EVENIMENTE ALEATOARE. PROBABILITĂŢI CLASICE ŞI GEOMETRICE

Una din noţiunile de bază ale teoriei probabilităţilor este cea de eveniment.

Definiţia 1.1. Se numeşte **eveniment** rezultatul unui experiment (unei probe).

Proba sau experimentul reprezintă o activitate care poate fi repetată în condiţii date.

Exemplul 1.1. **Experiment:** Se aruncă două monede.

Evenimente: Apariţia stemei, apariţia valorii monedei.

Experiment (probă): Patru persoane intră în magazin.

Evenimente: Trei din ele fac cumpărături, nici o persoană nu face cumpărături, cel mult două persoane fac cumpărături.

Experiment (probă): Se aruncă un zar.

Evenimente: Apariţia feţei cu trei puncte, apariţia feţei cu un număr par de puncte, apariţia feţei cu un număr de puncte, divizibil la trei.

Experimente: Susţinerea unui examen.

Evenimente: Obţinerea notei 8, obţinerea unei note de promovare.

Definiţia 1.2. Se numeşte **eveniment sigur** evenimentul, care se produce cu certitudine în rezultatul experimentului.

Exemplul 1.2. Extragerea unei bile albe dintr-o urnă ce conţine numai bile albe.

Definiţia 1.3. Se numeşte **eveniment imposibil** evenimentul care nu se produce la nici o realizare a experimentului.

Exemplul 1.3. Apariţia feţei cu şapte puncte la aruncarea zarului. Extragerea bilei negre dintr-o urnă cu bile albe.

Definiţia 1.4. Se numeşte **eveniment aleator** (întâmplător) evenimentul care se produce sau nu în rezultatul experimentului.

Exemplul 1.4. Apariţia stemei sau a valorii la aruncarea unei monede. Apariţia feţei cu 5 puncte la aruncarea zarului. Nimerirea în ţintă la o tragere. Obţinerea notei 8 la un examen.

Evenimentele se notează de obicei cu litere mari (majuscule) ale alfabetului latin (cu sau fără indici):

$$A, B, C \dots;\ A_1, A_2, \dots A_n;\ B_1, B_2 \dots B_n.$$

Pentru evenimentul sigur e folosită litera Ω, iar pentru cel imposibil – simbolul $\varnothing$.

Definiţia 1.5. Evenimentele A şi B se numesc **incompatibile,** dacă producerea unuia dintre ele exclude producerea celuilalt în rezultatul unui experiment

Exemplul 1.5. Dintr-o urnă, care conţine bile albe şi negre, se extrage o bilă. Extragerea bilei albe (A) şi extragerea bilei negre (B) sunt două evenimente incompatibile.

Definiţia 1.6. Evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_n$ se numesc **incompatibile două câte două,** dacă oricare două din ele A_i şi A_j $(i \neq j)$ sunt incompatibile.

Exemplul 1.6. Se aruncă un zar. Fie A_i – „apare faţa cu i puncte”, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Aceste evenimente sunt incompatibile două câte două, deoarece apariţia feţei cu i puncte exclude apariţia feţei cu j puncte $(i \neq j)$.

Definiţia 1.7. Se numeşte **sumă (reuniune)** a evenimentelor A şi B evenimentul $C = A \bigcup B$, care se produce atunci când se produce cel puţin unul din cele două evenimente (sau A sau B).

Definiţia 1.8. Se numeşte **produs (intersecţie)** al evenimentelor A şi B evenimentul $D = A \bigcap B$, care se produce odată cu producerea simultană a celor două evenimente (şi A şi B) .

