UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI
Facultatea de Calculatoare, Informatică și Microelectronică
Departamentul
INFORMATICĂ ȘI INGINERIA SISTEMELOR

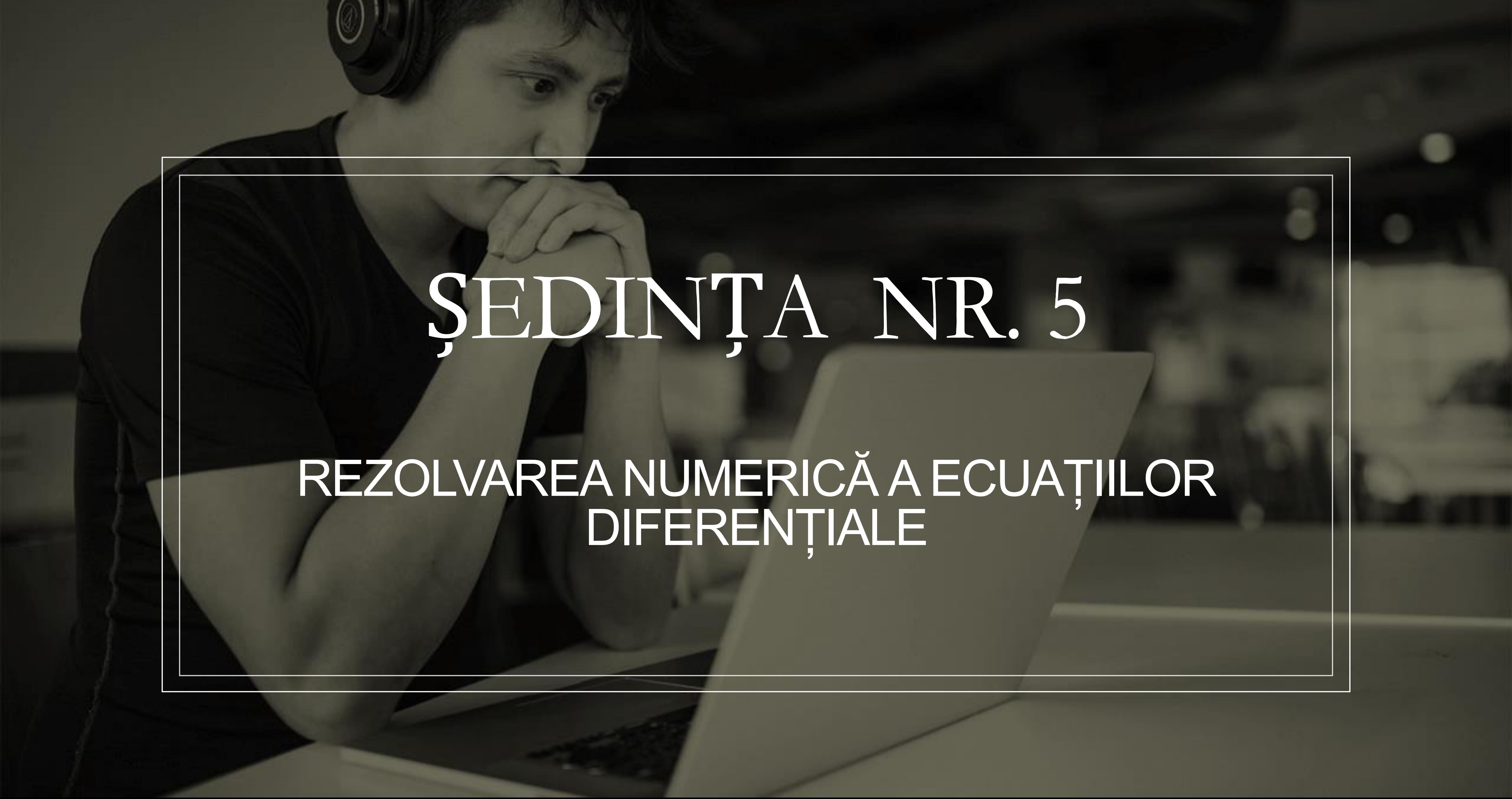
Disciplina
Metode și modele de calcul

Modulul I (Metode numerice)

Programul de licență
CALCULATOARE și REȚELE, TEHNOLOGIA INFORMAȚIEI
(frecvența redusă)

Prof. univ. dr. Vasile MORARU

Anul universitar: 2021-2022



ȘEDINȚA NR. 5

REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

Sumar

Ecuații diferențiale

Problema Cauchy

Metoda Euler

Metoda Euler modificată

Ecuații diferențiale

O ***ecuație diferențială*** este o relație de dependență funcțională între variabila independentă x, funcția necunoscută $y(x)$ și derivatele sale $y^{(k)}(x)$:

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

Dacă funcția necunoscută depinde de o variabilă independentă ecuația se numește ecuație ***diferențială ordinară***, iar dacă funcția necunoscută depinde de mai multe variabile independente - ***ecuație cu derivate parțiale***:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x_m^n}\right) = 0$$

Ecuații diferențiale

Ecuații diferențiale ordinare

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

Ecuații diferențiale cu derivate parțiale

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x_m^n}\right) = 0$$

Ecuații diferențiale

Ecuația diferențială sub forma explicită:

$$y^{(n)} = f\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n-1)}(x)\right) = 0$$

Ecuația diferențială are ordinul "*n*" dacă derivata de ordin maxim care apare in ecuație este $y^{(n)}$.

Ecuații diferențiale

- ***Soluția ecuației diferențiale*** este o funcție din spațiul infinit – dimensional al funcțiilor

- ***Soluția numerică*** a ecuațiilor diferențiale se bazează pe aproximarea finit - dimensională

- Ecuația diferențială este înlocuită cu o ecuație algebrică a cărei soluție se apropie de cea a ecuației diferențiale date

Ecuații diferențiale

O soluție (***integrală***) a unei ecuații diferențiale de ordinul n este o funcție $y\,(x)$ care are pe un anumit interval $(a,\, b)$ derivatele

$$y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$$

până la ordinul n inclusiv și care satisfac această ecuație.

