1. INTRODUCERE

Prezenta lucrare este dedicată metodelor matematicii discrete, aplicate în informatică şi are ca destinatari pe studenţii şi specialiştii în ştiinţa calculatoarelor şi tehnologia informaţiei, la fel ca şi pe toţi doritorii să facă cunoştinţă cu acest domeniu matematic.

Matematica tradiţională, inclusiv matematica aplicată, care formează fundamentul ştiinţelor tehnice clasice, s-a conformat pe parcursul anilor cerinţelor acestora. Există monografii şi manuale, lucrări metodice şi îndrumare consacrate problemelor legate de ştiinţele tehnice clasice şi metodele matematice respective. Nimeni nu mai consideră necesar să explice noţiunile legate de calculul diferenţial sau integral în cadrul electrotehnicii sau termodinamicii. Nu este aceeaşi situaţie şi în cazul disciplinelor din ştiinţa calculatoarelor, informatica teoretică şi aplicată, inclusiv, sisteme expert sau inteligenţa artificială. Foarte mulţi autori sunt convinşi de necesitatea de a începe de la "zero", explicând ce este o funcţie logică sau un tabel de adevăr, un circuit sau un ciclu într-un graf. Lucrarea de faţă este o încercare de a permite viitorilor autori să se concentreze totalmente problemelor tehnice tratate.

Un alt obiectiv este legat de faptul că majoritatea inginerilor consideră matematica un fel de dicţionar mare. Este suficient să poţi doar localiza informaţia necesară, deschizându-l la pagina respectivă. Inginerii sunt obligaţi să "iubească" formulele, dar nu şi teoremele (ca să nu vorbim de demonstrarea lor). Însă domeniile de vârf ale ştiinţei contemporane cer cu insistenţă să fie schimbată această mentalitate, or problemele tehnico-ştiinţifice principale sunt legate nu atât de lucrul cu modele cunoscute, cât de elaborarea unor modele noi. Pentru aceasta este necesar ca matematica să fie nu numai o metodă de calcul, ci şi una de gândire.

2. SISTEME ALGEBRICE

2.1. Mulţimi şi submulţimi

2.1.1. Noţiuni generale

Teoria mulţimilor studiază conceptele de mulţime şi de infinit şi legile de operare cu mulţimile. Noţiunea de ***mulţime*** este una din noţiunile primare ale matematicii şi, ca şi majoritatea noţiunilor primare nu are o definiţie unanim acceptată. George Cantor (1845-1918) a definit astfel această noţiune: "*înţeleg prin mulţime, în general, tot ceea ce este mult, dar care poate fi conceput ca o entitate, adică orice colecţie de anumite obiecte putând fi închegate într-un* *întreg cu ajutorul unei legi oarecare*". Obiectele care formează mulţimile se numesc ***elemente***. De obicei, elementele se notează cu litere mici, iar mulţimile cu litere mari cu sau fără indici. Elementele se iau în acolade şi se separă prin virgule.

Vom nota apartenenţa elementului a mulţimii C în felul următor: $a \in C$, iar dacă g nu aparţine mulţimii C se va scrie $g \notin C$. Mulţimile pot fi finite sau infinite.

Expresia $x \in S$ semnifică, deci, faptul că elementul x este un element al mulţimii S. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt toate elemente ale mulţimii S, atunci poate fi scris $S=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Fiecare x trebuie să fie distinct; nu putem repeta scrierea unui element într-o mulţime. Ordinea în care elementele sunt scrise în cadrul mulţimii este arbitrară - mulţimile nu posedă o structură internă.

Numărul elementelor unei mulţimi finite se numeşte cardinalul acestei mulţimi.

Cardinalul mulţimii A se notează prin $|A|$. Despre cardinalul mulţimilor infinite se va discuta în paragrafele următoare. Un loc aparte îi este rezervat **mulţimii de cardinal zero** (fără elemente, $\{ \}$). Această mulţime se numeşte **mulţime vidă** şi se notează prin $\varnothing$.