Exemplul 1.7. Se efectuează două trageri asupra unei ţinte. Considerăm evenimentele:

A – se nimereşte ţinta prima oară;

B – se nimereşte ţinta a doua oară;

C – se nimereşte ţinta cel puţin o dată;

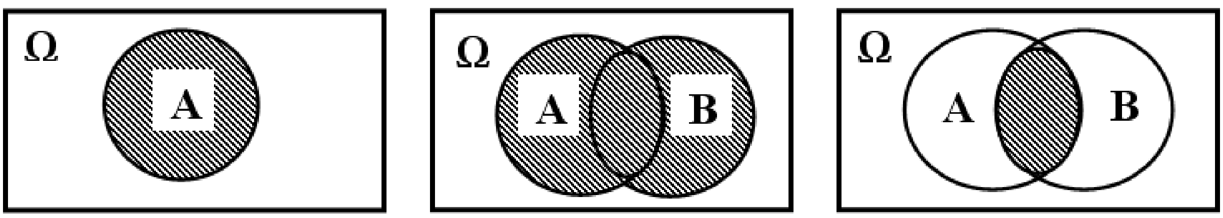
D – se nimereşte ţinta de două ori;

Evident, $C = A \bigcup B$, $D = A \bigcap B$.

Operaţiile de adunare şi înmulţire a evenimentelor sunt simetrice, deci:

$$A \bigcup B = B \bigcup A \quad \text{şi} \quad A \bigcap B = B \bigcap A.$$

La fel ele admit o interpretare geometrică. Astfel, evenimentul sigur Ω îl vom interpreta ca pe un dreptunghi, iar evenimentele A , B , C , ... – cercuri în acest dreptunghi. Atunci operaţiile de adunare, înmulţire vor fi reprezentate în formă de diagrame.



$A \bigcup B$ $A \bigcap B$

Definiţia 1.9. Se numeşte **eveniment opus** evenimentului A (contrar lui A) evenimentul $\overline{A}$, care se produce odată cu neproducerea lui A.

Exemplul 1.8. Într-o urnă sunt bile albe şi negre. Se extrage o bilă.

A – extragerea bilei albe, $\overline{A}$ – extragerea bilei negre.

Evident, evenimentul opus lui $\overline{A}$ este A, deci $\overline{\overline{A}} = A$.

Remarcă. Suma evenimentelor A şi B se mai notează $A + B$, iar produsul $A \cdot B$. Deci, se mai scrie uneori şi astfel: $C = A + B$; $D = AB$.

Operaţiile de adunare şi înmulţire a evenimentelor în mod firesc se extind asupra oricărui număr de evenimente.

Fie date evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Suma $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n$ este evenimentul, care se produce odată cu producerea a cel puţin unuia din evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Produsul $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_n$ este evenimentul, care se produce odată cu producerea tuturor evenimentelor $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Au loc formulele lui De Morgan:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\,; \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}. \qquad (1.1)$$

Rezultatele posibile ale unui experiment formează o mulţime **Ω.** Considerăm cazul când numărul rezultatelor posibile este finit, deci $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Vom numi fiecare element al Ω **eveniment elementar.**

Exemplul 1.9. a) Se aruncă o monedă. Notăm:

S – cade stema;

V – cade valoarea monedei;

Rezultatele posibile ale acestui experiment: $\Omega = \{S; V\}$.

b) Se aruncă două monede. Rezultatele posibile vor fi: $A_1 = SS$; $A_2 = SV$; $A_3 = VS$; $A_4 = VV$. $\Omega = \{SS, SV, VS, VV\}$.

c) Se aruncă un zar. Rezultatele posibile $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$, unde A_i este evenimentul „cade faţa cu i puncte”, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

De obicei Ω se numeşte **spaţiu al evenimentelor elementare**.

Fie A un eveniment, care se produce în rezultatul experimentului. Acest eveniment poate fi unul complex, deci, mai general decât cele elementare. De exemplu, evenimentul A – „a căzut un număr par de puncte la aruncarea zarului” se va realiza odată cu evenimentele elementare A_2, A_4, A_6.

Se spune în asemenea caz, că lui A îi sunt favorabile evenimentele elementare A_2, A_4, A_6 şi se scrie $A = \{A_2, A_4, A_6\}$.

