C 1.1

VECTORI ÎN PLAN ŞI SPAŢIU. OPERAŢII LINIARE CU VECTORI. PROPRIETĂŢI

- **Mărimi scalare şi vectoriale**
- **Operaţii liniare cu vectori. Proprietăţi**

Mărimi scalare şi vectoriale

În fizică, precum şi în alte domenii ale ştiinţelor exacte, se folosesc două tipuri de mărimi: **scalare** şi **vectoriale**.

Mărimile se numesc **scalare**, dacă sunt caracterizate numai de valori numerice. Exemple de mărimi scalare sunt temperatura, masa, densitatea, unghiul, aria, volumul, sarcina electrică, rezistenţa. Cu toate acestea, ar trebui să se distingă două tipuri de mărimi scalare: **pur scalare** şi **pseudoscalare**. Mărimea pur scalară este determinată de un număr care nu depinde de alegerea axelor de referinţă. Exemple de mărimi pur scalare pot servi temperatura, masa, densitatea. Mărimea pseudoscalară este determinată de un număr, valoarea absolută a căruia nu depinde de alegerea axelor de referinţă. Cu toate acestea, semnul acestui număr depinde de alegerea direcţiei pozitive pe axele de coordonate. Unghiul, aria, volumul sunt mărimi pseudoscalare.

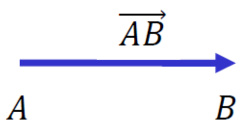
Geometric, scalarul poate fi reprezentat printr-un punct pe axa reală.

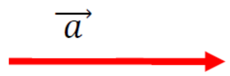
Mărimea **vectorială** (**vectorul**) este caracterizat de două elemente de natură diferită: elementul algebric - un număr care caracterizează lungimea vectorului şi elementul geometric – direcţia vectorului. Există trei tipuri de vectori: liberi, legaţi, glisanţi. Fiecare dintre ele defineşte o totalitate de vectori cu proprietăţi specifice. Mai exact, aceste tipuri diferă prin definirea noţiunii de egalitate a vectorilor.

Vectori liberi

Definiţia 1.1.1. Vom numi **vector** orice segment orientat.

Direcţia vectorului este determinată de faptul că unul dintre capete este considerat **origine**, iar celălalt - **extremitate**. Prin urmare, vectorul poate fi considerat drept o pereche ordonată de puncte. Vectorul se notează cu: $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$ sau $\bar{a}$.

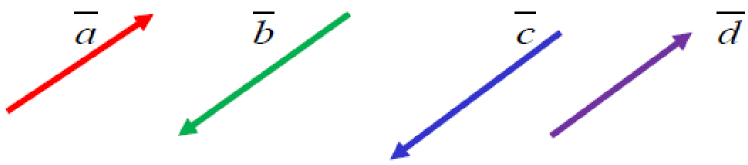




Definiţia 1.1.2. Lungimea segmentului, ce reprezintă vectorul, se numeşte **modul, lungime** sau **valoare absolută** a vectorului. Se notează prin $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overline{AB}|$ sau $|\bar{a}|$.

Definiţia 1.1.3. Doi vectori se numesc **coliniari,** dacă se află pe o dreaptă sau pe drepte paralele.

Vectorii coliniari pot fi **coorientaţi** (au acelaşi sens) (în desen $\overline{a}$ şi $\overline{d}$) sau **opus orientaţi** (au sens opus) (în desen, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$).



C 1.1

VECTORI ÎN PLAN ŞI SPAȚIU. OPERAȚII LINIARE CU VECTORI. PROPRIETĂȚI

Definiţia 1.1.4. Doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ se numesc **egali** ($\bar{a} = \bar{b}$), dacă sunt coliniari, au acelaşi sens şi aceeaşi lungime.

Definiţia 1.1.5. Vectorul a cărui origine coincide cu extremitatea se numeşte **vector nul**. Se notează $\bar{0}$.

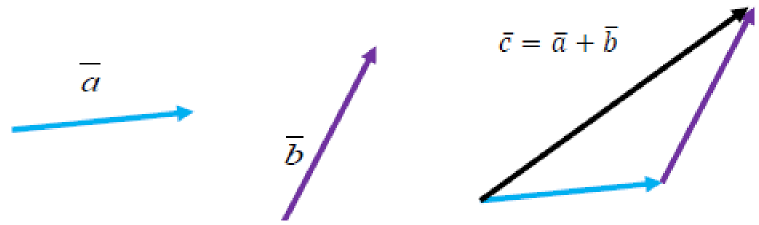
Lungimea vectorului nul $\bar{0}$ este egală cu zero, iar **sensul** lui **nu este determinat**.

Definiţia 1.1.6. Vectorul a cărui lungime este egală cu unitatea se numeşte **vector unitar**.