Exemplul 2.1. Fie $A = \{1, 3, 6\}$; altfel spus, A este mulţimea care are ca elemente valorile întregi 1, 3 şi 6, alte elemente nu există. Putem scrie $1 \in A$, $3 \in A$ şi $6 \in A$. Din contra, afirmaţia $2 \in A$ este falsă ca şi oricare alta, care afirmă că altceva poate fi element din A.
Mulţimile pot avea ca elemente alte mulţimi. De exemplu, fie $B = \{\{1, 2, 3\}, 3, \varnothing\}$. B are aici trei elemente. Primul element este mulţimea $\{1, 2, 3\}$, al doilea este numărul întreg 3, iar al treilea este mulţimea vidă. Următoarele afirmaţii sunt juste: $\{1, 2, 3\} \in B$, $3 \in B$, şi $\varnothing \in B$. Afirmaţia $1 \in B$ est falsă. Adică, din faptul că 1 este element al unuia dintre elementele lui B nu rezultă că 1 este şi element al lui B.◄

Mulţimea A se va numi **submulţime** (sau **parte**) a mulţimii B (se va nota $A \subseteq B$, simbolul $\subseteq$ se numeşte **simbol de incluziune**), dacă fiecare element al mulţimii A este şi element al mulţimii B. Se va mai spune că B acoperă A. Două mulţimi A şi B se vor considera egale dacă conţin aceleaşi elemente, altfel, dacă $A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$, atunci $A = B$. În cazul în care $A \subseteq B$ şi $A \neq B$ se va scrie $A \subset B$, iar A se va numi submulţime proprie sau strictă a lui B.

Exemplul 2.2. Mulţimea A, formată din numerele întregi, care se împart fără rest la 6, este o submulţime B, formată din numerele întregi pare. ◄

N.B. Mulţimea vidă este submulţime a oricărei mulţimi.

Exemplul 2.3. Toate relaţiile de mai jos sunt adevărate:

1. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 5\}$
2. $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 5\}$
3. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

Remarcăm, că o mulţime este întotdeauna şi submulţime a sa (p.3), dar niciodată submulţime proprie, adică afirmaţia $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$ este falsă. ◄

Pentru fiecare mulţime A există o mulţime $\rho(A)$ care conţine toate părţile lui A (inclusiv mulţimea vidă şi A). Această mulţime $\rho(A)$ se va numi **booleanul** lui A.

Exemplul 2.4. Pentru mulţimea $F = \{a, b, c\}$ vom avea $\rho(F) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$. Adică, $\rho(F)$ este o mulţime cu opt elemente, fiecare element fiind la rândul lui o mulţime. Un alt exemplu, $\rho(\emptyset) = \{\emptyset\}$ deoarece $\emptyset \subseteq S$. Notăm că $\{\emptyset\}$, mulţimea care conţine mulţimea vidă nu este aceeaşi ca şi mulţimea vidă. Prima are un element - $\emptyset$, iar mulţimea vidă nu are nici unul. ◄

Mulţimea tuturor obiectelor posibile în cadrul unei cercetări concrete vom numi **mulţime universală** sau **universum** (fără pretenţii de stricteţe) şi se notează prin E sau U.

2.1.2. Metode de definire a mulţimilor

Mulţimile pot fi definite prin simpla enumerare a elementelor lor, dar această metodă este valabilă doar pentru mulţimile finite cu un număr mic de elemente.

O altă metodă propune să se pornească de la o mulţime S şi o proprietate P a elementelor, definind o mulţime ca toate elementele lui S care verifică proprietatea P. Notaţia acestei operaţii, numită *abstracţie* este

$\{x \mid x \in S$ *şi* $P(x)\}$

sau *toate elementele x din S, care verifică proprietatea P.* Variabila x din ultima expresie este locală, adică putem scrie cu acelaşi succes $\{y \mid y \in S$ şi $P(y)\}$ pentru a descrie aceeaşi mulţime.

Exemplul 2.5. Fie A, mulţimea $\{1, 3, 6\}$ din exemplul 2.1 şi $P(x)$ proprietatea "*x este impar*". Atunci, $\{x \mid x \in A$ şi *x este impar*$\}$ este o altă modalitate de a defini mulţimea $\{1, 3\}$. Altfel, noi acceptăm elementele 1 şi 3 din A pentru că ele sunt impare, dar refuzăm elementul 6, pentru că el nu este impar.

Considerăm mulţimea $B = \{\{1, 2, 3\}, 3, \emptyset\}$ din exemplul 2.1. Atunci, $\{A \mid A \in B$ şi *A este o mulţime* $\}$ defineşte mulţimea $\{\{1, 2, 3\}, \emptyset\}$.

