unghi ascuțit, știind, că $|\vec{b}| = 51$.
13. Să se determine vectorul, care reprezintă proiecția ortogonală a vectorului $\{-14; 2; 5\}$ pe dreapta cu vector director $\{2; -2; 1\}$.
14. Fie punctele $A(2; 1), B(5; 5)$. Să se determine extremitatea vectorului $\overrightarrow{AC}$, obținut prin rotația vectorului $\overrightarrow{AB}$ cu un unghi de $\frac{5\pi}{6}$.
15. Sunt date două vârfuri vecine $A(-3; 2)$ și $B(2; 4)$ ale unui pătrat. Să se determine celelalte două vârfuri.

EP 1.4.

PRODUSELE VECTORIAL ŞI MIXT

Produsul vectorial

1. Vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ formează unghiul $\frac{\pi}{6}$. Știind că $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 5$, să se calculeze $|\vec{a} \times \vec{b}|$.
2. Fie $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 2$ și $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$. Să se găsească $|\vec{a} \times \vec{b}|$.
3. Vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ formează unghiul $\frac{2\pi}{3}$. Știind că $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$, să se calculeze: $(\vec{a} \times \vec{b})^2$, $\left((2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b})\right)^2$.
4. Fie vectorii $\vec{a} = \{3; -1; -2\}, \vec{b} = \{1; 2; -1\}$. Să se găsească: $\vec{a} \times \vec{b}$, $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (-3\vec{a} - 2\vec{b})$.
5. Se dau punctele $A(2; -2; 0)$, $B(1; 2; 3)$, $C(-2; 1; 1)$.
   Să se determine: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$, $(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}) \times \overrightarrow{CB}$.
6. Fie $A(1; 2; 0)$, $B(1; 0; -2)$, $C(2; 3; 6)$. Să se determine aria triunghiului *ABC*.
7. Fie $A(1; -2; 1)$, $B(0; 2; 3)$, $C(-2; 1; 0)$ vârfurile unui triunghi. Se cere lungimea înălțimii coborâte din *A* pe *BC*.
8. Să se găsească sinusul unghiului format de vectorii: $\vec{a} = \{2; -2; 1\}, \vec{b} = \{2; 3; 6\}$.
9. Să se găsească vectorul $\vec{x}$, perpendicular vectorilor $\vec{a} = \{4; -2; -3\}$ și $\vec{b} = \{0; 1; 3\}$, de modul 26 și care formează cu axa *OY* un unghi obtuz.
10. Să se găsească vectorul $\vec{b}$, perpendicular axei *OZ* și vectorului $\vec{a} = \{8; -15; 3\}$, de modul $|\vec{b}| = 51$, și care formează un unghi ascuțit cu axa *OX*.

Produsul mixt

1. Vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt doi câte doi perpendiculari și formează un triplet drept. Se știe că: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$. Să se găsească $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.
2. Vectorul $\vec{c}$ este perpendicular vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$. Știind, că $\vec{a}$ și $\vec{b}$ formează un unghi de $30°$ și $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 3$. Să se calculeze $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.
3. Fie vectorii $\vec{a} = \{1; -1; 3\}, \vec{b} = \{-2; 2; 1\}, \vec{c} = \{3; -2; 5\}$. Să se găsească $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.
4. Să se cerceteze coplanaritatea vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, unde:
   a) $\vec{a} = \{2; 3; -1\}, \vec{b} = \{1; -1; 3\}, \vec{c} = \{1; 9; -11\}$;
   b) $\vec{a} = \{3; -2; 1\}, \vec{b} = \{2; 1; 2\}, \vec{c} = \{3; -1; -2\}$.
5. Să se găsească volumul piramidei ABCD, unde $A(2; 0; -2)$, $B(5; 1; 3)$, $C(0; 1; -1)$, $D(2; 1; -3)$.
6. Fie vectorii $\vec{p} = \{3; -2; 1\}, \vec{q} = \{-1; 1; -2\}, \vec{r} = \{2; 1; -3\}, \vec{a} = \{11; -6; 5\}$. Să se demonstreze, că vectorii $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ formează bază și să se găsească coordonatele vectorului $\vec{a}$ în această bază.