Evenimentului B – „a căzut un număr de puncte divizibil la 3 la aruncarea zarului” îi sunt favorabile evenimentele elementare A_3, A_6 de aceea $B = \{A_3, A_6\}$.

Evenimentele A_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ au aceeaşi posibilitate de a se produce. Ele se numesc **echiprobabile**.

Considerăm un experiment cu n rezultate posibile şi echiprobabile $\Omega = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Aceste rezultate se mai numesc **cazuri posibile**.

Fie că evenimentului A, care se produce în acest experiment, îi sunt **favorabile** m evenimente elementare: $A = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}\}$.

Definiţia 1.10. Se numeşte **probabilitate clasică** a evenimentului A şi se notează prin $P(A)$ numărul:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{m(A)}{n}. \tag{1.2}$$

Aşadar, probabilitatea clasică a oricărui eveniment A este egală cu raportul dintre numărul de cazuri favorabile evenimentului A şi numărul de cazuri posibile ale experimentului.

Exemplul 1.10. Se aruncă un zar. A – „cade faţa cu un număr par de puncte”. Din cele enunţate mai sus imediat rezultă: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Exemplul 1.11. Se aruncă două monede. B – „pe ambele monede a căzut stema”. Evident, $\Omega = \{SS, SV, VS, VV\}$, $B = \{SS\}$, deci $n = 4$, $m = 1$, $P(A) = \frac{1}{4}$.

Exemplul 1.12. Se aruncă două zaruri. Fie i – numărul de puncte căzute pe primul zar; j – numărul de puncte de pe al doilea zar. Atunci spaţiul evenimentelor elementare va coincide cu mulţimea tuturor perechilor (ij), $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Acest spaţiu poate fi reprezentat de matricea.

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Considerăm evenimentele:

$A = \{(ij): i = j\}$, $A = \{11, 22, 33, 44, 55, 66\}$ deci $n = 36$, $m = 6$, $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ · $B = \{(ij): i \leq j\}$. Favorabile lui B sunt elementele matricei (1.3) de pe diagonala principală şi mai sus de ea. Deci, $n = 36$, $m(B) = 21$. $P(B) = \frac{m(B)}{n} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$, $C = \{(ij): i + j = 5\}$.

$C = \{41, 32, 23, 14\}$, deci, $m(C) = 4$; $P(C) = \frac{m(C)}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

În continuare, vom enunţa proprietăţile fundamentale ale probabilităţii clasice $P(A)$ (1.2).

1. Pentru orice eveniment A

$$0 \leq P(A) \leq 1. \tag{1.4}$$

Rezultă din faptul că pentru orice A avem: $0 \leq m \leq n$. Împărţind această inegalitate la $n > 0$, venim la relaţia (1.4).

2. Probabilitatea evenimentului imposibil $\varnothing$ este zero, deci:

$$P(\varnothing) = 0 \tag{1.5}$$

Pentru evenimentul imposibil $\varnothing$ avem $m = m(\varnothing) = 0$, de aceea,

$$P(\varnothing) = \frac{m(\varnothing)}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. Probabilitatea evenimentului sigur Ω este 1, deci:

$$P(\Omega) = 1 \tag{1.6}$$

Într-adevăr, evenimentului sigur Ω îi sunt favorabile toate cazurile posibile, $m = m(\Omega) = n$, $P(\Omega) = \frac{m(\Omega)}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

4. Pentru orice evenimente incompatibile A şi B avem:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{1.7}$$

Fie, $m(A)$ – cazurile favorabile lui A, $m(B)$ – cazurile favorabile lui B, $m(A \cup B)$ – cazurile favorabile pentru evenimentul sumă $A \cup B$. Deoarece evenimentele A şi B sunt incompatibile avem $m(A \cup B) == m(A) + m(B)$. Prin urmare:

$$P(A \cup B) = \frac{m(A \cup B)}{n} = \frac{m(A) + m(B)}{n} = \frac{m(A)}{n} + \frac{m(B)}{n} =$$

$$= P(A) + P(B).$$

5. $$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{1.8}$$

Deoarece $\overline{A}$ este evenimentul opus lui A rezultă: $m(\overline{A}) = n - m(A)$. Prin urmare,

$$P(\overline{A}) = \frac{m(\overline{A})}{n} = \frac{n - m(A)}{n} = 1 - \frac{m(A)}{n} = 1 - P(A).$$