Alt exemplu: mulţimea numerelor întregi nenegative, sau naturale, este adesea notată prin N. Fie $P(x)$ proprietatea "x este număr primar" (adică $x > 1$ şi nu are alţi divizori decât 1 şi el însuşi). Mulţimea numerelor primare va fi notată în acest caz $\{x \mid x \in N$ *şi* $P(x)\}$. Această expresie defineşte mulţimea infinită $\{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$.◄

Este tentant să presupunem, că mulţimile sunt *finite* sau că există un întreg n şi mulţimea considerată are exact n elemente. De exemplu, mulţimea {1, 3, 6} are trei elemente. Însă, în foarte multe cazuri mulţimile sunt infinite, adică nu există un întreg care ar limita numărul elementelor mulţimii. Iată câteva exemple:

- ***N*** - mulţimea numerelor naturale;
- ***Z*** - mulţimea numerelor întregi;
- ***R*** – mulţimea numerelor reale;
- ***C*** - mulţimea numerelor complexe.

Plecând de la aceste mulţimi pot fi create prin abstracţie alte mulţimi infinite.

Exemplul 2.6. Mulţimea $\{x \mid x \in Z$ *şi* $x < 3\}$ este mulţimea tuturor numerelor întregi negative la care se adaugă 0, 1 şi 2. Mulţimea $\{x \mid x \in Z$ şi $\sqrt{x} \in Z\}$ reprezintă mulţimea numerelor întregi care sunt pătrate perfecte, {0, 1, 4, 9, 16, ...}.◄

A treia metodă constă în definirea mulţimilor prin intermediul unei **proceduri generatoare**, care va descrie modalitatea de obţinere a elementelor mulţimii din elemente iniţiale şi/sau elemente, care au fost obţinute anterior. Se vor considera elemente ale mulţimii toate obiectele care pot fi construite cu ajutorul acestei proceduri. De pildă, mulţimea $M = \{1, 2, 3, 5, 8, 13,...\}$ poate fi definită cu ajutorul următoarei proceduri:

1) $x_1 = 1, x_2 = 2;$
2) $x_{i+2} = x_{i+1} + x_i, i = 1, 2, 3,...$.

O mulţime poate fi definită cu ajutorul **funcţiei caracteristice**, care are domeniul de definiţie mulţimea universală U, iar domeniul de valori mulţimea $\{0, 1\}$:

$$\text{şi} \qquad \mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in U \text{ aparţine lui } M \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

2.2. Mulţimi vagi

Definirea unei mulţimi cu ajutorul funcţiei caracteristice presupune că elementul $x \in U$ aparţine sau nu aparţine mulţimii M, o a treia posibilitate este exclusă. Însă în realitate, pentru o mare diversitate de obiecte nu există criterii exacte de apartenenţă: funcţia caracteristică doar pentru unele elemente este zero (se cunoaşte precis neapartenenţa elementului la mulţimea dată) sau unu (elementul aparţine sigur mulţimii considerate). Pentru restul elementelor funcţia

$\mu(x)$ ar trebui să ia valori între 0 şi 1. Aceste elemente formează obiectul teoriei mulţimilor **vagi (fuzzy)** [1].

Exemplul 2.7. Mulţimea $A = \{x \mid x>>1\}$ este definită ca setul de numere mult mai mari ca unu. În sensul obişnuit A nu poate fi considerată o mulţime. Se poate spune precis, că numerele mai mici decât 1 nu aparţin lui A. Numerele mai mari ca 1 pot fi considerate elemente din A cu un anumit grad de subiectivism: cu cât numărul considerat este mai mare cu atât pare mai corect să admitem, că acesta aparţine lui A. Ultima afirmaţie poate fi descrisă, de exemplu, cu ajutorul funcţiei caracteristice de mai jos

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \le 1 \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}, & \text{dacă } x > 1. \end{cases} \blacktriangleleft$$

O mulţime fuzzy A se va defini utilizând aplicaţia mulţimii universale U în segmentul $[0, 1]$, adică $\mu_A(x): U \to [0, 1]$, care determină gradul de apartenenţă a fiecărui $x \in U$ mulţimii fuzzy A. În acest caz funcţia $\mu_A(x)$ se numeşte **funcţie de apartenenţă**. Altfel spus, ***o mulţime fuzzy A poate fi definită ca o mulţime de perechi (x, $\mu_A(x)$), în care $x \in U$, iar $\mu_A(x)$ este funcţia de apartenenţă.***