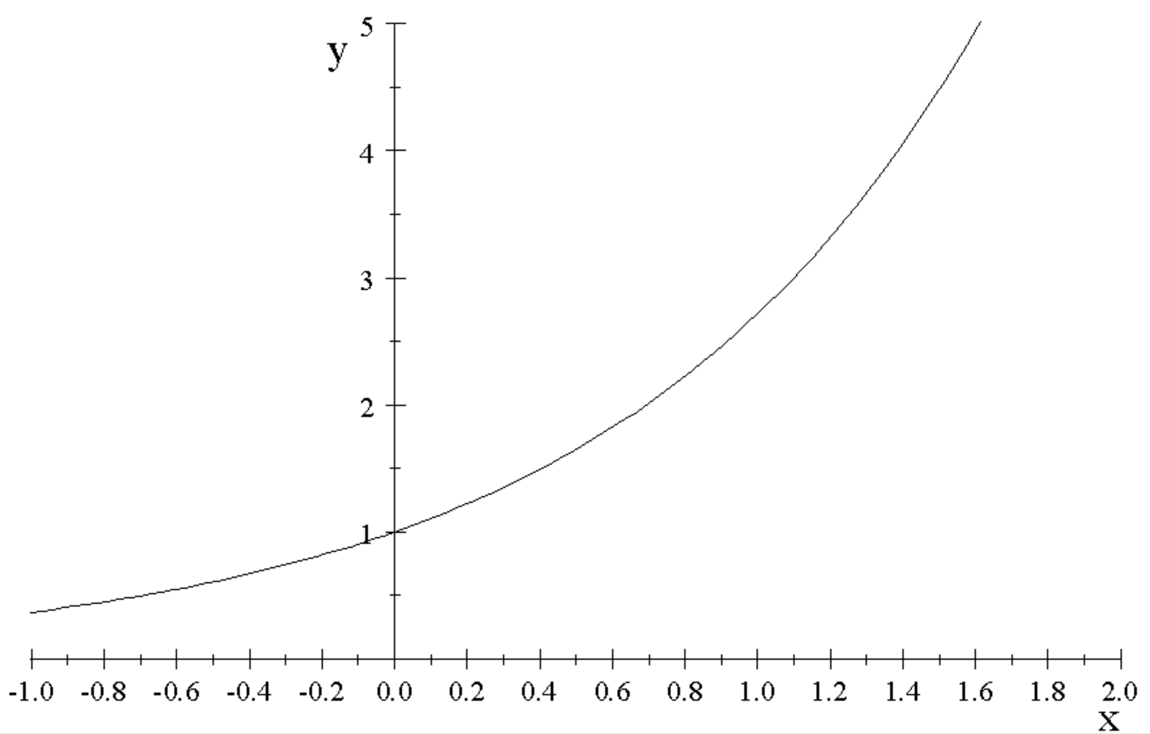
Procesul de rezolvare a unei ecuații diferențiale se numește ***integrare.***

Ecuații diferențiale

Exemplu

$$y' = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$



$$y(x) = \int e^x dx = e^x + C$$

Există multe funcții ale căror primitive, deși există, nu pot fi exprimate în termeni de ***funcții elementare***

$$y' = e^{-x^2}$$

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Funcția de eroare Gauss

$$y' = cos(x^2)$$

$$y' = sin(x^2)$$

$$C(x) = \int_0^x cos(t^2)\, dt$$

Funcția Fresnel

Există multe funcții ale căror primitive, deși există, nu pot fi exprimate în termeni de funcții elementare

$$y' = \frac{sin(x)}{x}$$

$$y' = \frac{cos(x)}{x}$$

$$y' = \frac{1}{ln(x)}$$

$$Si(x) = \int_0^x \frac{sin(t)}{t} dt$$

Sinus integral

$$Ci(x) = \int_x^\infty \frac{cos(t)}{t} dt$$

Cosinus integral

Problema Cauchy

Problema lui Cauchy este una dintre principalele probleme ale teoriei ecuațiilor diferențiale (obișnuite și cu derivate parțiale);

Problema Cauchy constă în găsirea unei soluții (integrale) a unei ecuații diferențiale care satisface așa-numitele condiții inițiale (date inițiale).

Problema Cauchy apare de obicei atunci când se analizează procesele determinate de legea evoluției diferențiale și starea inițială (a cărei expresie matematică este ecuația și condiția inițială). Acest lucru motivează terminologia și alegerea notațiilor: datele inițiale sunt stabilite pentru $x = 0$, iar soluția se găsește pentru $x > 0$.

$$y' = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$dy = f(x, y)dx$$

$$\int dy = \int f(x, y)dx$$

$$y = \int f(x, y)dx$$

$$= F(x)\big|x_0 + C$$

Clasificarea metodelor numerice

Se cunosc două clase importante de metode numerice pentru rezolvarea ***problemei Cauchy.***

1. ***Metode directe*** (uni-pas, pas cu pas) în care y_k este calculat, printr-o relație de recurență, în funcție numai de valoarea y_{k-1} calculată anterior.

În această categorie intră metoda Taylor și metodele Runge-Kutta.

2. ***Metode indirecte*** (cu mai mulți pași) în care se calculează printr-o relație de recurență în funcție de valorile precedente

$$y_{k-m}, \dots, y_{k-2}, y_{k-1}$$

În această categorie intră metodele Adams-Bashforth, Adams-Moulton și metoda predicator - corector.

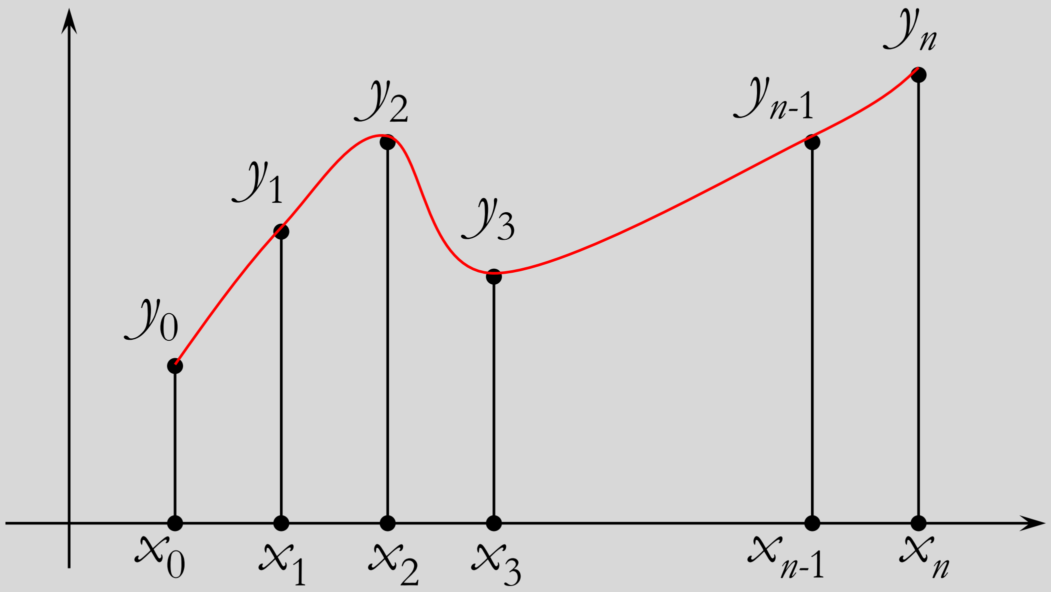
Rezolvarea numerică a problemei Cauchy

Problema Cauchy:

$$\left.\begin{array}{c} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\}$$

A rezolva numeric problema Cauchy înseamnă a construi tabelul de valori

x_0	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y_0	y_1	y_2	y_3	…	y_n



Metoda lui Euler

Metoda lui Euler este cea mai simplă metodă numerică pentru rezolvarea ***problemei Cauchy***. Este descrisă pentru prima dată de Leonard Euler în 1768 în lucrarea „*Calculul integral*”.

Metoda lui Euler este o metodă directă, într-un singur pas (uni-pas), de ordinul întâi de acuratețe, bazată pe aproximarea curbei integrale cu o funcție liniară pe porțiuni, așa-numita linia frântă a lui Euler.

1707-1783

Euler este considerat a fi fost forța dominantă a matematicii secolului al XVIII-lea și unul dintre cei mai remarcabili matematicieni și savanți multilaterali ai omenirii.

El a introdus noțiunea de funcție și a fost primul care a notat ***f(x)***

A introdus notația modernă pentru funcțiile trigonometrice, litera ***e*** pentru baza logaritmului (cunoscut în prezent drept numărul lui Euler), litera grecească ∑ (sigma) pentru sumă și litera ***i*** pentru unitatea imaginară.