Definiţia 1.1.7. Vectorul unitar coorientat vectorului dat se numeşte **versorul** (**ortul**) acestui vector. Versorul vectorului $\bar{a}$ se notează cu $\overline{a_0}$.

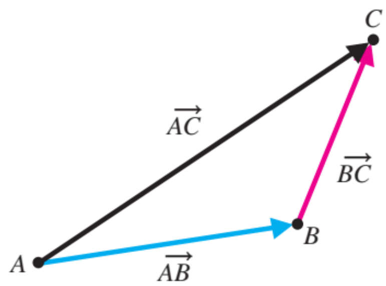
Operații liniare cu vectori. Proprietăți

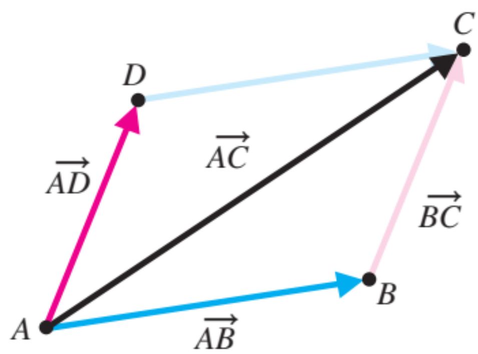
Definiţia 1.1.8. Vom numi **sumă** a vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ vectorul $\bar{c}$, originea căruia coincide cu originea vectorului $\bar{a}$, iar extremitatea – cu extremitatea vectorului $\bar{b}$, în condiția că originea lui $\bar{b}$ coincide cu extremitatea lui $\bar{a}$. Se notează cu $\boldsymbol{\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}}$



Regula de adunare a vectorilor descrisă în definiția de mai sus se numeşte ***regula triunghiului***.

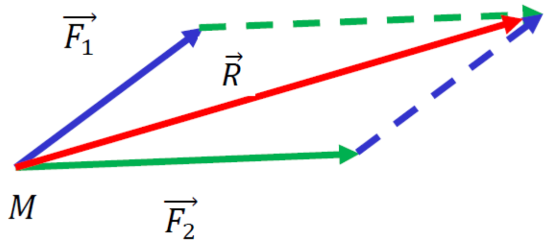
Evident are loc egaliatea $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, numită **relația lui Chasles.**





Regula paralelogramului. Dacă construim vectorul $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, atunci $ABCD$ este un paralelogram, iar **vectorul sumă** a vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ este **diagonala** $\overrightarrow{AC}$ a paralelogramului.

Se ştie că acţiunea a două forţe $\overrightarrow{F_1}$ şi $\overrightarrow{F_2}$ asupra unui punct M poate fi substituită cu o forţă unică $\overrightarrow{R}$, numită rezultanta forțelor $\overrightarrow{F_1}$ şi $\overrightarrow{F_2}$, determinată după regula paralelogramului.



VECTORI ÎN PLAN ŞI SPAŢIU. OPERAŢII LINIARE CU VECTORI. PROPRIETĂŢI

Regula poligonului. În caz general, suma $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_{n-1} + \vec{a}_n$ a n vectori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n$ se determină inductiv:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_{n-1} + \vec{a}_n = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_{n-1}) + \vec{a}_n .$$

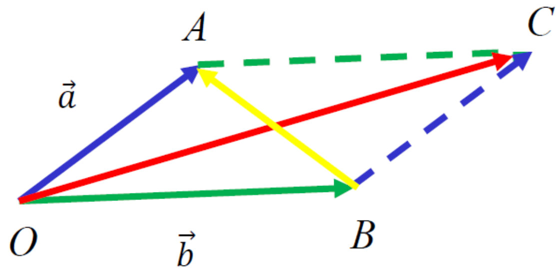
Are loc $\overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_0A_n}$.

Definiţia 1.1.9. Vom numi **diferenţă** a vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ vectorul $\bar{d}$, astfel încât $\bar{a} = \bar{d} + \bar{b}$. Se notează cu $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$.

Notă.

1) Deoarece lungimea oricărei laturi a unui triunghi este mai mică decât suma lungimilor celorlalte două laturi, atunci modulul sumei a doi vectori nu întrece suma modulelor lor, adică $|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$. Egalitatea are loc doar în cazul când vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt coliniari şi coorientaţi.

2) Fie vectorii $\overline{OA} = \bar{a}$ şi $\overline{OB} = \bar{b}$. Atunci diagonala $\overline{OC}$ reprezintă **suma** vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, iar diagonala $\overline{BA}$ reprezentă diferenţa vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.



