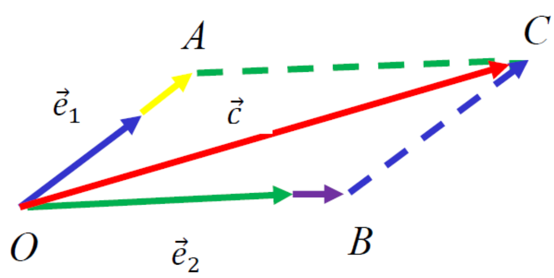
C 1.2. BAZE ÎN PLAN ŞI ÎN SPAŢIU. SISTEME DE COORDONATE. OPERAŢII LINIARE CU VECTORI IN COORDONATE

Baze în plan şi în spaţiu. Sisteme carteziene de coordonate. Coordonatele vectorului şi punctului. Operaţii liniare cu vectori în coordonate

Definiţie 1.2.1. Vom numi **bază în plan** orice pereche $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de vectori necoliniari ai planului.

Teorema 1.2.2. Orice vector $\vec{c}$ din plan poate fi descompus după vectorii bazei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.



Demonstraţie: Vom construi dintr-un punct O vectorii $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Fie că $\vec{c}$ nu este coliniar cu nici unul dintre vectorii bazei. Din C ducem drepte paralele axelor ce conțin vectorii $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Atunci obținem paralelogramul $OACB$ (vezi desenul) unde $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

Vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ sunt coliniari vectorilor $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, respectiv. Atunci există numerele α, β astfel încât $\overrightarrow{OA} = \alpha \cdot \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB} = \beta \cdot \vec{e}_2$. Deci, $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2$.

Dacă vectorul $\vec{c}$ este coliniar cu unul dintre vectorii bazei, de exemplu cu $\vec{e}_1$. Atunci $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2$.

Numerele α și β se numesc **coordonate ale vectorului $\vec{c}$ ân baza** $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ și aceste coordonate sunt unice. Se scrie $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2$ sau $\vec{c} = \{\alpha, \beta\}$.

Definiţie 1.2.3. Trei vectori se numesc **coplanari,** dacă ei sunt situați în acelaș plan sau în plane paralele.

Astfel, trei vectori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt **coplanari** dacă vectorii, egali celor dați, dar cu origine comună, se află într-un plan.

Definiţie 1.2.4. Vom numi **bază în spaţiu** orice triplet $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de vectori necoplanari.

Teorema 1.2.5. Orice vector $\vec{c}$ din spaţiu poate fi descompus în mod unic după vectorii bazei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Astfel există numerele α, β, γ încât

$$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3$$

Numerele α, β, γ se numesc **coordonate ale vectorului $\vec{c}$ în baza** $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Se mai scrie $\vec{c} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Teorema 1.2.6. Fie că în spaţiu este fixată o bază. Atunci:

1. **la înmulţirea vectorului cu un scalar coordonatele vectorului se înmulţesc cu numărul dat,**
2. **la adunarea vectorilor coordonatele lor respective se adună.**

Într-adevăr, dacă $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ este o bază în spaţiu si fie că $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ şi $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Atunci

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 \cdot \vec{e}_1 + y_1 \cdot \vec{e}_2 + z_1 \cdot \vec{e}_3) + (x_2 \cdot \vec{e}_1 + y_2 \cdot \vec{e}_2 + z_2 \cdot \vec{e}_3) =$$
$$= (x_1 + x_2) \cdot \vec{e}_1 + (y_1 + y_2) \cdot \vec{e}_2 + (z_1 + z_2) \cdot \vec{e}_3$$

sau

$$\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}$$

În mod similar se arată că dacă $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha\vec{a} = \{\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1\}$.

Prin **sistem cartezian de coordonate** vom înţelege o totalitate $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ formată dintr-un punct şi o bază. Punctul O îl vom numi **originea** sistemului de coordonate, iar cele trei axe, coorientate vectorilor bazei şi care au originea în punctul O,- **axe de coordonate**. De obicei ele se notează cu Ox, Oy, Oz şi se numesc respectiv - **axa absciselor, axa ordonatelor** şi **axa aplicatelor**. Planele, care trec prin oricare două axe, se numesc **plane de coordonate**.