Tot Euler este cel care a definit funcția exponențială pentru numerele complexe și a făcut legătura dintre aceasta și funcțiile trigonometrice, prin celebra sa formulă:

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$$

Metoda lui Euler

Metoda lui Euler joacă un rol important în teoria metodelor numerice pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale ordinare, deși nu este folosită adesea în calculele practice datorită preciziei sale reduse.

Această metodă poate fi obținută în mai multe moduri:

- folosind interpretarea geometrică,
- folosind dezvoltarea în seria Taylor,
- cu ajutorul metodei diferențelor finite (prin aproximarea derivatei cu diferențe finite),
- prin metoda cuadraturii (folosind o ecuație integrală echivalentă).

Metoda Euler

$$\left.\begin{array}{c} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\}$$

Se cere de găsit soluția problemei Cauchy pe intervalul $[a, b]$

Împărțim intervalul $[a, b]$ în *n* intervale egale $[x_i, x_{i-1}]$ cu pasul

$$h = \frac{b-a}{n}:$$

$$x_0 = a,\quad x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ \ldots\ ,\ x_n = b = x_0 + nh$$

Metoda Euler

$$\left.\begin{array}{r} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\}$$

Soluția este căutată pe intervalul $[x_0 = a, x_n = b\ ]$, în nodurile

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b.$$

Notăm soluția aproximativă în nodurile x_i cu y_i

Se calculează recursiv $y_1, y_2, \cdots, y_n$

y_0 este cunoscut

Metoda lui Euler

$$\left.\begin{array}{c} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\}$$

Se caută soluția problemei Cauchy pe intervalul

$$[a = x_0, b = x_n]$$

$y = y(x)$?

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	?	?	$\cdots$	?

Metoda Euler

Metoda Euler se obține prin reținerea numai a primilor doi termeni din dezvoltarea în serie Taylor

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} y''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \cdots$$

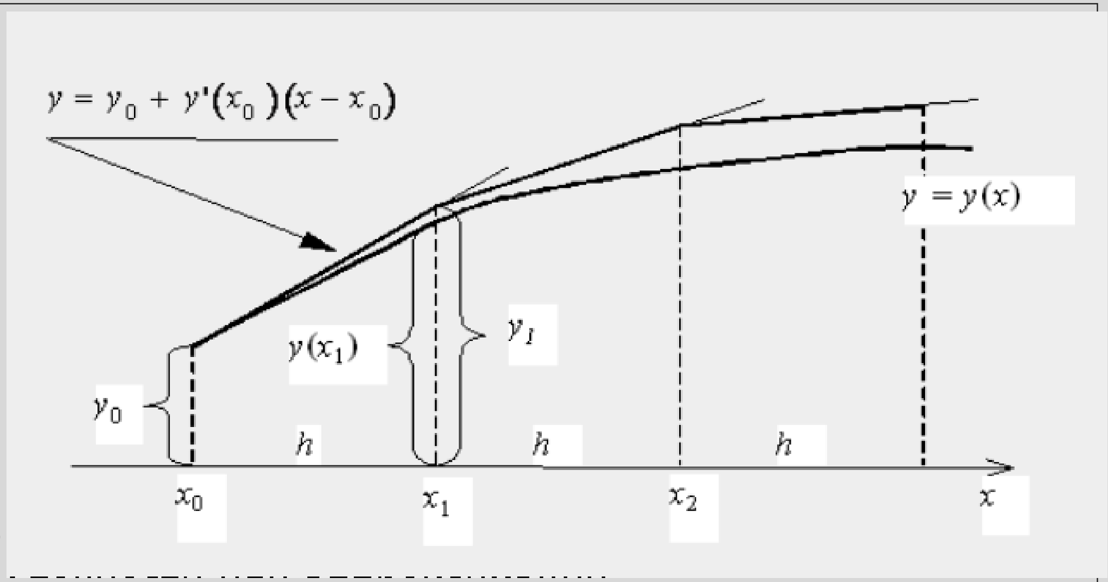
Soluția pentru *x*= x_1 va fi

$$y(x_1) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + \cdots$$

unde

$$h = \frac{b - a}{n}$$

Metoda Euler



$$\Rightarrow \quad y(x_1) \approx y(x_0) + hy'(x_0)$$

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \Rightarrow y'(x_0) = f\big(x_0, y(x_0)\big) = f(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

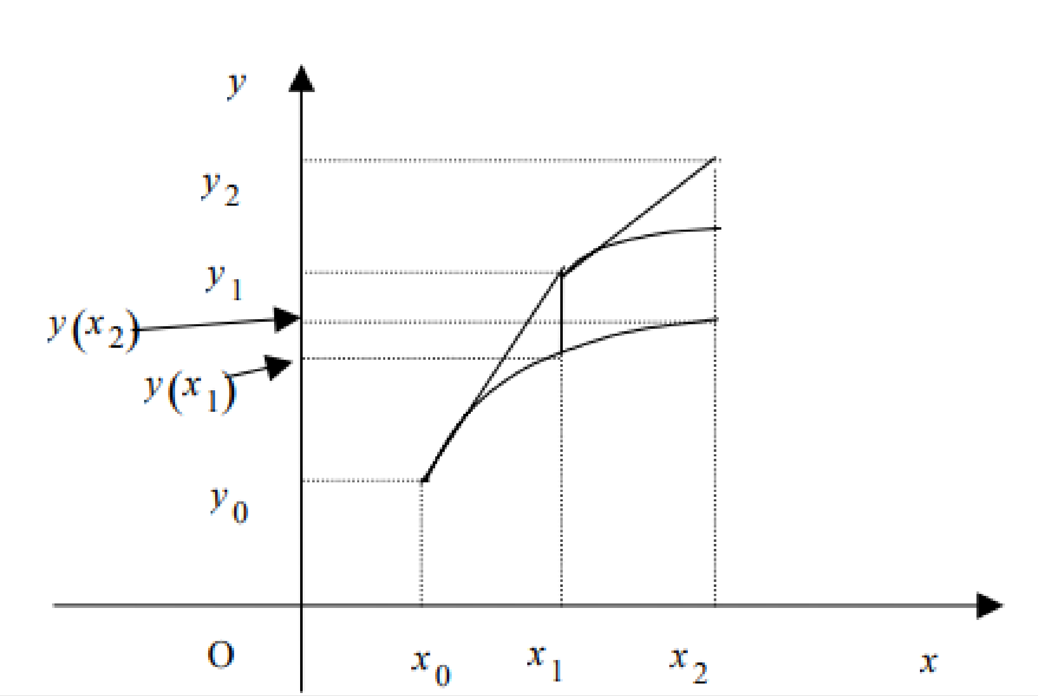
În mod analog obținem

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k), \quad k = 0,1,2,\cdots,n-1$$

Aceste formule sunt generalizate și în cazul sistemelor de ecuații diferențiale ordinare

Interpretarea geometrică a metodei Euler

- Metoda lui Euler are o interpretare geometrică foarte simplă: dacă s-a determinat valoarea y_k, pentru a determina y_{k+1}, se consideră soluția ecuației care trece prin (x_k, y_k) (deci care satisface $y(x_k) = y_k$;
- se duce apoi tangenta la graficul acestei soluții, în punctul (x_k, y_k);
- se intersectează această tangentă cu dreapta $x = x_{k+1}$, obţinându-se y_{k+1}. Din acest motiv, metoda lui Euler se mai numește și metoda liniilor poligonale. După cum se observă din figura alăturată, erorile se acumulează.