Remarcă. La calculul probabilităţii clasice a evenimentului A se foloseşte formula (1.2), care este destul de simplă: se calculează numerele m şi n, apoi se ia raportul lor. Calculul acestor numere însă nu este întotdeauna simplu (ca în exemplele de mai sus). Pentru a face faţă acestor calcule şi a determina corect probabilitatea clasică a evenimentului A este nevoie de unele noţiuni din **combinatorică.**

a) **Permutări**. Fie dată o mulţime finită M, care conţine n elemente.

Aceste elemente pot fi aranjate în ordine diferită. De exemplu, din mulţimea $M = \{1, 2, 3\}$ pot fi formate mulţimile: $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 3, 2\}$; $\{2, 1, 3\}$; $\{2, 3, 1\}$; $\{3, 1, 2\}$ şi $\{3, 2, 1\}$.

Definiţia 1.11. Fiecare plasare a elementelor mulţimii M într-o anumită ordine se numeşte **permutare** a elementelor acestei mulţimi.

Fie P_n – numărul permutărilor elementelor mulţimii finite M. Atunci,

$$P_n = 1 \cdot 2 \dots (n-1) \cdot n = n!. \qquad (1.9)$$

Exemplul 1.13. Pentru $n = 3$ avem $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Pentru $n = 4$: $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Dacă $n = 6$, atunci $P_6 = 6! = 720$.

b) **Aranjamente**. Fie dată mulţimea finită M, care conţine n elemente. Formăm din elementele ei mulţimi ordonate, care vor conţine m elemente fiecare, $m \leq n$.

Definiţia 1.12. Mulţimile ordonate a lui M, care conţin fiecare câte m elemente se numesc **aranjamente** a elementelor acestei mulţimi.

Dacă notăm prin A_n^m numărul aranjamentelor din n elemente luate câte m, atunci:

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.10}$$

Are loc egalitatea $P_n = A_n^n$.

Exemplul 1.14. La 4 posturi diferite pretind 9 persoane. În câte moduri pot ocupa posturile vacante aceste persoane?

Rezolvare. Mulţimea M constă din $n = 9$ persoane. Trebuie să formăm mulţimi ordonate din $m = 4$ persoane. Deci,

$$A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024.$$

Răspuns. Posturile vacante pot fi ocupate în 3024 moduri.

c) **Combinări.** Fie dată o mulţime M, care conţine n elemente.

Formăm din elementele lui M mulţimi, care conţin m elemente ($m \leq n$). O mulţime diferă de alta cel puţin cu un element. Două mulţimi, care se deosebesc doar prin ordinea elementelor se consideră identice.

Definiţia 1.13. Mulţimile neordonate de m elemente din cele n ale mulţimii M se numesc **combinări** a elementelor mulţimii M.

Dacă notăm prin C_n^m numărul combinărilor din n elemente luate câte m, atunci,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{1.11}$$

Se ştie, că:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \tag{1.12}$$

şi

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n. \tag{1.13}$$

Exemplul 1.15. Pe masă sunt 20 de bilete de examinare.

Un student, chemat la răspuns, ia la întâmplare 2 bilete. În câte moduri el poate face acest lucru?

