LUCRAREA DE LABORATOR NR. 4

INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE

Probema Cauchy

Problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială de ordinul *n*

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{n-1}) \qquad (1)$$

constă în determinarea funcţiei $y=y(x)$, care satisface ecuaţia (1) şi condiţiile iniţiale

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_{01},\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{0,n-1} \qquad (2),$$

unde x_0, $y_0,\dots$, $y_{0,n-1}$ se consideră numere cunoscute.

Modelele matematice a multor procese în tehnică conţin sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare de forma

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt}=f_1(t,y_1,y_2,\dots,y_n) \\ \frac{dy_2}{dt}=f_2(t,y_1,y_2,\dots,y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dt}=f_n(t,y_1,y_2,\dots,y_n) \end{cases} \qquad (3)$$

În sistemul (3) funcţiile $f_i(t,y_1,y_2,\dots,y_n)$ $(i=\overline{1,n})$ sunt cunoscute. Pentru sistemul (3) problema Cauchy permite determinarea funcţiilor $y_i(t)$ $(i=\overline{1,n})$ care satisfac toate ecuaţiile sistemului şi condiţiile iniţiale

$$y_1(t_0)=y_{10};\ y_2(t_0)=y_{20};\ \dots,\ y_n(t_0)=y_{n0} \qquad (4)$$

În cazul în care se poate construi soluţia generală a ecuaţiei (1) sau sistemului (3), problema se reduce la determinarea constantelor de integrare, care satisfac relaţiile (2), respectiv (4).

În majoritatea cazurilor determinarea soluţiei pentru problema Cauchy este imposibilă ceea ce impune construirea soluţiei aproximative.

Metodele aproximative în dependenţă de modul în care se obţine soluţia problemei Cauchy pot fi împărţite în două grupe:

a) metode analitice, care oferă soluţia sub forma unei expresii analitice;
b) metode numerice care permit obţinerea soluţiei aproximative sub forma unui tabel de valori ale soluţiei într-un şir de puncte.

Metoda seriilor de puteri (*metoda derivării succesive*)

Această metodă este o metodă analitică.

Vom considera problema Cauchy (1)-(2), presupunînd că pentru ecuaţia (1) se îndeplinesc condiţiile de existenţă şi unicitate a soluţiei.

Fie că soluţia particulară $y=y(x)$ a ecuaţiei (1) permite dezvoltarea ei în serie Taylor în jurul punctului $x=x_0$:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \qquad (5)$$

Condiţiile iniţiale (2) permit ca valorile $y^{(i)}(x_0)$ $(i = \overline{0, n-1})$ să fie cunoscute. Pe de altă parte ecuaţia (1) se poate determina $y^{(n)}(x_0)$. Ceilalţi coeficienţi din dezvoltarea Taylor (5) se vor calcula prin diferenţierea succesivă a ecuaţiei (1), substituind în ultima valorile cunoscute deja a derivatelor de ordin superior în punctul $x=x_0$.

În mod similar se poate determina soluţia problemei Cauchy (3)-(4).

Exemplu. Să se determine primii 5 termeni ai dezvoltării în serie a soluţiei $y=y(x)$ pentru ecuaţia:

$$y''(1 + y) = (y')^2 + y',$$

cu condiţiile iniţiale $y(0) = 2, y'(0) = 2$. Vom căuta soluţia sub forma seriei de puteri:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \quad y''(0) = \left[\frac{y'}{1+y}(1+y')\right]_{x=0} = 2$$

Fie funcţia $f(x,y)$ satisface în dreptunghiul $D=\{|x-x_0| \le a; \ |y-y_0| \le b\}$ condiţiile

$$|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| \le N|y_1 - y_2|$$

$$\frac{df}{dx} = \left|\frac{df}{dx} + f\frac{df}{dy}\right| \le M \qquad (N,M\text{-}const)$$

Atunci eroarea metodei se estimează în modul următor:

$$|y(x_n) - y_n| \le \frac{hM}{2N}[(1 + hN)^n - 1],$$

unde $y(x_n)$- soluţia exactă, iar y_n soluţia numerică în punctul $x=x_n$, obţinută la pasul n. Această estimare este o estimare teoretică, care se utilizează rar. În practică se procedează în felul următor: se determină soluţia după metoda Euler cu pasul *h,* iar apoi cu pasul *h/2*. Atunci eroarea poate fi estimată conform relaţiei:

$$\left|y(x_n) - y^*\right| \approx \left|y_n - y_n{}^*\right|,$$

($y_n{}^*$ soluţia numerică în punctul $x=x_n$ pentru pasul egal cu *h/2*).