Interpretarea geometrică a metodei Euler

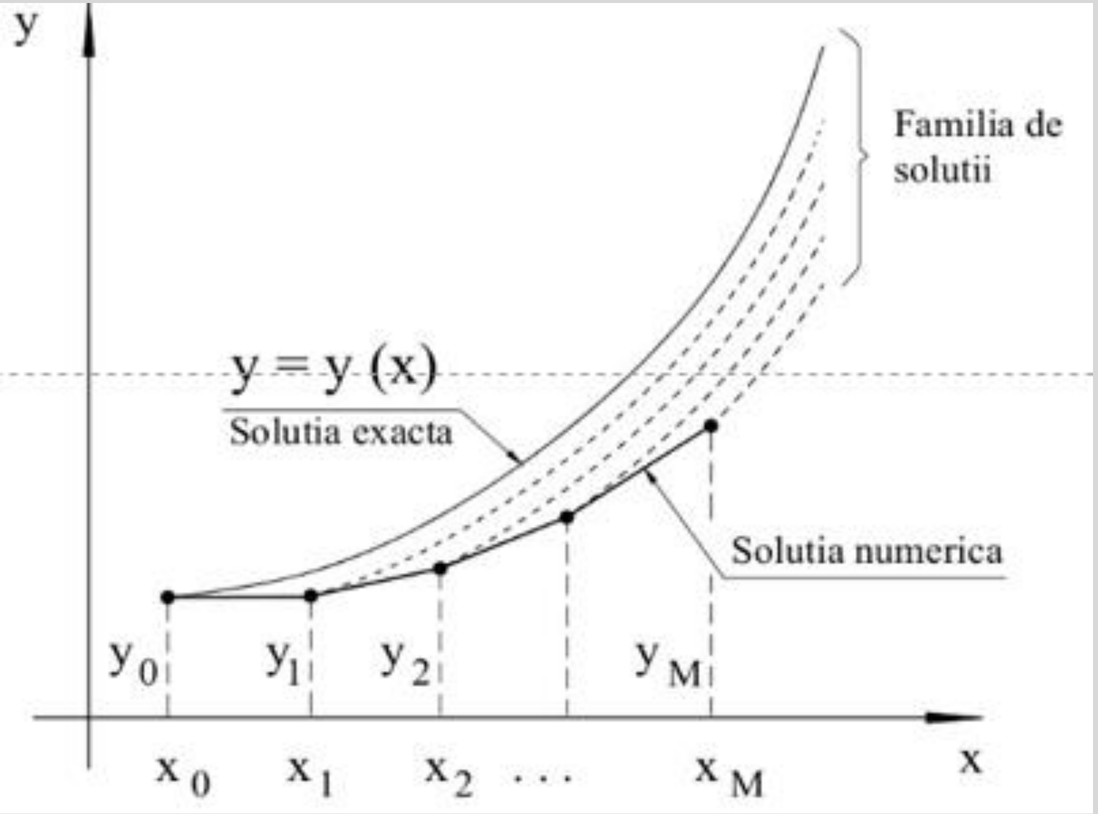
Din punct de vedere geometric, metoda Euler revine la înlocuirea curbei

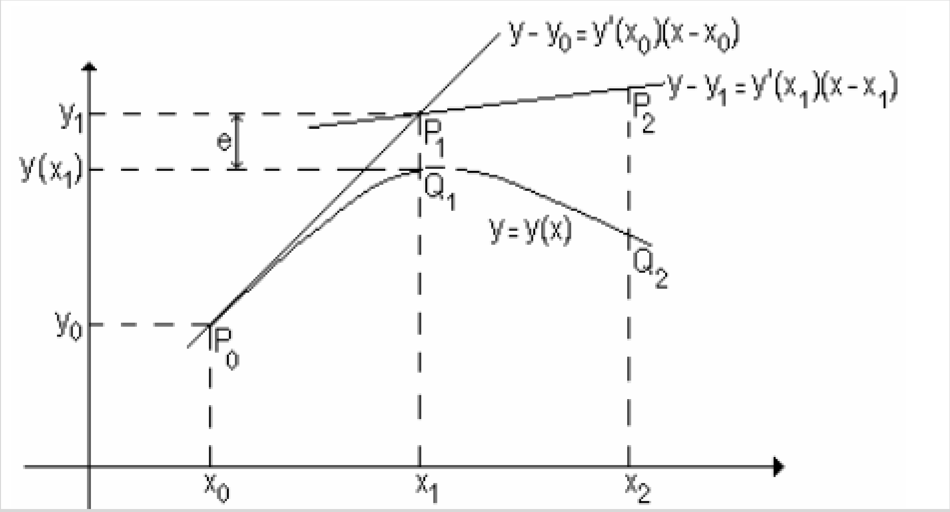
$$y = y(x)$$

cu o linie poligonală prin punctele

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots$$

Metoda lui Euler mai este cunoscută sub numele de metoda liniilor frânte





y - y0 = y'(x0)(x - x0)
y - y1 = y'(x1)(x - x1)
y1
e
y(x1)
P1
Q1
P2
y = y(x)
Q2
y0
P0
x0
x1
x2

Metoda Euler

Exemplu 1.

Aplicând metoda lui Euler, să se calculeze pe intervalul

$$[0; 1]$$

soluția ecuației diferențiale

$$y' = x^2 - 2y$$

cu condiția inițială

$$y(0) = 1,$$

alegând pasul

$$h = 0{,}1$$

Metoda Euler

$$y' = x^2 - 2y$$

$$f(x, y) = x^2 - 2y$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$$

Exemplu 1 (continuare).

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1$$

$$f(x_0; y_0) = f(0; 1) = 0^2 - 2 \cdot 1 = -2$$

$$hf(x_0; y_0) = 0{,}1 \cdot (-2) = -0{,}2$$

$$x_1 = 0{,}1, \quad y_1 = y_0 + hf(x_0; y_0) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

$$f(x_1; y_1) = f(0{,}1; 0{,}8) = (0{,}1)^2 - 2 \cdot 0{,}8 = 0{,}01 - 1{,}6 = -1{,}59$$

$$hf(x_1; y_1) = 0{,}1 \cdot (-1{,}59) = -0{,}159$$

$$x_2 = 0{,}2, \quad y_2 = y_1 + hf(x_1; y_1) = 0{,}8 - 0{,}159 = 0{,}641$$

$$f(x_2; y_2) = f(0{,}2; 0{,}641) = (0{,}2)^2 - 2 \cdot 0{,}641 = 0{,}04 - 1{,}282 = -1{,}242$$

$$hf(x_2; y_2) = 0{,}1 \cdot (-1{,}242) = -0{,}1242$$

$$x_3 = 0{,}3, \quad y_3 = y_2 + hf(x_2; y_2) = 0{,}641 - 0{,}1242 = 0{,}5168$$

Metoda Euler

Exemplu 1 (continuare).

$$y' = x^2 - 2y$$

$$f(x, y) = x^2 - 2y$$

i	x_i	y_i	$f(x_i; y_i)$	$hf(x_i; y_i)$
0	0	1	-2	-0,2
1	0,1	0,8	-1,59	-0,159
2	0,2	0,641	-1,242	-0,1242
3	0,3	0,5168	-0,944	-0,0944
4	0,4	0,42244	-0,685	-0,0685
5	0,5	0,35395	-0,458	-0,0458
6	0,6	0,30816	-0,256	-0,0256
7	0,7	0,28253	-0,075	-0,0075
8	0,8	0,27502	0,09	0,009
9	0,9	0,28402	0,242	0,0242
10	1	0,30821	0,3836	0,03836

Metoda Euler

Exemplu 2.