Exemplul 2.8. Mulţimea fuzzy a numerelor naturale "*nu prea mari*" poate fi definită ca mulţimea A a perechilor $\{(1,1), (2,1), (3,1), (4,0.9), (5,0.8), (6,0.7), (7,0.6), (8,0.5), (9,0.3), (10,0.1), (11,0), (12,0), ...\}$.
Mulţimea universală în acest caz este mulţimea numerelor naturale, iar funcţia de apartenenţă este definită, evident, subiectiv. ◄

Mulţimea fuzzy vidă are funcţia de apartenenţă egală cu 0: $\forall x \in U\ \mu_{\emptyset}(x) = 0$. Mulţimea universală are funcţia de apartenenţă identic 1: $\forall x \in U\ \mu_U(x) = 1$.

Noţiunea de egalitate a două mulţimi fuzzy se introduce de asemenea cu ajutorul funcţiei de apartenenţă: **două mulţimi fuzzy *A* şi *B* se numesc egale dacă $\forall x \in U$ avem $\mu_A(x) = \mu_B(x)$.**

La fel şi relaţia de incluziune: vom spune, că **mulţimea fuzzy *A* este submulţime a mulţimii fuzzy *B* (este inclusă în *B*, $A \subseteq B$), dacă $\forall x \in U$ are loc inegalitatea $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$.** Mulţimea fuzzy vidă este submulţime a oricărei mulţimi.

2.3. Operaţii cu mulţimi

În acest paragraf vom defini trei operaţii cu mulţimi: **reuniunea, intersecţia** şi **complementara**, operaţii de bază, şi două operaţii suplimentare: **diferenţa şi diferenţa simetrică**.

Reuniunea a două mulţimi A şi B se va numi mulţimea C $(C = A \cup B)$, care conţine toate elementele lui A şi toate elementele mulţimii B, alte elemente nu are.

De exemplu, pentru $A = \{a, b, c, d\}$ şi $B = \{c, d, e, f\}$ reuniunea lor va fi mulţimea $C = \{a, b, c, d, e, f\}$. Cu alte cuvinte, $C = A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$.

Reuniunea este o operaţie

a) *comutativă:* $A \cup B = B \cup A$;
b) *asociativă:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
c) *Ø este elementul său neutru:* $A \cup \emptyset = A$
d) *idempotentă:* $A \cup A = A$

Remarcăm, că $A \subset B$ atunci şi numai atunci, când $A \cup B = B$.

Intersecţia a două mulţimi A şi B se va numi mulţimea $C = A \cap B$, care conţine toate elementele comune ale acestor două mulţimi: $C = \{x \mid x \in A$ *şi* $x \in B\}$. Pentru aceleaşi A şi B din exemplul precedent $A \cap B = \{c, d\}$.

Intersecţia este o operaţie

e) *comutativă:* $A \cap B = B \cap A$;
f) *asociativă:* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
g) *Ø este elementul său absorbant:* $A \cap \emptyset = \emptyset$
h) *idempotentă:* $A \cap A = A$

Remarcăm, că $A \subset B$ atunci şi numai atunci, când $A \cap B = A$.

Operaţiile de reuniune şi intersecţie pot fi definite pentru o familie de mulţimi A_i, $i = 1,\dots,n$:

$\cup A_i = \{x \mid x \in A_1$ sau $x \in A_2$ sau ... $x \in A_n\}$,

$\cap A_i = \{x \mid x \in A_1$ şi $x \in A_2$ şi ... $x \in A_n\}$.

Diferenţa a două mulţimi A şi B, notată $A - B$ (sau $A \setminus B$) se numeşte mulţimea $C = \{x \mid x \in A$ şi $x \notin B\}$. Pentru aceleaşi A şi B vom avea $A - B = \{a, b\}$, iar $B - A = \{e, f\}$. Observăm necomutativitatea acestei operaţii.

Diferenţa simetrică se defineşte ca $C = A \Delta B = \{x \mid x \in A$ *şi* $x \notin B$ sau $x \notin A$ *şi* $x \in B\}$. Pentru exemplul precedent vom avea $A \Delta B = B \Delta A = \{a, b, e, f\}$.

