UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI
Facultatea de Calculatoare, Informatică și Microelectronică
Departamentul
INFORMATICĂ ȘI INGINERIA SISTEMELOR

Disciplina
Metode și modele de calcul

Modulul I (Metode numerice)

Programul de licență
CALCULATOARE și REȚELE, TEHNOLOGIA INFORMAȚIEI
(frecvența redusă)

Prof. univ. dr. Vasile MORARU

Anul universitar: 2021-2022

ȘEDINȚA NR. 4

INTERPOLAREA FUNCȚIILOR

Sumar

Descrierea problemei de interpolare

Interpolarea algebrică

Polinomul Lagrange

Diferențe divizate. Polinomul Newton

Nodurile Chebyshev

Eroarea interpolării polinomiale

Formularea problemei

Fie mulțimii discrete de valori ale argumentelor x_i asociem un set discret de valori ale funcției y_i (i = 0,1, ...,n) (aceste valori sunt fie rezultate de calcul, fie date experimentale).

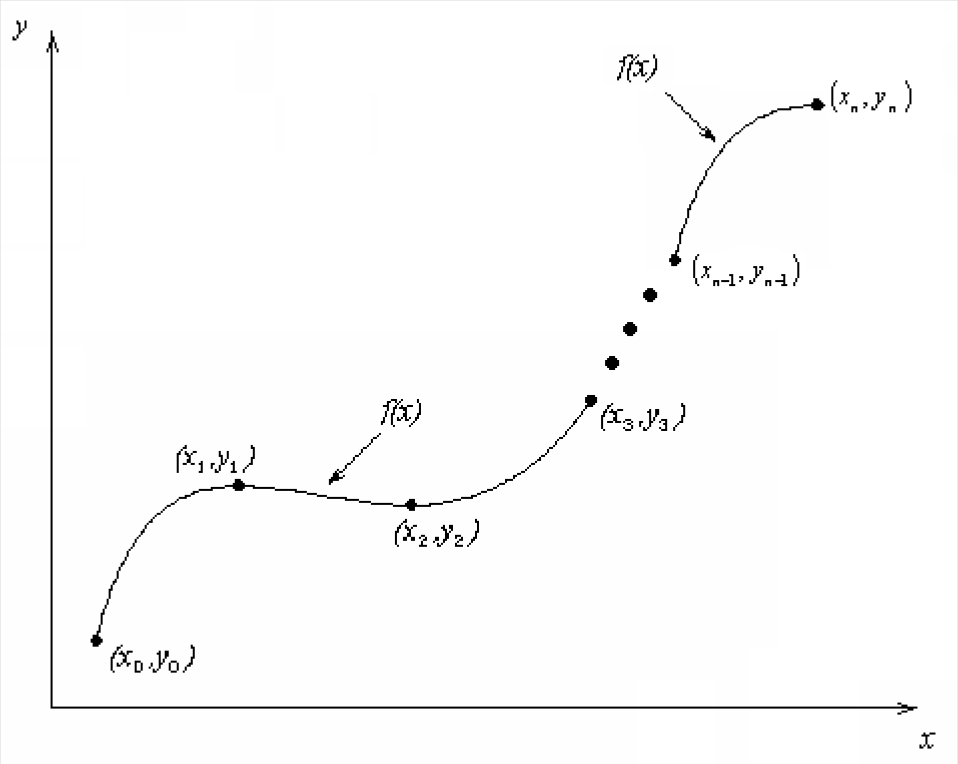
x	x_0	x_1	....	x_n
y	y_0	y_1	....	y_n

În acest caz se spune că funcția $y = f(x)$ este dată tabelar

Se cunosc doar valorile $y_i = f(x_i), i = 0,1, \dots, n$

Formularea problemei

Se cunosc doar valorile $y_i = f(x_i), i = 0,1, \dots, n$



Formularea problemei

Pentru o funcție *f(x)*, forma analitică a căreia sau nu este cunoscută, sau este foarte complicată, să se construiască o altă funcție astfel încât abaterea de la *f(x)* să fie cât mai mică