Aplicând metoda lui Euler, să se calculeze pe intervalul

$$[1;\, 1.5]$$

soluția ecuației diferențiale

$$y' = y + \frac{1+x}{y^2}$$

cu condiția inițială

$$y(1) = -1,$$

alegând pasul

$$h = 0{,}1$$

Metoda Euler

Exemplu 2. (continuare)

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k),$$

$f(x, y) = \mathrm{y} + \frac{1+x}{y^2}$

$y_0 = -1$

$y_1 = y_0 + h \times f(x_0, y_0) = -1 + 0{,}1 \times \left[-1 + \frac{1+1}{(-1)^2}\right] = -0{,}9000$

$y_2 = y_1 + h \times f(x_1, y_1) = -0{,}9 + 0{,}1 \times \left[-0{,}9 + \frac{1+1{,}1}{(-0{,}9)^2}\right] = -0{,}73074$

$y_3 = y_2 + h \times f(x_2, y_2) = -0{,}7307 +$

$+0{,}1 \times \left[-0{,}7307 + \frac{1+1{,}2}{(-0{,}7307)^2}\right] = -0{,}1554$

....

Metoda Euler

Algoritmul Metodei Euler:

Date de intrare: n-numărul de subintervale, h-pasul metodei, valorile iniţiale x_0, y_0 şi expresia funcţiei f.

Date de ieşire: vectorul ce conţine valorile numerice: $y_0, y_1, \dots, y_n$.

P1: Se introduc datele de intrare;

P2: Se realizează diviziunea intervalului $[x_0, x_0 + nh]$ în n intervale prin nodurile $x_0, x_1, \dots, x_n$.

$$(x_i = x_0 + ih);$$

P3: Se determină valorile y_i, $i = \overline{0, n}$ cu relaţia:

$$y_{i+1} = y_i + hf_i, \; f_i = f(x_i, y_i);$$

P4: Se afişează valorile funcţiei şi nodurile în care sunt calculate acestea, după care se opreşte algoritmul.

Metoda Euler modificată

Metoda lui Euler s-a obținut prin trunchierea serii Taylor la doi termeni, o nouă metodă se poate obține în mod natural, prin reținerea mai multor termeni în dezvoltarea Taylor.

Dacă în seria Taylor păstrăm primii trei termeni și aproximăm derivata de ordinul doi cu ajutorul derivatei de ordinul întâi

$$y''(x_{i+1}) \approx \frac{y'(x_{i+1}) - y'(x_i)}{h}$$

obținem metoda lui Euler modificată

Metoda Euler modificată

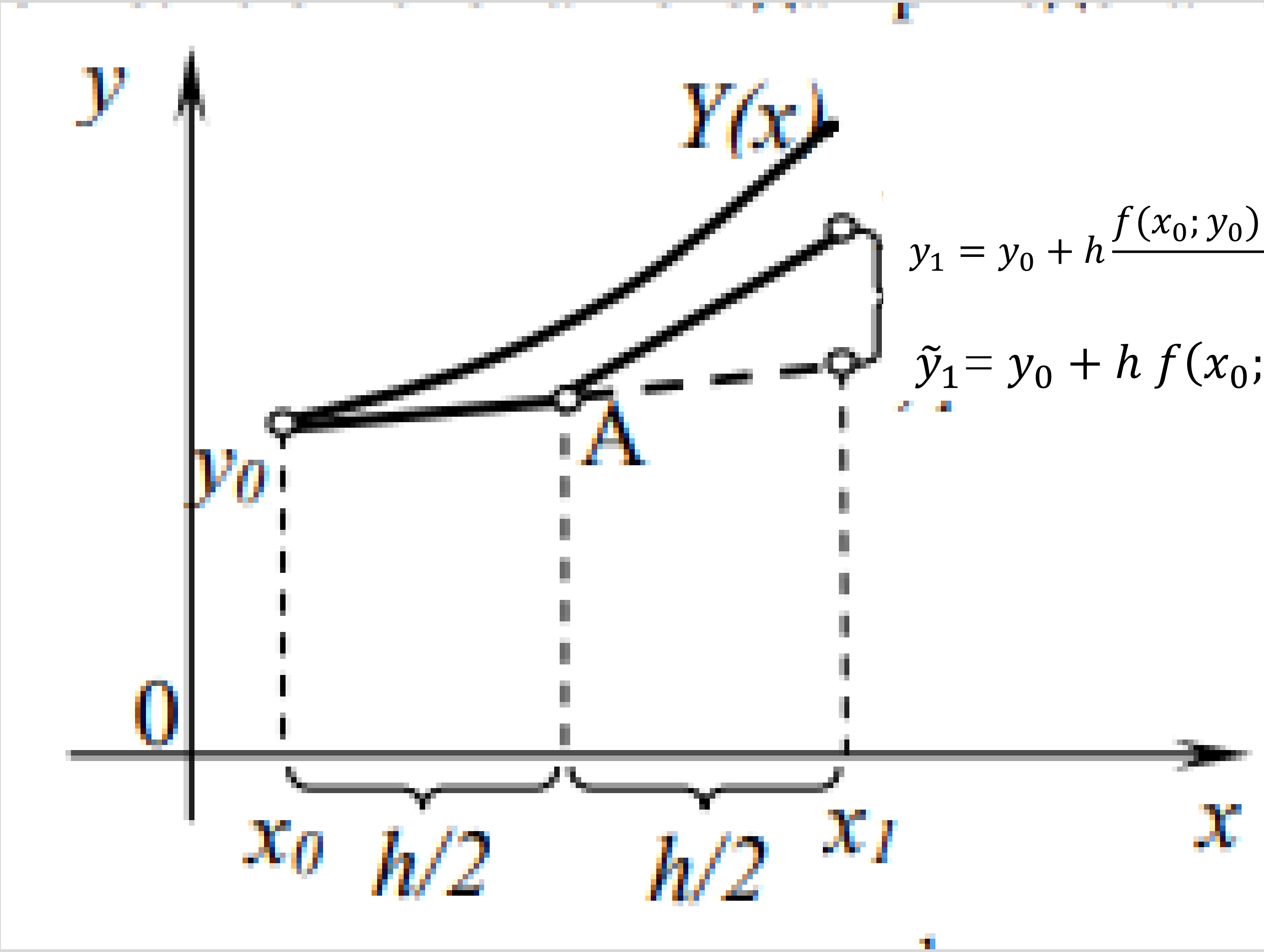
La prima etapă, se găsește folosind metoda Euler

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h\, f(x_i; y_i),$$

apoi această valoare este precizată folosind formula:

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{f(x_i; y_i) + f(x_{i+1}; \tilde{y}_{i+1})}{2}$$