Exemplul 2.9. Fie S, mulţimea $\{1, 2, 3\}$ şi T mulţimea $\{3, 4, 5\}$. Atunci $S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S \cap T = \{3\}$, şi $S - T = \{1,2\}$. Adică $S \cup T$ conţine toate elementele care apar fie în S fie în T. Chiar dacă 3 apare o dată în S şi încă o dată în T, el va fi regăsit o singură dată în $S \cup T$, deoarece elementele nu pot să se repete, analogic pentru mulţimea $S \cap T$. Mulţimea $S - T$ conţine elementele

1 şi 2, deoarece ele sunt în S, dar nu se află în T. Elementul 3 nu este în mulţimea S - T deoarece, deşi este în S, el aparţine şi lui T. ◄

Complementara mulţimii A în U ($A \subseteq U$) notată cu C_UA se va numi mulţimea care conţine toate elementele mulţimii U ce nu aparţin mulţimii A: $C_UA = \{x \mid x \in U$ şi $x \notin A\}$. Atunci când este evident care este mulţimea U, indicele poate fi omis. Complementara lui A se va mai nota prin $\bar{A}$ (A barat).

De exemplu, dacă $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, atunci pentru aceleaşi mulţimi A şi B vom avea $C_UA = \bar{A}_U = \{e, f, g\}$, iar $C_UB = \{a, b, g\}$.

Numim **partiţie** a mulţimii A orice set de părţi $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ale lui A, care verifică condiţiile:

$$\begin{array}{lll} 1.\ X_i \neq \varnothing, & i = 1, 2, \dots, n; & \\ 2.\ X_i \cap X_j = \varnothing, & i \neq j; & (2.1) \\ 3.\ \cup X_i = A, & i = 1, 2, \dots, n & \end{array}$$

Utilizând funcţia de apartenenţă, operaţiile de determinare a complementarei unei mulţimi fuzzy A, a reuniunii şi a intersecţiei a două mulţimi fuzzy A şi B sunt definite astfel:

Complementara unei mulţimi fuzzy A se numeşte mulţimea fuzzy $\bar{A}$ cu funcţia de apartenenţă

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x); \qquad (2.2)$$

Reuniunea a două mulţimi fuzzy A şi B numim mulţimea fuzzy $A \cup B$ cu funcţia de apartenenţă

$$\mu_{A \cup B}(x) = max[\mu_A(x), \mu_B(x)]; \qquad (2.3)$$

Intersecţia a două mulţimi fuzzy A şi B numim mulţimea fuzzy $A \cap B$ cu funcţia de apartenenţa

$$\mu_{A \cap B}(x) = min[\mu_A(x), \mu_B(x)]; \qquad (2.4)$$

Există şi alte definiţii ale ultimelor două operaţii.

2.4. Demonstrarea echivalenţei cu ajutorul incluziunilor

Două mulţimi S şi T sunt egale dacă şi numai dacă $S \subseteq T$ şi $T \subseteq S$; adică fiecare este simultan o submulţime a celeilalte. Aceasta este analogic regulii aritmetice care afirmă că $a = b$ atunci şi numai atunci când simultan $a \leq b$ şi $b \leq a$ sunt adevărate. Putem demonstra echivalenţa a două expresii E şi F arătând că fiecare este inclusă în cealaltă. Altfel

1. se va lua un element arbitrar x din E şi se va demonstra că el aparţine de asemenea şi lui F,

2. se va lua un element arbitrar x din F şi se va demonstra că el aparţine de asemenea şi lui E.

Exemplul 2.10. Să demonstrăm asociativitatea reuniunii şi diferenţei, $(S - (T \cup R)) \equiv ((S - T) - R)$. Începem cu presupunerea, că x aparţine expresiei din stângă. Secvenţa etapelor este arătată în tab.2.1.

Tabelul 2.1. Prima jumătate a demonstraţiei.

	Etapa	**Justificarea**
1)	x este din $S - (T \cup R)$	dat
2)	x este din S	definiţia operaţiei “-” şi (1)
3)	x nu este în $T \cup R$	definiţia operaţiei “-” şi (1)
4)	x nu este în T	definiţia operaţiei “$\cup$” şi (1) (3)
5)	x nu aparţine lui R	definiţia operaţiei “$\cup$” şi (3)
6)	x aparţine lui $S - T$	definiţia operaţiei “-” cu (2) şi (4)
7)	x este în $(S - T) - R$	definiţia operaţiei “-” cu (6) şi (5)

Am ajuns la concluzia, că x aparţine şi părţii drepte. Concluzie: deoarece x a fost luat arbitrar, partea stângă este submulţime a părţii drepte. Dar asta nu-i totul. Mai trebuie să demonstrăm, că şi partea dreaptă este submulţime a părţii stânga, adică dacă un x arbitrar este din $(S\text{-}T)\text{–}R$, atunci el se conţine şi în $S - (T \cup R)$.