Metoda Euler modificată

După cum s-a văzut eroarea metodei este considerabilă, care poate fi întrucîtva micşorată dacă se va folosi un pas de discretizare destul de mic. Aceasta din urmă cere eforturi de calcul mari. De aceea au fost propuse mai multe modificări ale metodei Euler în scopul ridicării ordinului preciziei. Una din aceste modificări constă în precizarea iteraţională a soluţiei.

Fie că este cunoscută soluţia y_i numerică a problemei (6)-(7). Considerând această soluţie ca o aproximaţie iniţială, determinăm următoarea aproximaţie:

$$\overline{y_{i+1}} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{9}$$

$$y''' = \left(\frac{y'}{1+y}(y'+1)\right)' = \frac{y'y''}{1+y} + (1+y')\frac{(1+y)y'' - y'^2}{(1+y)^2}; y'''(0) = 2$$

$$y^{IV} = \frac{1}{(1+y)^3}[(1+y)((1+y)y'y''' + y''^2) - y'^2y'') + (y''^2(1+y) - y'^2y'')(1 + y) + (1+y')((1+y)((1+y)y''' + +y'y'' + 2y'y'') - 2y'((1+y)y'' - y'^2)] \quad y^{IV}(0) = 2$$

Aşadar soluţia aproximativă se poate scrie sub forma:

$$y(x) \approx 2 + 2x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{2}{4!}x^4,$$

sau

$$y(x) = 2 + 2x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4$$

Metoda Euler

Această metodă este o metodă numerică care permite determinarea soluţiei aproximative *y(x)* a problemei Cauchy sub forma unui tabel de valori. Ideea metodei se bazează pe dezvoltarea funcţiei *y=y(x)* în seria Taylor în vecinătăţile unui şir de puncte, numite noduri, $x=x_i$ *(i=0,1,2,…)* şi din care se elimină termenii seriei ce conţin derivatele de ordin mai superior ca unu.

Să considerăm problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială de ordinul unu:

$$y' = f(x, y) \tag{6}$$

$$y(x_0)=y_0 \tag{7}$$

Să considerăm un pas de discretizare destul de mic h şi construim un şir de puncte (noduri) echidistanţate $x_i=x_0+ih$ $(i=0,1,2,\ldots)$. Soluţia aproximativă a problemei (6)-(7) se obţine conform algoritmului

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i) \qquad (i=0,1,2,\ldots) \tag{8}$$

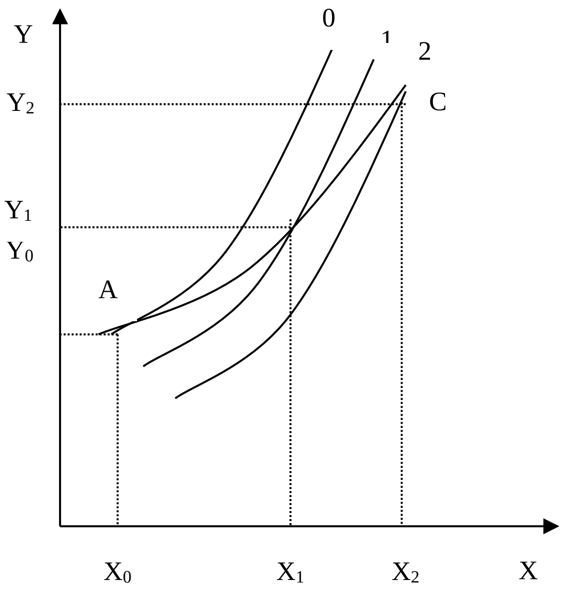
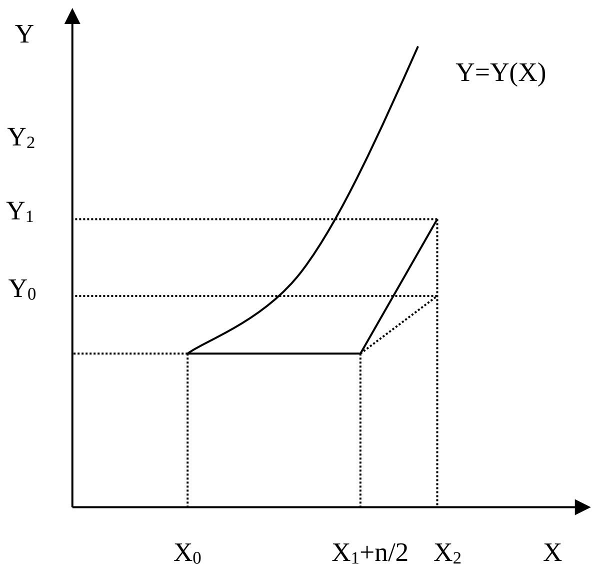