Metoda Euler modificată

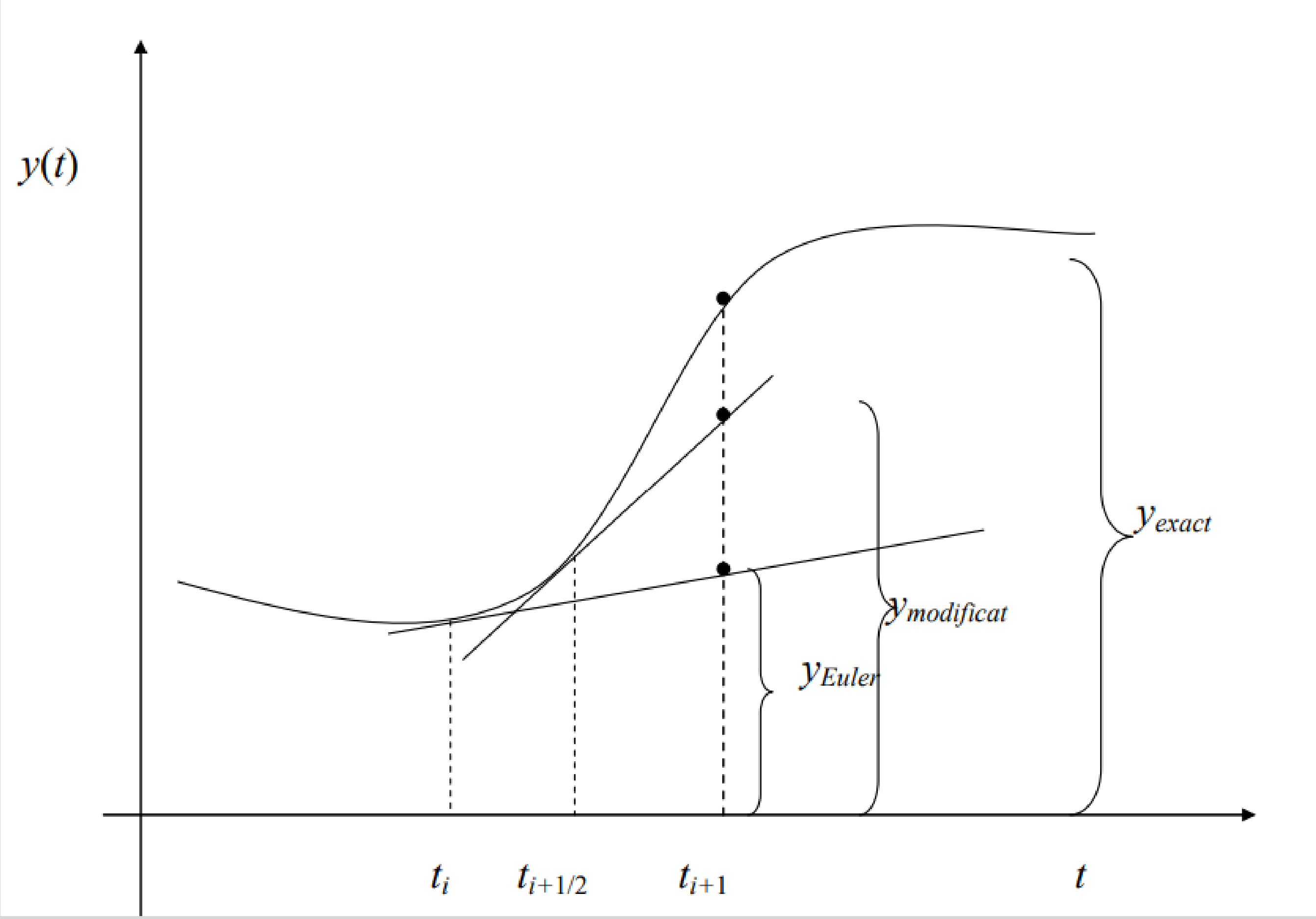


$$y_1 = y_0 + h\frac{f(x_0; y_0) + f(x_1; \tilde{y}_1)}{2}$$

$$\tilde{y}_1 = y_0 + h\, f(x_0; y_0),$$

Această schemă se mai numește și ***metoda predictor-corector*** În prima etapă, valoarea aproximativă este prezisă cu o precizie scăzută (*h*), iar în a doua etapă, această predicție este corectată, astfel încât valoarea rezultată să aibă al doilea ordin de precizie.

Metoda Euler modificată



Metoda Euler

Algoritmul Metodei Euler:

Date de intrare: n-numărul de subintervale, h-pasul metodei, valorile iniţiale x_0, y_0 şi expresia funcţiei f.

Date de ieşire: vectorul ce conţine valorile numerice: $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

P1: Se introduc datele de intrare;

P2: Se realizează diviziunea intervalului $[x_0, x_0 + nh]$ în n intervale prin nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

$$(x_i = x_0 + ih);$$

P3: Se determină valorile y_i, $i = \overline{0, n}$ cu relaţia:

$$y_{i+1} = y_i + hf_i,\ f_i = f(x_i, y_i);$$

P4: Se afişează valorile funcţiei şi nodurile în care sunt calculate acestea, după care se opreşte algoritmul.

Metoda Euler modificată

Metoda lui Euler s-a obținut prin trunchierea serii Taylor la doi termeni, o nouă metodă se poate obține în mod natural, prin reținerea mai multor termeni în dezvoltarea Taylor.

Dacă în seria Taylor păstrăm primii trei termeni și aproximăm derivata de ordinul doi cu ajutorul derivatei de ordinul întâi

$$y''(x_{i+1}) \approx \frac{y'(x_{i+1}) - y'(x_i)}{h}$$

obținem metoda lui Euler modificată

Metoda Euler modificată

Exemplu

$$y' = y - \frac{2x}{y},$$
$$y(0)=1$$

$$x_0 = 0, y_0 = 1,$$
$$f(x,y) = y - \frac{2x}{y},$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf_i = f(x_i, y_i)$$

$$\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}\ \tilde{y}_{i+1})$$

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{f_i + \tilde{f}_{i+1}}{2}$$

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2}f_i$	x_{i+1}	$\tilde{y}_{i+1}$	$\frac{h}{2}\tilde{f}_{i+1}$	$\frac{h}{2}(f_i + \tilde{f}_{i+1})$
	0	1	0.1	0.2	1.2	0.0867	0.1867
1	0.2	1.1867	0.085	0.4	1.3566	0.0767	0.1617
2	0.4	1.3484	0.0755	0.6	1.4993	0.0699	0.1454
3	0.6	1.4938	0.069	0.8	1.618	0.0651	0.1341
4	0.8	1.6279	0.0645	1.0	1.7569	0.0618	0.1263
5	1.0	1.7542					