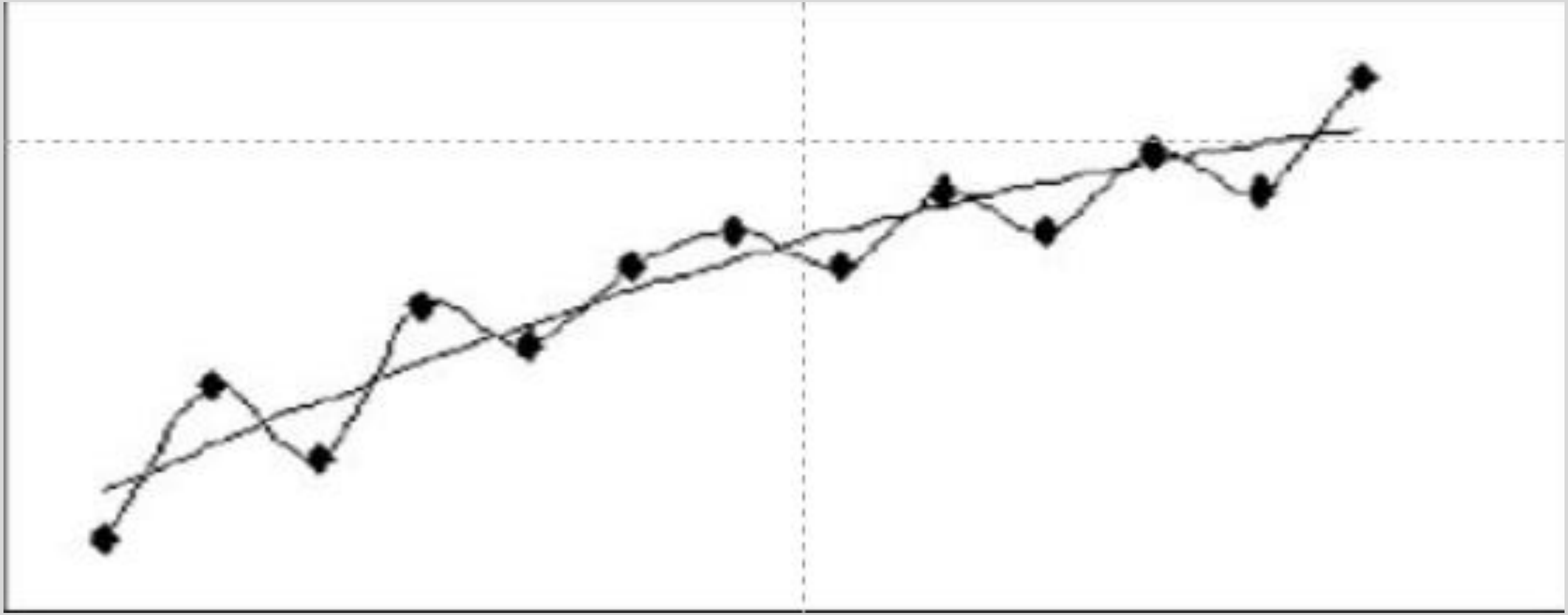
Forma generala: $F(x) = a_0 F_0(x) + a_1 F_1(x) + \cdots + a_n F_n(x)$

Interpolarea polinomială: $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

Interpolare exponenţială: $E(x) = a_0 + a_1 e^x + a_2 e^{2x} + \cdots + a_n e^{nx} + b_1 e^{-x} + \cdots + b_n e^{-nx}$

Interpolarea trigonometrică: $T(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + \cdots + b_n \sin nx$

Aproximarea funcțiilor



Descrierea problemei de interpolare

Problema aproximării funcției:

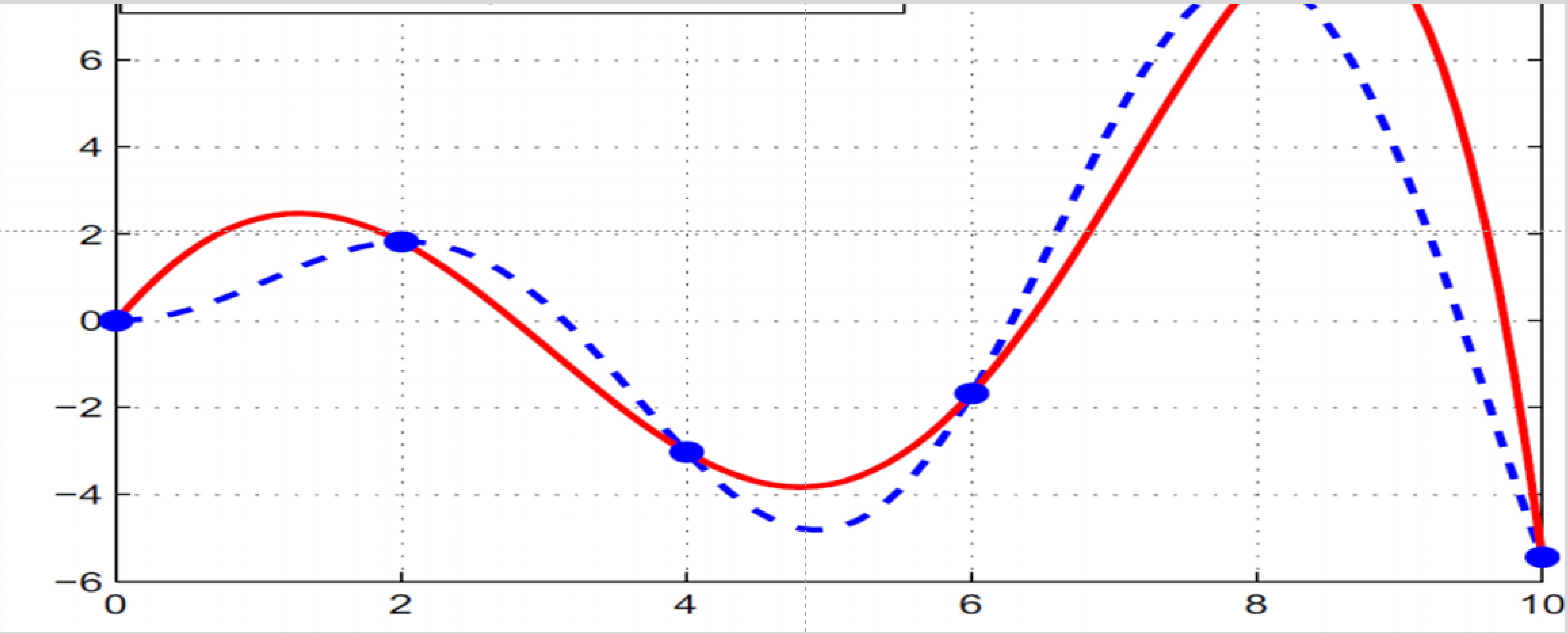
Pentru o funcție *f(x)*, forma analitică a căreia sau nu este cunoscută, sau este foarte complicată, să se construiască o funcție $\varphi(x)$ astfel încât abaterea de la *f*(*x*) să fie cât mai mică