Tabelul 2.2. A doua jumătate a demonstraţiei.

	Etapa	**Justificarea**
1)	x este din $S - (T - R)$	dat
2)	x este din $S\text{-}T$	definiţia operaţiei “-” şi (1)
3)	x nu este în R	definiţia operaţiei “-” şi (1)
4)	x este în S	definiţia operaţiei “-” şi (2)
5)	x nu aparţine lui T	definiţia operaţiei “-” şi (2)
6)	x nu aparţine lui $R \cup T$	definiţia operaţiei “$\cup$” cu (3) şi (5)
7)	x este în $S – (T \cup R)$	definiţia operaţiei “-” cu (6) şi (4)

Am arătat acest lucru în tabelul 2.2. ◄

Exemplul 2.11. Demonstrăm, că dacă $S \subseteq T$, atunci $S \cup T \equiv T$. Admitem că $x \in S \cup T$. Conform definiţiei reuniunii

1. x aparţine sau lui S,
2. sau lui T.

În primul caz, deoarece noi am presupus $S \subseteq T$, concluzionăm că $x \in T$. În cazul (2), x este imediat în T. Deci, în ambele cazuri x este element de T, şi am terminat prima jumătate a demonstraţiei.

Fie acum $x \in T$. În acest caz $x \in S \cup T$ conform definiţiei de reuniune. Deci, $T \subseteq (S \cup T)$, ceea ce constituie partea a doua a demonstraţiei. Concluzia: $(S \cup T) \equiv T$. ◄

2.5. Vectori şi produs cartezian

2.5.1. Definiţii

Un set ordonat de elemente se va numi **vector** sau **cortej**. Aceasta nu este definiţia noţiunii de vector, care la fel ca şi noţiunea de mulţime nu se defineşte. Elementele, care formează vectorul se numesc coordonate sau componente şi se numerotează de la stânga spre dreapta. În acest sens se va înţelege noţiunea **de set ordonat**. Vectorii se scriu în paranteze rotunde, componentele se vor separa, la necesitate, prin virgulă. Numărul de componente se numeşte **lungimea** sau **dimensiunea** vectorului.

De exemplu, $v = (2,3,0,3)$ este un vector de lungime 4 şi diferă de $b = (3,2,0,3)$. Observăm, că este admisă coincidenţa coordonatelor. Vectorul de lungime 2 se mai numeşte pereche sau cuplu, iar de lungime n - ***n*-uplu**.

Doi vectori sunt **egali** dacă au aceeaşi lungime, iar componentele respective coincid.

Se numeşte **produs cartezian** a două mulţimi A şi B (se notează AxB) mulţimea **tuturor** perechilor (a,b) pentru care $a \in A$, $b \in B$. Pentru $A = B$ vom avea Ax$A = A^2$. Prin analogie, A_1xA_2x...xA_n se va numi mulţimea tuturor vectorilor de lungime n $(a_1,a_2,...,a_n)$ pentru care $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$,..., $a_n \in A_n$. Dacă $A_1=A_2=...=A_n=A$ produsul cartezian A_1xA_2x...xA_n se va nota A^n.

Exemplul 2.12. Mulţimea R x $R = R^2$ este mulţimea tuturor perechilor (a,b) pentru care a, $b \in R$ şi reprezintă coordonatele punctelor unui plan. Această reprezentare a punctului unui plan a fost propusă de către matematicianul şi filosoful francez Réné Descartes (1596-1650) din care cauză produsul a două mulţimi îi poartă numele.
Fie A o mulţime finită de simboluri (litere, cifre, semne de operaţii şi ortografice, etc.), care, de obicei, se numeşte alfabet. Elementele mulţimii A^n se numesc cuvinte de lungime n în alfabetul A. Mulţimea $A = A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup ...$ defineşte toate cuvintele alfabetului A. ◄

Exemplul 2.13. Dacă $A = \{c, d\}$ şi $B = N_3$, elementele produsului AxB sunt 6 cupluri $(c, 1)$, $(c, 2)$, $(c, 3)$, $(d, 1)$, $(d, 2)$, $(d, 3)$, iar elementele mulţimii BxA sunt: $(1,c)$, $(2, c)$, $(3, c)$, $(1, d)$, $(2, d)$, $(3, d)$. ◄