Figura 4



Fig

Geometric metoda Euler constă în înlocuirea curbei $y=y(x)$ prin linia poliginală ABC (fig.5) în modul următor: tangenta la curba integrală $y=0$ în punctul $A(x_0,y_0)$ are coeficientul unghiular $y_0 = f'(x_0, y_0)$. Punctele B şi C se obţin în rezultatul soluţionării problemei Cauchy prin metoda Euler. După fiecare pas noi de fapt trecem pe o altă curbă integrală. Astfel segmentul BC este de acum un segment al tangentei dusă prin punctul $B(x_1,y_1)$ la curba integrală 1. Deci sensul geometric al metodei constă în înlocuirea curbei integrale O care trece prin punctul $A(x_o, y_o)$ printr-o linie poligonală, numită frînta lui Euler. Metoda lui Euler este o metodă directă, care foloseşte informaţia legată de o singur pas al algoritmului, adică din acest punct de vedere este o metodă unipas.

Eroarea metodei se constituie din două componente:

a) eroarea legată de trunchierea seriei Taylor;

b) eroarea rotungirii.

Deoarece aceste erori se adună pas cu pas, eroarea soluţiei într-un punct $\bar{x}$, aflat la o distanţă *l* de la punctul x_o, poate fi destul de mare. Din acest punct de vedere, metoda Euler este o metodă de ordinul 1 de exactitate.

Folosind această valoare se obţine algoritmul modificat Euler.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x+1, \overline{y_{i+1}}) \right] \tag{10}$$

Sensul geometric al metodei rezultă din figura (5)

Metoda Runge – Kutta.

Această metodă este de asemenea o metodă directă de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale ordinare. Ideea metodei constă în construirea unei formule de calcul al valorilor soluţiei problemei Cauchy în punctele x_i *(i=0,1,2, …)* de tipul

$$y_{i+1}=y_i+h\varphi(x_i, y_i, h) \tag{1}$$

în care funcţia $\varphi\ (x_i,y_i,h)$ ar aproxima segmentul seriei Taylor (5) în jurul punctului x_i cu exactitatea 0 (h^{p+1}) şi totodată să nu conţină derivatele funcţiei *f(x,y).* Trebuie de menţionat că metoda Runge – Kutta de ordinul 1 *(p=1)* este de fapt metoda lui Euler.

Vom exemplifica pentru cazul metodei Runge – Kutta de ordinul 2 cum poate fi obţinută formula de recurenţă.

Vom căuta funcţia φ sub forma

$$\varphi(x,y,h)=Af(x,y)+Bf(x+\alpha h, y+\beta h) \tag{12}$$

în care A,B,α,β sunt nişte constante temporar necunoscute. Pentru a le calcula vom dezvolta termenul al doilea din partea dreaptă a expresiei (12) în seria Taylor în împrejurimile punctului x_i, păstrînd numai primii trei termeni (exactitatea de aproximare $0(h^2)$). Obţinem:

$$\varphi(x,y,h)=Af(x_i,y_i)+\left[\frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} h\alpha + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} h\beta f(x_i, y_i) + 0(h^2) \right]$$

Pe de altă parte soluţia *y(x)* a problemei (6)-(7), fiind dezvoltată în seria Taylor cu exactitatea $0(h^2)$ este

$$y_{i+1} = y_i + h\left[f(x_i, y_i) + \frac{h}{2}(f'_x (x_i, y_i) + f'_y (x_i, y_i)\, f(x_i, y_i)) \right] + 0(h^2)$$