Rezolvare. Evident, acest număr va coincide cu:

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{19 \cdot 20}{1 \cdot 2} = 190.$$

Răspuns: Studentul poate lua 2 bilete din cele 20 în 190 moduri.

d) Fie dată o mulţime, care conţine N elemente. Printre ele se află K elemente, care posedă o proprietate specifică doar lor. Din mulţimea dată se iau la întâmplare n elemente. Printre elementele luate dorim să se afle k elemente cu proprietatea specifică. Dacă notăm prin m – numărul de astfel de alegeri, atunci:

$$m = C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}. \tag{1.14}$$

e) **Regula produsului**. Fie, că elementele unei mulţimi M depind de s parametri $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_s}$. Fiecare parametru parcurge independent N valori. Atunci numărul de elemente ale mulţimii M conţine N^s elemente posibile.

Exemplul 1.16. Un zar se aruncă de 4 ori. Câte cazuri posibile vor fi ?

Rezolvare. Rezultatul aruncării unui zar de 4 ori poate fi descris de evenimentele $A_i: (i_1, i_2, i_3, i_4)$ unde $i_k = 1, 2, 3, 4, 5, 6; k = 1, 2, 3, 4$. De exemplu, pot fi aşa evenimente: $(1\,1\,1\,1), (1\,2\,1\,1), (3\,5\,2\,6)$ ... . În total vom avea 6^4 cazuri posibile.

Exemplul 1.17. Formând numărul de telefon, o persoană a uitat ultimele 2 cifre, amintindu-şi doar că ele sunt diferite. Să se calculeze probabilitatea că s-a format numărul dorit.

Rezolvare. Considerăm evenimentul A: „s-a format numărul dorit”. $P(A) = \dfrac{m(A)}{n}$ n este numărul de perechi ordonate, care poate fi format din cifrele $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Deci, $n = A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$; $m(A) = 1$ (un singur număr este cel dorit). Prin urmare,

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{1}{90}.$$

Răspuns. Probabilitatea că a fost format numărul dorit este egală cu $1/90$.

Exemplul 1.18. Într-un lot de 10 piese 7 sunt de calitate superioară. Să se afle probabilitatea că din 6 piese, luate la întâmplare, 4 vor fi de calitate superioară.

Rezolvare. Considerăm evenimentul A – „Din 6 piese, luate la întâmplare, 4 vor fi de calitate superioară”. $P(A) = \frac{m(A)}{n}$. În total avem 10 piese. Din ele luăm 6, deci $n = C_{10}^{6}$. În lot sunt 7 piese de calitate superioară, iar printre cele luate noi dorim să avem 4 de acest fel, cazuri vor fi: C_7^4.

Restul pieselor printre cele luate, deci, 2 nu vor avea această calitate. Numărul de cazuri C_3^2. În fine, $m(A) = C_7^4 \cdot C_3^2$.

Prin urmare: $P(A) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{1}{2}$.

Răspuns. $P(A) = 1/2$.

Remarcă. Probabilitatea $P(A)$ nu poate fi calculată întotdeauna după formula clasică (1.2). Motive pot fi mai multe. De exemplu,

a) Se întâlnesc evenimente, despre care este greu de afirmat dacă ele sunt echiprobabile.

b) Există situaţii, când numărul de cazuri posibile nu este finit (sau aceste cazuri sunt greu de precizat). De exemplu, este dificil să vorbim despre cazurile posibile şi favorabile pentru evenimentul „ziua de 15 mai 2015 va fi una ploioasă”.

Din această cauză pe lângă definiţia clasică a probabilităţii sunt utilizate şi alte definiţii a ei.

Una din ele este cea de **probabilitate statistică**.

Fie că un experiment (probă) , în rezultatul căruia se poate produce evenimentul A, se repetă de n ori. Admitem că A s-a realizat de m ori.

Definiţia 1.14. ***S*e numeşte frecvenţă relativă** a evenimentului A şi se notează prin $f(A)$ raportul:

$$f(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.15}$$

Uşor se verifică următoarele proprietăţi ale frecvenţei $f(A)$.

$$0 \leq f(A) \leq 1. \tag{1.16}$$

$$f(\Omega) = 1\,; \; f(\varnothing) = 0. \tag{1.17}$$

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B), \tag{1.18}$$

dacă A şi B sunt incompatibile.