Metoda Euler modificată

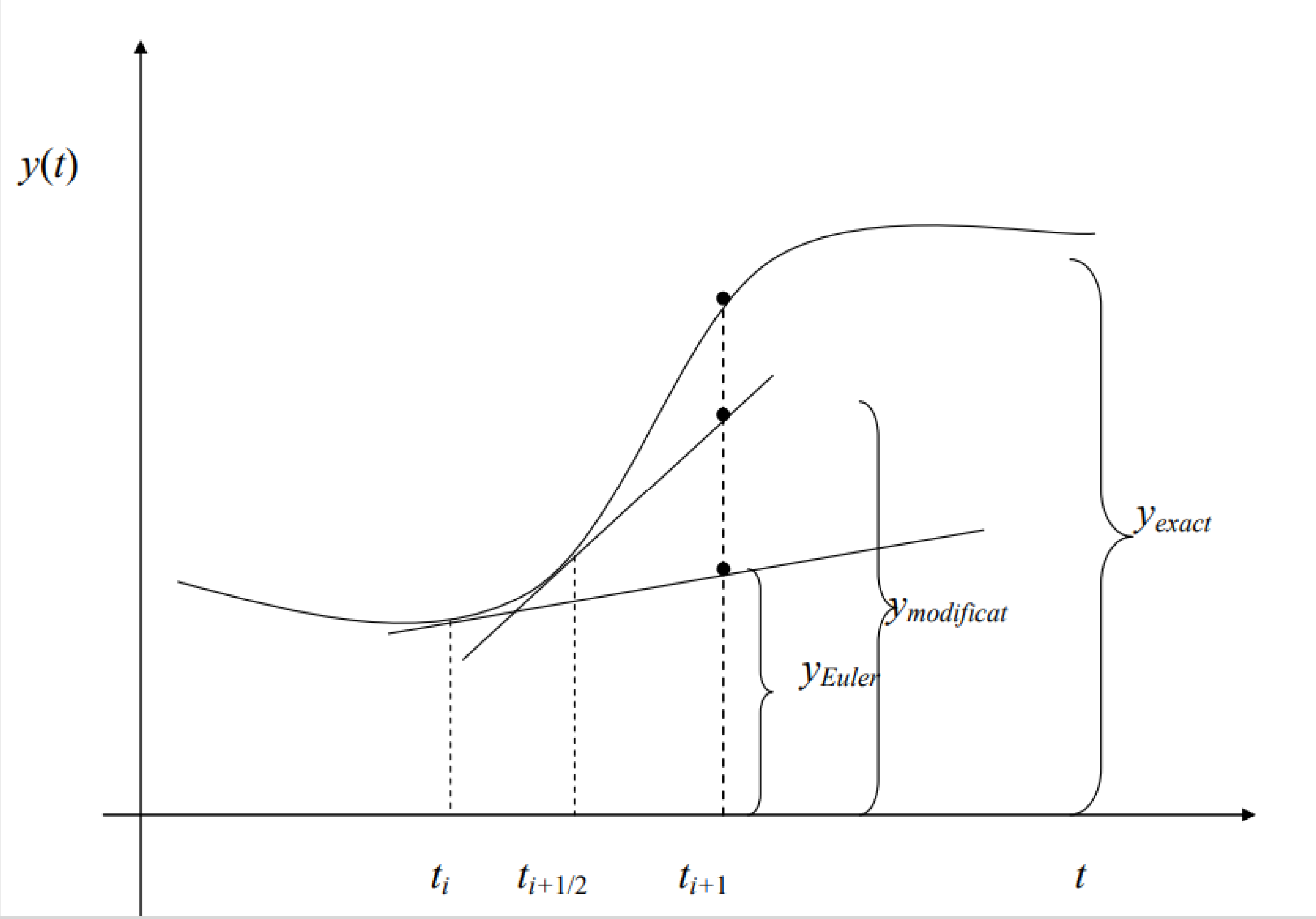
La prima etapă, se găsește folosind metoda Euler

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h\, f(x_i; y_i),$$

apoi această valoare este precizată folosind formula:

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{f(x_i; y_i) + f(x_{i+1}; \tilde{y}_{i+1})}{2}$$

Metoda Euler modificată



Ordinul de exactitate

Ordinul de exactitate al metodei lui Euler este $O(h)$

iar ordinul de exactitate al metodei lui Euler modificate este $O(h^2)$

Metodele Runge - Kutta

Metoda Runge – Kutta de ordinul r se obține din dezvoltarea în seria Taylor păstrând termenii până la h^r.

În metodele Runge-Kutta se evaluează doar funcția $f(x,y)$. Calculul derivatelor de ordin superior se înlocuiesc cu calculul funcției f în puncte alese special de forma $(x + h\alpha, x + h\beta)$ unde α și β sunt definiți de coeficienții metodei.

Metoda Runge – Kutta de ordinul întâi

Pentru r =1 metoda Runge – Kutta coincide cu metoda Euler:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Eroarea de trunchiere la un pas, este de ordinul h^2.

Metoda Runge – Kutta de ordinul doi

Pentru r =2 metoda Runge – Kutta coincide cu metoda Euler modificată:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + h\,\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})}{2}$$

Eroarea de trunchiere la un pas, este de ordinul h^3

Metoda Runge – Kutta de ordinul patru

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(K_1^i + 2K_2^i + 2K_3^i + K_4^i\right)$$

$$K_1^i = hf(x_i; y_i)$$

$$K_2^i = hf(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{K_1^i}{2})$$

$$K_3^i = hf(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{K_2^i}{2})$$

$$K_4^i = hf(x_i + h; y_i + K_3^i)$$

$$x_i = x_0 + ih$$

Metoda Runge – Kutta de ordinul patru

Exemplu

Folosind metoda Runge-Kutta, găsiți soluția problemei Cauchy

$$y' = \frac{2}{x} y + x$$

cu condiția inițială $y(1)=0$ pe intervalul [1;1,5], luând pasul h egal cu 0,1

Exemplu (continuare)

$$x_0 = 1, y_0 = 0$$

$$y_1 = 0 + \frac{1}{6}(K_1^0 + 2K_2^0 + 2K_3^0 + K_4^0) = \frac{1}{6}(K_1^0 + 2K_2^0 + 2K_3^0 + K_4^0)$$

$$x_1 = x_0 + h = 1 + 0.1 = 1.1$$

$$K_1^0 = 0.1\left(\frac{2}{1} * 0 + 1\right) = 0.1$$

$$K_2^0 = 0.1f(1 + 0.05; 0 + 0.05) = 0.1f(1.05; 0.05) =$$

$$= 0.1\left(\frac{2}{1.05} * 0.05 + 1.05\right) = 0.114$$

$$K_3^0 = 0.1f(1 + 0.05; 0 + 0.057) = 0.1f(1.05; 0.057) = 0.1\left(\frac{2}{1.05} * 0.057 + 1.05\right) = 0.116$$

$$K_4^0 = 0.1f(1.1; 0 + 0.116) = 0.131$$

$$\frac{1}{6}(K_1^0 + 2K_2^0 + 2K_3^0 + K_4^0) = \frac{1}{6}(0.1 + 2 * 0.114 + 2 * 0.116 + 0.131) = 0.115$$