Fie $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ un sistem cartezian de coordonate, A un punct arbitrar. Poziţia punctului A în spaţiu se determină de vectorul $\overrightarrow{OA}$, numit **rază vectoare** a punctului A. Fie $\overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3$. Coordonatele razei vectoare $\overrightarrow{OA}$ se numesc **coordonate ale punctului** A în sistemul dat de coordonate. Astfel, **fiecărui punct din spaţiu i se pune în corespondenţă un triplet ordonat de numere reale** (**coordonate**), care se notează cu **A(*x*, *y*, *z*)**. Conform teoremei 1.2.5. coordonatele punctului în sistemul dat de coordonate se determină în mod unic. Este adevărată şi afirmaţia inversă: fiecărui triplet ordonat de numere reale **(*x*, *y*, *z*)** îi corespunde punctul cu coordonatele **(*x*, *y*, *z*).**

Rezolvarea unor probleme prin metoda coordonatelor

Problema 1. Să se determine coordonatele vectorului , dacă se cunosc coordonatele originii şi coordonatele extremităţii sale.

Soluţie: Fie că în sistemul cartezian de coordonate se cunosc coordonatele extremităţilor vectorului $\overrightarrow{AB}$, unde $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.

Atunci $\overrightarrow{OA} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + y_1 \cdot \vec{e}_2 + z_1 \cdot \vec{e}_3$, $\overrightarrow{OB} = x_2 \cdot \vec{e}_1 + y_2 \cdot \vec{e}_2 + z_2 \cdot \vec{e}_3$.

Deoarece $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, obţinem: $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Deci, **pentru a determina coordonatele unui vector trebuie de scăzut din coordonatele extremităţii coordonatele originii vectorului.**

Problema 2. Împărţirea segmentului în raportul dat. Fie date punctele $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ şi numărul $\lambda \neq -1$. Să se determine pe segmentul AB un punct $C(x, y, z)$, astfel încât $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$.

Soluţie: Vom nota razele vectoare ale punctelor *A, B* şi *C* respectiv prin $\overline{r_1}, \overline{r_2}$ şi $\overline{r}$. Cum $\overline{AC} = \overline{r} - \overline{r_1}$, $\overline{CB} = \overline{r_2} - \overline{r}$, atunci $\overline{r} - \overline{r_1} = \lambda(\overline{r_2} - \overline{r})$. De aici rezultă că $\overline{r} = \dfrac{\overline{r_1} + \lambda\overline{r_2}}{1+\lambda}$. Trecînd în ultima egalitate la scrierea pe coordonate obţinem:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Dacă λ =1, atunci *C* este **mijlocul segmentului** *AB* şi $C\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Vă propunem să rezolvaţi următoarea problemă.

Problema 3. Fie triunghiul *ABC*, unde $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$. Atunci centrul de greutate al triunghiului are coordonate

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right).$$

Problema 4. Să se determine **condiţia de coliniaritate** a doi vectori.

Soluţie: Fie că vectorii nenuli $\overline{a} = x_1\overline{e}_1 + y_1\overline{e}_2 + z_1\overline{e}_3$ şi $\overline{b} = x_2\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + z_2\overline{e}_3$ sunt coliniari. Atunci există un scalar λ, astfel încât $\overline{a} = \lambda\overline{b}$, de unde

$$x_1\overline{e}_1 + y_1\overline{e}_2 + z_1\overline{e}_3 = \lambda(x_2\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + z_2\overline{e}_3) = (\lambda x_2)\overline{e}_1 + (\lambda y_2)\overline{e}_2 + (\lambda z_2)\overline{e}_3.$$

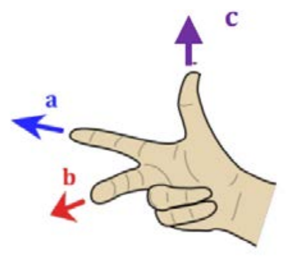
Deoarece coordonatele vectorului în careva bază se determină în mod unic, obţinem

$x_1 = \lambda x_2$, $y_1 = \lambda y_2$, $z_1 = \lambda z_2$ sau $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$ - **condiţia de coliniaritate a vectorilor.**