Demonstraţia acestor proprietăţi se face la fel cu demonstraţia proprietăţilor similare ale probabilităţii clasice $P(A)$. Frecvenţa relativă variază de la o serie de experimente la alta.

Exemplul 1.19. S-au efectuat câteva serii de experimente cu moneda. Fie, evenimentul A – „apare stema la aruncarea monedei”. Rezultatele a 3 serii de experimente sunt date în tabelul de mai jos.

Numărul de aruncări	Numărul de apariţii a stemei	Frecvenţa relativă.
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

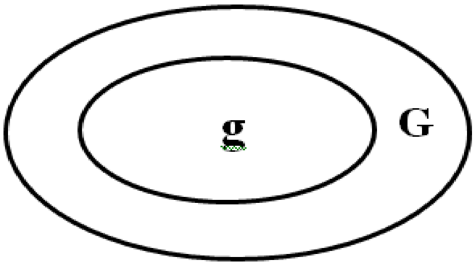
Rezultatele din tabel se datorează statisticianului K. Pearson ($1857 - 1936$).

Se observă că frecvenţa relativă $f(A)$ se apropie de probabilitatea evenimentului $P(A) = 0{,}5$ odată cu creşterea numărului de experimente (probe).

Definiţia 1.15. Se numeşte **probabilitate statistică** a evenimen- tului A frecvenţa acestui eveniment sau numărul în jurul căruia ea oscilează.

Altă modalitate de introducere a probabilităţii este cea de folosire a unor noţiuni din geometrie. Astfel se ajunge la noţiunea de probabilitate geometrică, care ne permite să calculăm probabilităţile şi în cazul experimentelor cu un număr infinit de cazuri posibile.

Considerăm domeniile măsurabile G şi g (domeniul g se află în interiorul domeniului G).



Un punct oarecare M se plasează la întâmplare pe domeniul G. Care este probabilitatea că acest punct va nimeri pe domeniul g? Considerăm că punctul M poate ocupa orice poziţie în G, iar probabilitatea de a nimeri în g este direct proporţională cu măsura domeniului g. Notăm prin A evenimentul „punctul M va nimeri în domeniul g”.

Logica celor expuse mai sus ne conduce la:

Definiţia 1.16. Se numeşte **probabilitate geometrică** a evenimen- tului A raportul

$$P(A) = \frac{mes(g)}{mes(G)}. \qquad (1.19)$$

Simbolul „**mes**” din formula (1.19) provine de la „**mesure**”, ceea ce înseamnă măsură şi se interpretează ca lungime, arie sau volum în funcţie de faptul unde se află domeniile G şi g (pe dreaptă, în plan sau în spaţiu).

Exemplul 1.20. Într-un cerc de raza R se plasează la întâmplare un punct M. Să se afle probabilitatea că acest punct va nimeri în triunghiul echilateral, înscris în cerc.

Rezolvare. Fie, evenimentul A – „punctul M va nimeri în triunghiul echilateral, înscris în cerc”. Evident,

$$P(A) = \frac{S_{\Delta}}{S_{cerc}} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}414.$$

Răspuns. $P(A) \approx 0{,}414$.

Exemplul 1.21. Două persoane au convenit să se întâlnească pe parcursul unei ore. Primul sosit la întâlnire aşteaptă 15 min. Să se calculeze probabilitatea că persoanele se vor întâlni.