$$y_1 = 0.115$$

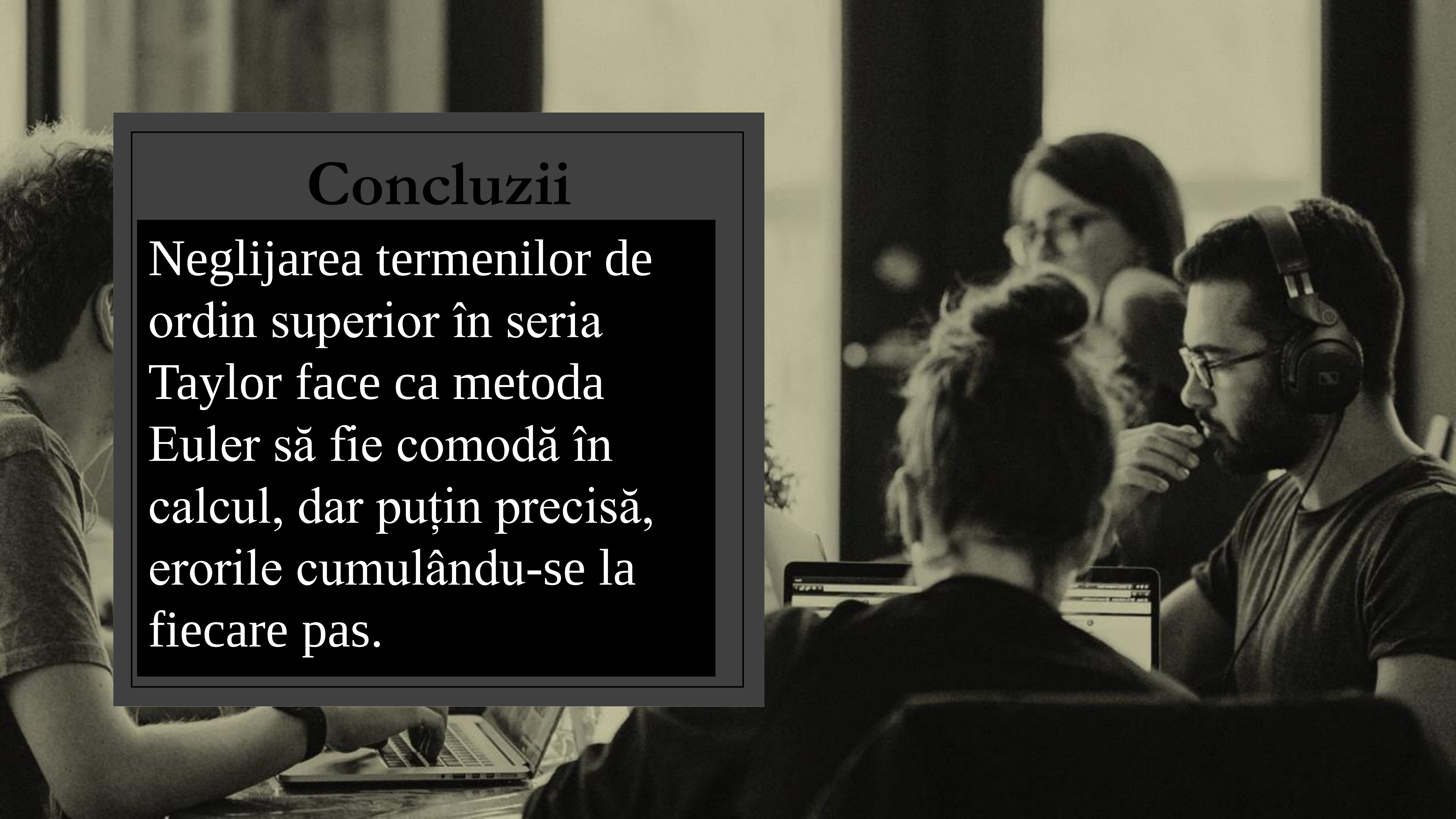
$$\begin{cases} x_1 = 1.1 \\ y_1 = 0.115 \end{cases}$$

Metoda Runge – Kutta de ordinul patru

Eroarea de aproximare pentru metoda Runge-Kutta de ordinul patru este $O(h^5)$

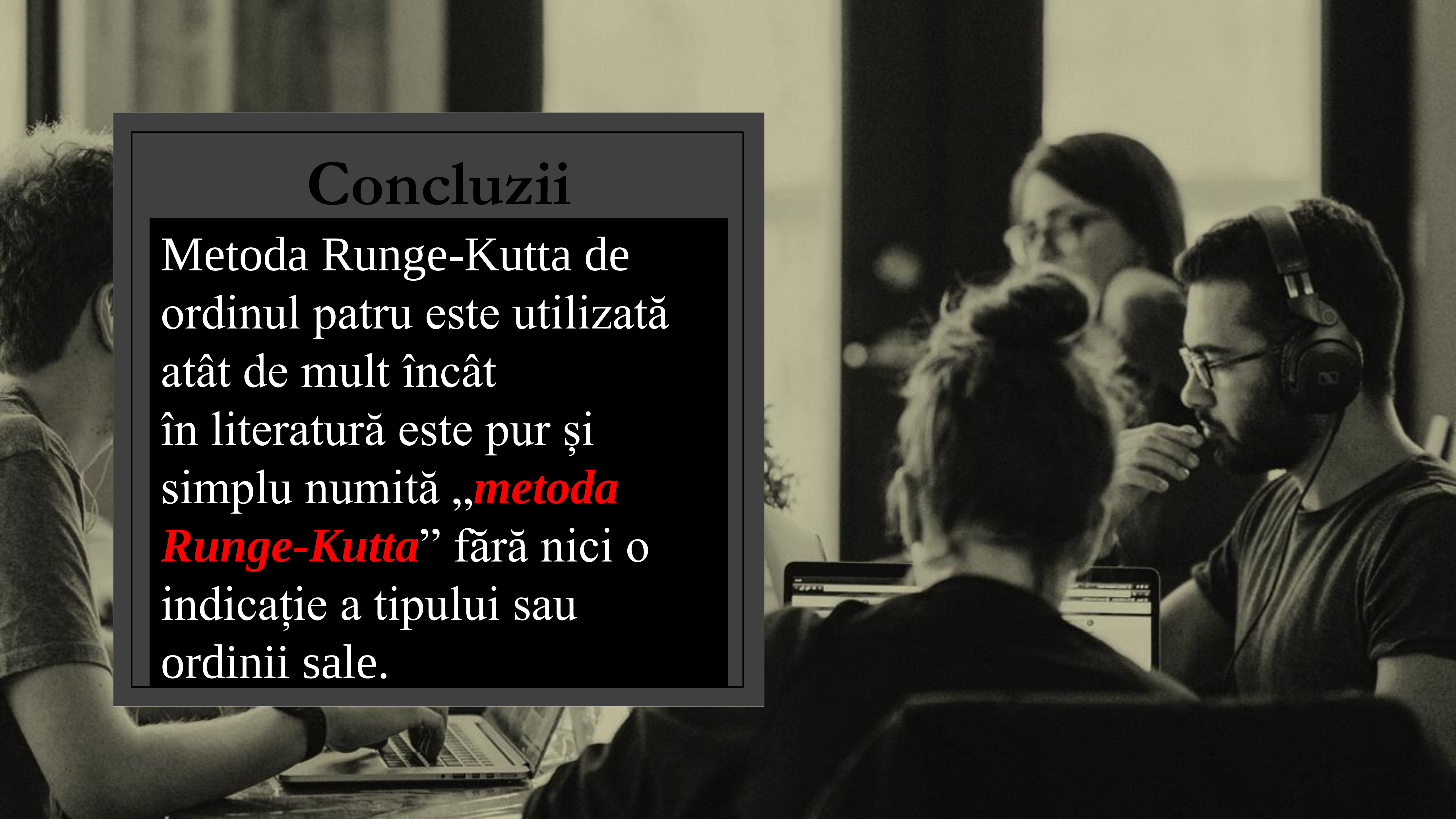
Rețineți că atunci când utilizați această metodă, funcția trebuie evaluată de patru ori.

Metoda Runge-Kutta de ordinul patru este una dintre cele mai utilizate metode de integrare a ecuațiilor diferențiale.



Concluzii

Neglijarea termenilor de ordin superior în seria Taylor face ca metoda Euler să fie comodă în calcul, dar puțin precisă, erorile cumulându-se la fiecare pas.



Concluzii

Metoda Runge-Kutta de ordinul patru este utilizată atât de mult încât în literatură este pur și simplu numită „***metoda Runge-Kutta***” fără nici o indicație a tipului sau ordinii sale.

ÎNTREBĂRI !