C 1.3

PRODUSE DE VECTORI: SCALAR, VECTORIAL, MIXT. PROPRIETĂŢI. APLICAŢII

Produsul scalar a doi vectori. Proprietăţi

În cadrul algebrei vectoriale se studiază două tipuri de produse a doi vectori: produsul scalar şi produsul vectorial.

Vom numi **unghi dintre doi vectori**, unghiul format de alţi doi vectori, egali celor daţi, dar cu origine comună.

Definiţie. Prin **produs scalar** a doi vectori vom înţelege numărul egal cu produsul dintre lungimile acestor vectori şi cosinusul unghiului dintre ei. Se notează cu $(\vec{a}, \vec{b})$ sau $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Deci, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$.

Produsul scalar al vectorilor posedă următoarele proprietăţi:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$
2) $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot pr_{\overline{a}} \overline{b} = |\overline{b}| \cdot pr_{\overline{b}} \overline{a}$.
3) Pentru ca doi vectori să fie ortogonali e necesar şi suficient ca $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$
4) $(\lambda \overline{a}) \cdot \overline{b} = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{b}) = \overline{a} \cdot (\lambda \overline{b})$, $(\lambda \in R)$
5) $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$
6) $\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}^2 = |\overline{a}|^2 \Rightarrow |\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}^2}$
7) Din proprietatea 6) rezultă că $\overline{i} \cdot \overline{i} = |\overline{i}|^2 = 1 = \overline{j} \cdot \overline{j} = \overline{k} \cdot \overline{k}$ **,** iar din proprietatea 3) avem că $\overline{i} \cdot \overline{j} = \overline{j} \cdot \overline{k} = \overline{k} \cdot \overline{i} = 0$

Produsul scalar în coordonate. Aplicaţii

Fie vectorii $\overline{a} = x_1 \overline{i} + y_1 \overline{j} + z_1 \overline{k}$; $\overline{b} = x_2 \overline{i} + y_2 \overline{j} + z_2 \overline{k}$.

Aplicând proprietăţile produsului scalar, obţinem:

1. $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

2. Fie vectorul $\bar{a} = \{x, y, z\}$. Folosind proprietatea 6 şi formula de calcul al produsului scalar în coordonate, avem că $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, adică lungimea vectorului este egală cu rădăcina pătrată din suma pătratelor coordonatelor sale rectangulare.

3. Distanţa $|AB|$ dintre punctele $A(x_1, y_1, z_1)$ şi $B(x_2, y_2, z_2)$ este egală cu modulul vectorului $\overline{AB}$, adică $|\boldsymbol{AB}| = \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2 + (\boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1})^2}$.

C 1.3

PRODUSE DE VECTORI: SCALAR, VECTORIAL, MIXT. PROPRIETĂŢI. APLICAŢII

4. Fie $\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$, $\overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$ careva vectori nenuli, atunci

$$\cos\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

5. Oricare ar fi numerele reale $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ are loc

$$(x_1\,x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \le \left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right),$$

numită **inegalitatea Cauchy-Buneakovski-Schwarz**.

6. Proiecţia vectorului $\overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$ pe vectorul nenul $\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$ este egală cu $pr_{\overline{a}}\overline{b} = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$.

7. Vectorii $\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$, şi $\overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$ sunt ortogonali dacă şi numai dacă $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

8. În mecanică **lucrul A al forţei** $\overline{F}$ la deplasarea uni punct material de-a lungul unei axe S este $A = \overline{F}\cdot\overline{S} = |\overline{F}|\cdot|\overline{S}|\cdot\cos\measuredangle\left(\overline{F},\overline{S}\right)$, unde $\overline{S}$ este vectorul deplasării.

Produsul vectorial a doi vectori. Proprietăţi

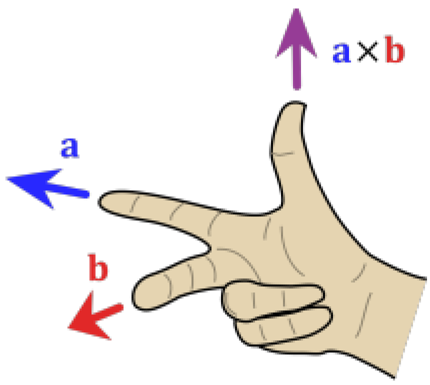
Definiţie. Prin **produs vectorial** al vectorului $\overline{a}$ la vectorul $\overline{b}$ vom înţelege vectorul $\overline{c}$, care verifică condiţiile:

a) $|\overline{c}| = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\sin\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)$;

b) $\overline{c}\perp\overline{a}, \overline{c}\perp\overline{b}$;

c) vectorii $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ formează un triplet de dreapta

Se notează cu $\overline{a}\times\overline{b}.$



Produsul vectorial verifică următoarele proprietăţi:

1) $\overline{a}\times\overline{b}. = \overline{0}$ dacă şi numai dacă aceşti vectori sunt coliniari.