Ultimul exemplu arată cum poate fi formată lista elementelor produsului AxB, când A şi B sunt definite prin enumerarea elementelor. Metoda este generală: produsul a două mulţimi, definite prin enumerare, poate totdeauna fi evidenţiat prin enumerare. O altă metodă de inventariere a cuplelor unui produs AxB sunt **diagramele carteziene**. O diagramă carteziană este un dreptunghi împărţit în celule (casete), fiecare casetă corespunzând unui cuplu (fig. 2.1 – 2.4). Fiecare linie a dreptunghiului corespunde unui element al mulţimii A, vom avea aici toate cuplurile, care au prima componentă din A. Fiecare coloană corespunde unui element din B şi în acest mod vom depista în acest dreptunghi toate cuplurile, care au acest element în calitate de componenta a doua.

Exemplul 2.14. Pentru mulţimile din exemplu 2.13, figura 2.1 reprezintă diagrama carteziană a produsului AxB, iar figura 2.2 pe cea a produsului BxA. Ordinea de aranjare a elementelor în A şi B determină poziţia cuplurilor în diagramă; dacă va fi modificată această ordine diagrama nu va mai fi aceeaşi.

$(c, 1)$	$(c, 2)$	$(c, 3)$
$(d, 1)$	$(d, 2)$	$(d, 3)$

Fig.2.1. Diagrama produsului AxB

$(1, c)$	$(1, d)$
$(1, c)$	$(1, d)$
$(1, c)$	$(1, d)$

Fig.2.2. Diagrama produsului BxA

	1	2	3
c			
d			

Fig.2.3. Diagrama produsului AxB

	c	a
1		
2		
3		

Fig.2.4. Diagrama produsului BxA

Adesea elementele mulţimilor A şi B sunt indicate în partea stângă şi, respectiv, superioară a dreptunghiului, elementele lui A corespunzând liniilor, iar cele ale lui B – coloanelor diagramei (fig.2.3 şi 2.4). ◄

La concret, a construi un n-uplu înseamnă să alegem un prim obiect (componentă) din prima mulţime, un al doilea obiect dintre elementele mulţimii a doua şi tot aşa până la componenta cu numărul n din mulţimea cu acelaşi număr. Putem întâlni foarte multe n-upluri în viaţa de toate zilele.

Exemplul 2.15. Figura de mai jos reprezintă lista bucatelor, propuse într-o oarecare zi la cantina studenţească. Vom considera, că a compune un meniu înseamnă să se aleagă un aperitiv, un fel unu, un fel doi şi un desert. Dacă vom nota prin A

Lista bucatelor la cantină pentru “___”___2002

Aperitive
1. Salată de roşii
2. Salată de varză
3. Salată de castraveţi
4. Julien de ciuperci

Felul unu
1. Ciorbă de burtă
2. Ciorbă cu perişoare
3. Zeamă de puişor

Felul doi
1. Cotlet
2. Antrecot
3. Ciulama de puişor
4. Tocăniţă cu mămăliguţă

Desert
1. Suc de mere
2. Compot de ananas
3. Suc mango fresh

mulţimea aperitivelor, prin F_1, F_2 – mulţimile felurilor unu şi doi, respectiv, iar prin D – deserturile, fiecare meniu, de exemplu: (*salată de roşii, ciorbă de burtă, tocăniţă cu mămăliguţă, suc mango fresh*), este un element al produsului AxF_1xF_2xD. ◄

2.5.2. Cardinalul produsului cartezian

Teorema 2.1. Dacă $A_1, A_2,..., A_n$ sunt mulţimi finite cu $|A_1|=m_1$, $|A_2|=m_2$,..., $|A_n|=m_n$, atunci $|A_1$xA_2x...x$A_n|= m_1m_2...m_n$.

Demonstraţie. Vom apela la metoda inducţiei matematice. Pentru $n = 1$ teorema este evident corectă. Presupunem că teorema are loc pentru $n = k$ şi vom demonstra justeţea ei pentru $n = k+1$.

Conform presupunerii $|A_1$xA_2x...x$A_k| = m_1m_2\cdots m_k$. Vom considera un vector arbitrar $(a_1,a_2,...,a_k)\in A_1$xA_2x...xA_k şi vom adăuga pe locul $k+1$ componenta $a_{k+1}\in A_{k+1}$. Vom obţine m_{k+1} vectori diferiţi din A_1x...xA_{k+1}. Cu alte cuvinte, adăugând la $m_1m_2\cdots m_k$ vectori de lungime k componenta cu numărul $k+1$ din A_{k+1} se vor obţine $m_1m_2\cdots m_km_{k+1}$ vectori diferiţi din A_1xA_2x...xA_kxA_{k+1}. Alţi vectori în acest produs cartezian nu există. Teorema este adevărată pentru $n=k+1$ şi, deci, este adevărată pentru n arbitrar.