Sistemul cartezian rectangular de coordonate

Considerăm tripletul de vectori necoplanari $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Acest triplet îl vom numi **de dreapta,** dacă din extremitatea celui de-al treilea vector $\vec{c}$ cea mai mică rotaţie de la primul vector $\vec{a}$ spre vectorul $\vec{b}$ se face împotriva mişcării acelor ceasornicului. În caz contrar tripletul se numeşte **de stânga**. Tripletul de dreapta poate fi reprezentat prin degetele: mare, arătător şi mijlociu ale mânii drepte, iar cel de stânga - prin degetele respective ale mânii stângi.



triplet de dreapta

Un sistem cartezian de coordonate se numeşte **de dreapta** (**de stânga**), dacă baza sa este ordonată ca un triplet de vectori de dreapta (stânga).

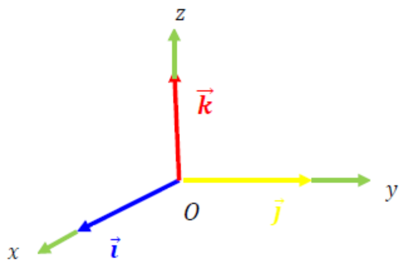
În continuare, dacă nu se specifică, **vom considera doar sisteme de coordonate de dreapta**.

C 1.2.

BAZE ÎN PLAN ŞI ÎN SPAŢIU. SISTEME DE COORDONATE. OPERAŢII LINIARE CU VECTORI IN COORDONATE

O **bază** se numeşte **ortogonală** dacă vectorii ei sunt doi câte doi ortogonali (perpendiculari). Sistemul cartezian de coordonate se numeşte **rectangular** dacă baza sa este ortogonală.

O **bază** se numeşte **ortonormată** dacă ea este ortogonală şi vectorii ei sunt unitari. Această bază se notează standard cu $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$.

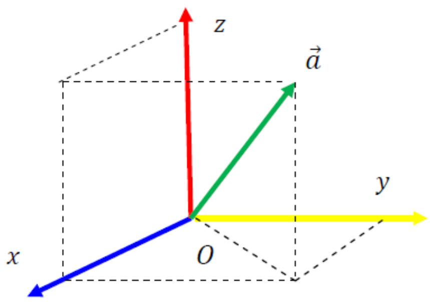


În continuare vom considera doar sisteme carteziene rectangulare cu baza $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$. Axa Ox este coorientată vectorului $\vec{i}$, axa Oy -vectorului $\vec{j}$, iar Oz - vectorului $\vec{k}$.

Notă:

1). Avem că $\vec{i}=\{1,0,0\}$, $\vec{j}=\{0,1,0\}$ $\vec{k}=\{0,0,1\}$.

2) Dacă $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$, atunci $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.



3) Fie că vectorul $\vec{a}$ formează cu axele de coordonate $Ox,\ Oy,\ Oz$ unghiurile α,β,γ, respectiv. Versorul vectorului $\bar{a}$ este $\overline{a_0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$. Atunci $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ sunt numite **cosinusuri directoare** ale vectorului $\bar{a}$. Are loc $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

4) Deoarece $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}_0$, semnele coordonatelor vectorului coincid cu semnele coordonatelor versorului său. Astfel, **după semnele coordonatelor vectorului se poate determina tipul unghiului format de vector cu axele de coordonate**. De exemplu, vectorul $\bar{a}=\{1,-2,0\}$ formează cu axa OX un unghi ascuţit, cu axa OY un unghi obtuz, iar cu axa OZ un unghi drept.

Problemă: Să se cerceteze dacă punctele $A(3,-1,\ 2)$, $B(1,\ 2,-1)$, $C(-1{,}1,-3)$, $D(3,-5{,}3)$ servesc drept vârfuri ale unui trapez.

Problemă: Fie $\vec{c}=16\vec{i}-15\vec{j}+12\vec{k}$. Să se determine vectorul $\bar{d}$, coliniar vectorului $\vec{c}$, opus orient cu $\vec{c}$, astfel încât $|\bar{d}|=75$.

Problemă: Fie daţi vectorii $\bar{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ şi $\bar{b}=-\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$. Să se determine coordonatele vectorului $\vec{c}$, orientat în direcţia bisectoarei unghiului format de vectorii $\vec{a}$ *si* $\vec{b}$, astfel încât: $|\vec{c}|=1$