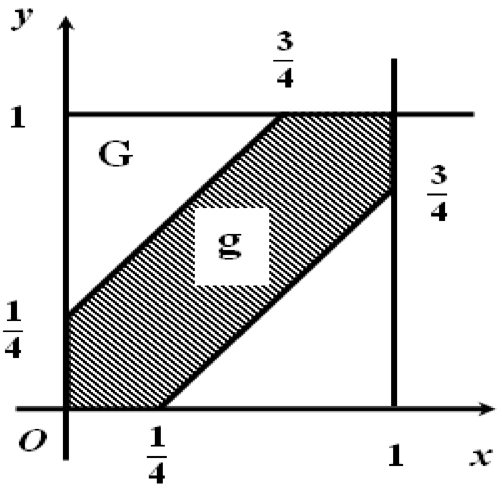
Rezolvare. Considerăm evenimentul A – „persoanele se vor întâlni”. Fie, x – momentul sosirii la întâlnire a primei persoane, iar y – momentul sosirii persoanei a doua. Fiecare poate sosi la întâlnire pe parcursul orei convenite, deci $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$. Astfel, mulţimea tuturor cazurilor posibile va coincide cu domeniul:

$$G = \{(x;y):\ 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}.$$

Persoanele se vor întâlni doar atunci când $|x-y| \le \frac{1}{4}$ $(= 15\,\text{min})$, deci cazurile favorabile întâlnirii vor fi date de mulţimea:

$$g = \left\{(x;y): |x-y| \le \frac{1}{4}\right\}.$$

Prin urmare, $P(A) = \dfrac{S(g)}{S(G)}$. Domeniul G reprezintă un pătrat cu latura 1, iar g este o fâşie din G cuprinsă între dreapta $x - y = -\dfrac{1}{4}$, şi dreapta $x - y = \dfrac{1}{4}$.



$$P(A) = \frac{1^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}{1^2} = 1 - \frac{9}{16} = 7/16.$$

Răspuns. Probabilitatea întâlnirii persoanelor este egală cu $7/16$.

Exemplul 1.22. Din intervalul $[0; 2]$ se iau la întâmplare două numere x şi y. Să se afle probabilitatea că aceste numere verifică inegalitatea:

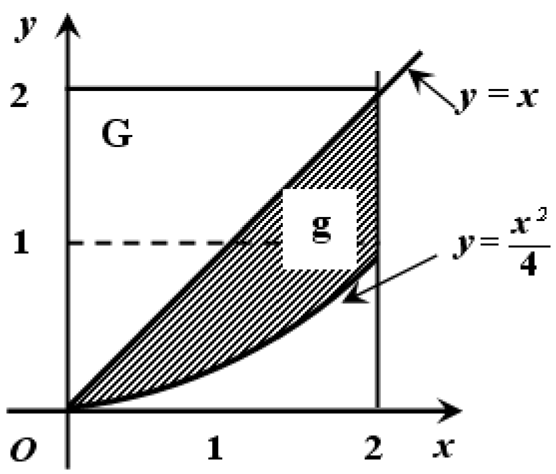
$$\frac{x^2}{4} \leq y \leq x.$$

Rezolvare: Considerăm evenimentul A – "numerele x şi y verifică inegalitatea $\frac{x^2}{4} \le y \le x$". Vom interpreta numărul x ca fiind abscisa unui punct din plan, iar y – ordonata lui.

Deoarece numerele x şi y sunt de pe $[0;2]$ venim la domeniul $G = \{(x;y): 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$, care ne va da mulţimea tuturor cazurilor posibile pentru A.

Mulţimea cazurilor favorabile evenimentului A va fi descrisă de domeniul $g = \{(x;y): \frac{x^2}{4} \le y \le x\}$. Atunci în virtutea formulei (1.19), care defineşte probabilitatea geometrică avem: $P(A) = \frac{S(g)}{S(G)}$.

În sistemul de coordonate xOy reprezentăm domeniile g şi G.



Imediat observăm: $S(G) = 2^2 = 4$. $S(g) = \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{4}{3}$. Prin urmare, $P(A) = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$.

Răspuns: Probabilitatea că numerele de pe $[\,0\,;\,2\,]$ luate la întâmplare, vor verifica inegalitatea $\frac{x^2}{4} \le y \le x$, este egală cu $\frac{1}{3}$.