Consecinţă. $|A^n| = |A|^n$.

Proiecţia vectorului v pe axa i se va numi componenta cu numărul i a acestui vector:

dacă $v=(a_1,a_2,...,a_i,...,a_n)$, atunci $pr_iv=a_i$.

Proiecţia lui v pe axele i_1, i_2,..., i_k se numeşte vectorul de lungime k: $pr_{i1,i2,...,ik}v=(a_{i1},...,a_{ik})$.

Pentru o mulţime V de vectori de aceeaşi lungime se introduce noţiunea de proiecţie a lui V pe axa i şi pe axele i_1, i_2,..., i_k: $pr_iV = \{pr_iv \mid v\in V\}$ şi $pr_{i1,i2,...,ik}V = \{pr_{i1,i2,...,ik}v \mid v\in V\}$.

2.6. Corespondenţe şi funcţii

Vom numi corespondenţă între mulţimile A şi B submulţimea $\boldsymbol{G \subseteq A\text{x}B}$. Dacă $(a, b)\in G$ se va spune că b corespunde lui a în corespondenţa G.

Mulţimea $\boldsymbol{pr_1G}$ se va numi **domeniu de definiţie** (sau **mulţimea sursă**), iar $\boldsymbol{pr_2G}$ - **domeniu de valori** (sau **imaginea** lui A) ale corespondenţei G. Dacă $\boldsymbol{pr_1G = A}$ corespondenţa se va numi **total definită** (în caz contrar - parţial definită). Corespondenţa pentru care $\boldsymbol{pr_2G = B}$ se numeşte **surjectivă**. Corespondenţa G se va numi **funcţională,** dacă fiecărui element din pr_1G îi va corespunde un singur element din $pr_2G = B$ şi **injectivă** dacă fiecare element din domeniul de valori corespunde unui singur element din domeniul de definiţie.

O corespondenţă se numeşte biunivocă (corespondenţă 1:1) dacă ea este

- total definită,
- surjectivă,
- funcţională,
- injectivă.

Exemplul 2.16. Reprezentarea lunilor anului prin numerele lor este o corespondenţă biunivocă între mulţimea lunilor şi mulţimea N_{12} a numerelor întregi de la 1 până la 12. ◄

Teorema 2.2. Dacă între două mulţimi A şi B există o corespondenţă biunivocă, atunci

$$|A|=|B|.$$

Demonstraţia este banală şi poate fi realizată prin metoda reducerii la absurd. Într-adevăr, dacă teorema nu este justă, pot avea loc două cazuri:

1. $|A| > |B|$
2. $|A| < |B|$

În primul caz, deoarece corespondenţa este total definită, în A pot fi determinate două elemente cărora le va corespunde unul şi acelaşi element $b \in B$ - nu se respectă injectivitatea. Cazul $|A| > |B|$ trebuie exclus.

În al doilea caz, corespondenţa fiind surjectivă în B vor fi cel puţin două elemente care corespund unuia şi aceluiaşi $a \in A$ - nu se respectă funcţionalitatea.

Şi într-un caz şi în altul am ajuns la contradicţie, deci, nu ne rămâne decât să fim de acord cu afirmaţia teoremei.

Prima afirmaţie din teorema precedentă, care mai poate fi formulată “dacă $|A| > |B|$, atunci nu poate exista o injecţie de la A la B”, este o formulare a celebrei proprietăţi, cunoscute sub numele ***principiul sertarelor*** *(celulelor)* sau ***principiul lui Dirichlet***: *„Dacă trebuie să repartizăm o mulţime de obiecte în sertare şi avem mai multe obiecte decât sertare, există întotdeauna cel puţin un sertar, care conţine mai mult de un obiect”.*

Teorema 2.2 permite:

- stabilirea egalităţii cardinalelor a două mulţimi fără calcule şi
- determinarea cardinalului unei mulţimi prin stabilirea unei corespondenţe biunivoce a acestei mulţimi cu o altă mulţime, cardinalul căreia este cunoscut sau uşor de calculat.