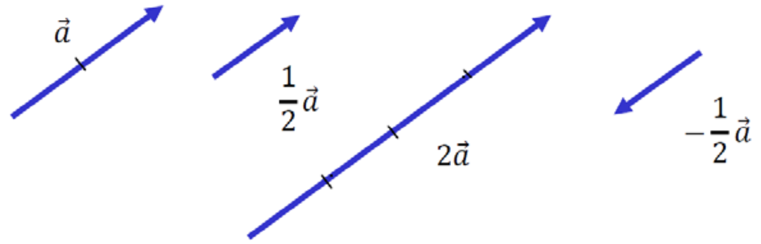
Definiţia 1.1.10. Prin **produs al vectorului** $\bar{a}$ **la scalarul real** λ înţelegem vectorul $\bar{b}$, ce verifică condiţiile:

1) $|\bar{b}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$;

2) vectorii $\bar{b}$ şi $\bar{a}$ sunt cooorientaţi, dacă $\lambda > 0$ şi opus orientaţi, dacă $\lambda < 0$;

3) $\bar{b} = \bar{0}$, dacă $\lambda = 0$ sau $\bar{a} = \bar{0}$. Se notează cu $\bar{b} = \lambda\bar{a}$.

Mai jos este o vizualizare a produsului unui vector la un scalar:



Proprietăţile operaţiilor liniare asupra vectorilor

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$,

2) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$,

3) $\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$,

4) pentru orice vector $\bar{a}$ există un astfel de vector, care adunat cu $\bar{a}$ are ca sumă vectorul nul. Acest vector este notat cu $-\bar{a}$, numit **opusul** vectorului $\bar{a}$. Deci $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$.

Este evident că opusul vectorului $\overline{AB}$ este vectorul $\overline{BA}$, adică $\overline{BA} = -\overline{AB}$.

5) $(\boldsymbol{\alpha\beta})\bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}\bar{\boldsymbol{a}})$,

6) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{\beta}\bar{\boldsymbol{a}}$,

7) $\boldsymbol{\alpha}(\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}}) = \boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{b}}$,

8) $\bar{\boldsymbol{a}} \cdot \mathbf{1} = \bar{\boldsymbol{a}}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Oricare dintre aceste proprietăţi poate fi demonstrată, folosind definiţia egalităţii vectorilor şi a operaţiilor liniare cu ei.

Demonstrăm proprietatea 6. Egalitatea este evidentă pentru $\bar{a} = \bar{0}$ sau $\alpha + \beta = 0$. Vom examina cazul când α şi β au acelaşi semn (α·β>0). Atunci vectorii $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\bar{\boldsymbol{a}}$ şi $\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{\beta}\bar{\boldsymbol{a}}$ sunt coorientaţi. Deoarece $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ şi $|\alpha\bar{a} + \beta\bar{a}| = |\alpha\bar{a}| + |\beta\bar{a}|$, atunci

$$\left|(\alpha + \beta)\bar{a}\right| = |\alpha + \beta||\bar{a}| = \left(|\alpha| + |\beta|\right)|\bar{a}| = |\alpha||\bar{a}| + |\beta||\bar{a}| = |\alpha\bar{a}| + |\beta\bar{a}| =$$

$= \left|\alpha\bar{a} + \beta\bar{a}\right|$. Astfel, pentru α·β>0 egalitatea 6 este demonstrată.

Dacă însă numerele α şi β au semne diferite (α·β<0) şi, de exemplu, $|\alpha| > |\beta|$, atunci numerele $\alpha + \beta$ şi $-\beta$ vor avea acelaşi semn şi conform celor demonstrate:

$$\left[(\alpha + \beta) + (-\beta)\right] \cdot \bar{a} = (\alpha + \beta)\bar{a} - \beta\bar{a},$$

deci $\alpha\bar{a} = (\alpha + \beta)\bar{a} - \beta\bar{a}$ sau $\alpha\bar{a} + \beta\bar{a} = (\alpha + \beta)\bar{a}$.

Notă.

1) Orice vector $\bar{a}$ este egal cu produsul dintre modulul său şi versorul (ortul) său $\bar{a}_0$: $\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{a}_0$. De unde obţinem că $\bar{a}_0 = \dfrac{1}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a}$ (cu $|\bar{a}| \neq 0$).

2) Dacă se cunoaşte vectorul nenul $\bar{a}$, atunci orice vector $\bar{b}$ coliniar cu el poate fi reprezentat în mod unic sub forma $\bar{b} = \alpha\bar{a}$. Este evident că

$$\alpha = \begin{cases} |\bar{b}|/|\bar{a}|, \textit{dacă vectorii sunt coorientați}, \\ -|\bar{b}|/|\bar{a}|, \textit{dacă vectorii sunt opus orientați}. \end{cases}$$

Problemă: Punctul O este centru de greutate al triunghiului ABC. Să se demonstreze că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \bar{0}$.

Problemă: Punctele E şi F sunt mijlocuri ale laturilor $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ ale patrulaterului $ABCD$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{EF} = \dfrac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2}$.

Problemă: Se dă patrulaterul $ABCD$. Să se găsească un punct M, astfel încât $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 0$.