Demonstraţie: Dacă cel puţin unul din vectori este nul, atunci afirmaţia este evidentă. Presupunem că nici unul din vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ nu este nul, atunci expresia $\overline{a}\times\overline{b}. = \overline{0}$ este echivalentă cu coliniaritatea vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, deoarece $\sin\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right) = 0.$

2) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$.

3) $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda \bar{b})$

4) $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$

Produsul vectorial în coordonate

5) $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$, $\bar{i} \times \bar{j} = -\bar{j} \times \bar{i} = \bar{k}$, $\bar{j} \times \bar{k} = -\bar{k} \times \bar{j} = \bar{i}$, $\bar{k} \times \bar{i} = -\bar{i} \times \bar{k} = \bar{j}$

6) Fie $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$.

Folosind proprietăţile produsului vectorial, avem:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{i}(y_1 z_2 - y_2 z_1) - \bar{j}(x_1 z_2 - x_2 z_1) + \bar{k}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \text{ sau}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{i}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Aplicaţii ale produsului vectorial

1. Modulul produsului vectorial al vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ este egal cu aria paralelogramului construit pe acești vectori. Astfel, dacă *ABCD* este paralelogram, $\boldsymbol{A_{ABCD} = |\overline{AB} \times \overline{AD}|}$.

2. Aria triunghiului *ABC* este egală cu $\boldsymbol{A_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|}$.

Problemă: Fie triunghiul *ABC* cu $A(-1; -2; 4)$, $B(-3; -1; 2)$, $C(3; -2; 1)$. Să se calculeze

a) măsura unghiului *ABC*,

b) aria triunghiului,

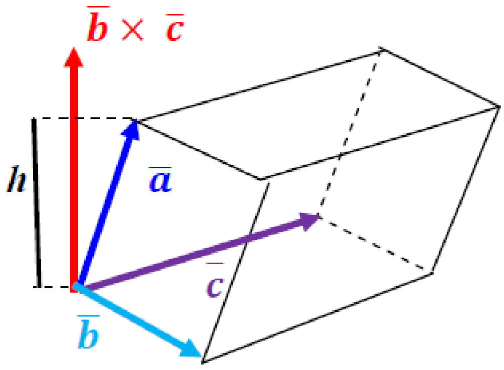
c) lungimea înălțimii *AH*.

Produsul mixt a trei vectori. Proprietăţi

Definiţie. Se numeşte **produs mixt** a vectorilor $\bar{a}, \bar{b}$ şi $\bar{c}$ un număr egal cu produsul scalar dintre vectorul $\bar{a}$ şi vetorul ce reprezintă produsul vectorial al vectorilor $\bar{b}$ şi $\bar{c}$, adică $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$. Se notează cu $(\boldsymbol{\bar{a}}, \boldsymbol{\bar{b}}, \boldsymbol{\bar{c}})$.

Deci $(\boldsymbol{\bar{a}}, \boldsymbol{\bar{b}}, \boldsymbol{\bar{c}}) = \boldsymbol{\bar{a}} \cdot (\boldsymbol{\bar{b}} \times \boldsymbol{\bar{c}})$.

Teoremă. Modulul produsului mixt a trei vectori necoplanari $\bar{a}, \bar{b}$ şi $\bar{c}$ este egal cu volumul paralelipipedului construit pe acești vectori.



Demonstraţie. Fie că $\bar{a}, \bar{b}$ şi $\bar{c}$ formează un triplet drept. Construim paralelipipedul determinat de acești vectori. Aria bazei este $A = |\bar{b} \times \bar{c}|$, iar $pr_{\bar{b} \times \bar{c}}\bar{a} = h$ este înălțimea paralelipipedului. Atunci $\boldsymbol{V} = A \cdot h = |\bar{b} \times \bar{c}| \cdot pr_{\bar{b} \times \bar{c}}\bar{a} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (\boldsymbol{\bar{a}}, \boldsymbol{\bar{b}}, \boldsymbol{\bar{c}})$.

Consecință. Volumul tetraedruui $ABCD$ este egal cu $\boldsymbol{V_{ABCD} = \frac{1}{6}|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|}$.

Proprietăţi ale produsului mixt:

1. Produsul mixt este invariant la permutări circulare și își schimbă semnul la schimbarea ordinii a doi factori vecini. Adică

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}),\ (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}).$$

2. Vectorii $\bar{a}, \bar{b}$ şi $\bar{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$.
3. Vectorii $\bar{a}, \bar{b}$ şi $\bar{c}$ formează bază în spațiu dacă şi numai dacă $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \neq 0$.

Vom exprima produsul mixt al vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ prin coordonatele lor carteziene rectangulare.

Fie $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$, $\bar{c} = x_3\bar{i} + y_3\bar{j} + z_3\bar{k}$.

Deoarece $\bar{b} \times \bar{c} = \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right)$, avem

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Deci,

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$