Comparînd ultimele două formule obţinem un sistem de ecuaţii pentru calculul coeficienţilor necunoscuţi.

$$A+B=1;\ \alpha B=1/2;\ \beta B=1/2.$$

Sistemul dat cu trei ecuaţii conţine patru necunoscute şi este un sistem nedeterminat, soluţia căreia este

$$A=1-\lambda;\ B=\lambda;\ \alpha=\beta=\gamma/2\lambda;\quad (\lambda\neq 0).$$

şi care depinde de paramentrul λ. În particular pentru $\lambda=1/2$ se obţine formula Runge – Kutta de ordinul 2

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), unde (i = 0,1,2) \\ k_1 = f(x_i, y_i);\ k_2 = f(x_i + h, y_i + h k_1) \end{cases} \quad (13)$$

Într-un mod similar poate fi obţinută schema de calcul al metodei Runge – Kutta de orice ordin p. În particular metoda Runge – Kutta de ordinul patru constă în aplicarea algoritmului:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \\ \Delta y = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}) \end{cases}, \quad i=0,1,2 \qquad (14)$$

unde:

$$k_1^{(i)}=hf(x_i,y_i);\ \ k_2^{(i)}=hf(x_i+h/2;y_i+k_1^{(i)}/2)$$

$$k_2^{(i)}=hf(x_i+h/2;y_i+k_2^{(i)}/2);\ k_3^{(i)}=hf(x_i+h;y_i+k_3^{(i)});$$

Pasul h poate fi schimbat de la punct la punct. Pentru a verifica corectitudinea alegerii pasului h se poate calcula mărimea

$$\theta = \left| \frac{k_2^{(i)} - k_3^{(i)}}{k_1^{(i)} - k_2^{(i)}} \right|$$

care nu trebiue să depăşească cîteva sutimi, în caz contrar el trebuie micşorat.

Metoda Runge – Kutta are ordinul h^4 de exactitate pe întreg segmentul de calcul a soluţiei. Estimarea erorii metodei este destul de dificilă, însă această estimare poate fi efectuată după regula Runge în modul următor.

Fie $y(x_n)$ valoarea soluţiei exacte în punctul x_n, iar y_n^*, y_n – valorile aproximative ale soluţiei în acest punct, calculate cu pasul $h/2$ şi h. Atunci eroarea metodei este determinată de relaţia

$$\left| y_n^* - y(x_n) \right| \approx \frac{1}{15} \left| y_n^* - y_n \right|$$

Probleme:

1. Să se determine soluţiile numerice ale ecuaţiilor diferenţiale pe segmentul *[a, b]* prin metode Euler, Euler modificat Runge – Kutta cu pasul h=0.05. Să se efectueze o analiză a rezultatelor primite

1) $y' = 1+0.5y\sin x-0.75y^2$, $y(0)=0;\ a=0;\ b=1;$

2) $y' = e^x-y^2$, $y(0)=0;\ a=0;\ b=1;$

3) $y' = x\ln y-y\ln x$, $y(1)=1;\ a=1;\ b=2;$

4) $y' = 0.1\left[\sqrt[3]{y}+\ln(x+y)-1\right]$, $y(-1)=2;\ a=-1;\ b=0;$

5) $y' = y^2+\sqrt{y}+\cos y$, $y(0)=0;\ a=0;\ b=1;$

6) $y' = 1-\sin(1,25x+y)+0.4/(2+x)$, $y(-1)=0;\ a=-1;\ b=0;$

7) $y' = \dfrac{\cos y}{1.25+x}-0.25y^2$, $y(0)=0;\ a=0;\ b=1;$

8) $y' = -y^2+\dfrac{2,6}{1+x^2}$, $y(1)=0.6;\ a=1;\ b=2;$

9) $y' = \dfrac{\cos(1.8x-0.5)}{1.5+x^2}$, $y(0)=0;\ a=0;\ b=1;$

10) $y' = e^{-1.2x}(x^2+1.8)$, $x(0)=0;\ a=0;\ b=1;$

11) $y' = -\dfrac{y}{x}-0.2y^2\ln x$, $y(1)=1;\ a=1;\ b=2;$

12) $y' = \dfrac{5.2}{\cos x}-y\,tgx$, $y(0)=1;\ a=0;\ b=1;$