$\varphi(x)$ - funcția ce aproximează funcția dată *f*(*x*).

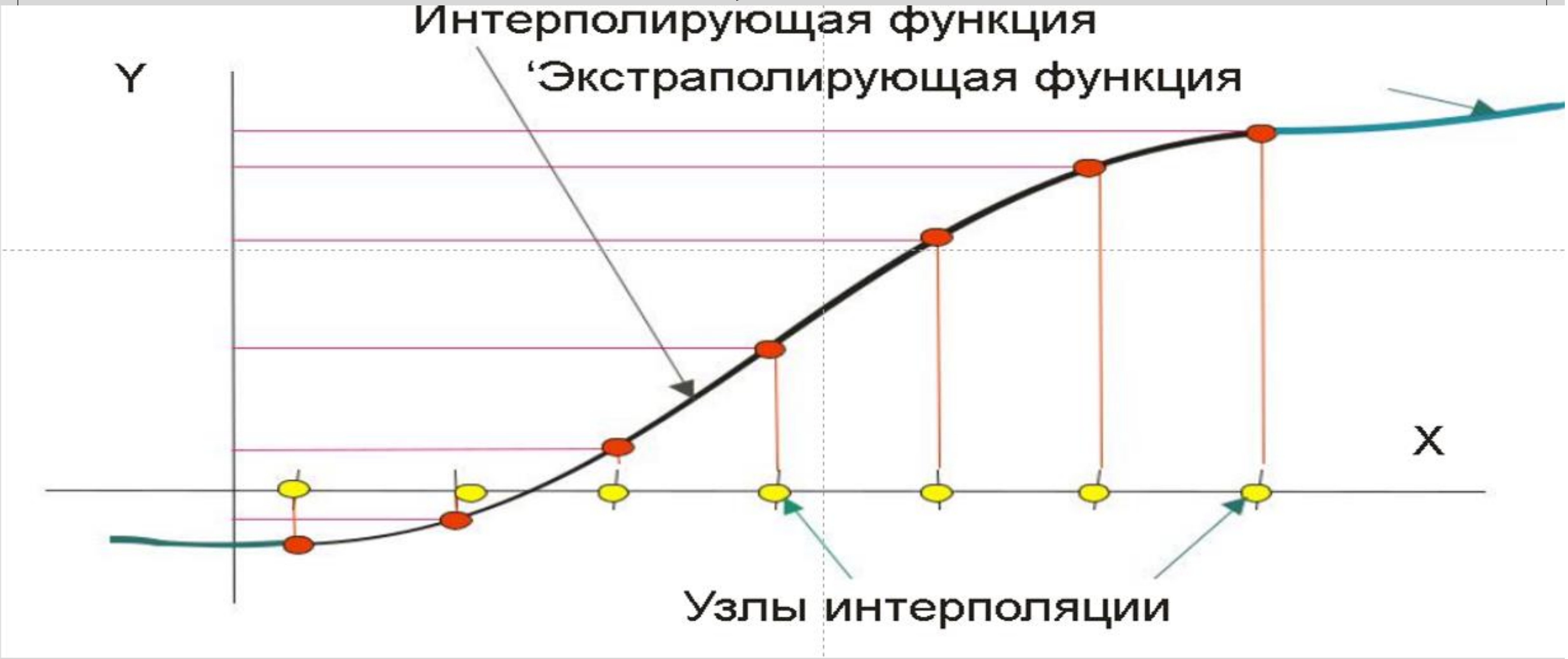
$$\varphi(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,...,n.$$

$$\varphi(x) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

Interpolarea funcțiilor



Interpolarea și extrapoloarea



Descrierea problemei de interpolare

În acest caz, se presupune că printre valorile x_i nu există valori identice, adică

$$x_i \neq x_k \quad \text{pentru} \quad i \neq k$$

Punctele x_i se numesc ***noduri de interpolare***

Descrierea problemei de interpolare

Fiind date:

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots., (x_n, f(x_n))$$

se caută polinomul $P_n(x)$ de gradul *n* astfel încât:

$$\boxed{P_n(x_i) = f(x_i) \quad pentru\ i = 0,1,2,\ldots,n}$$

Interpolarea polinomială

Se cunoaște tabelul de valori

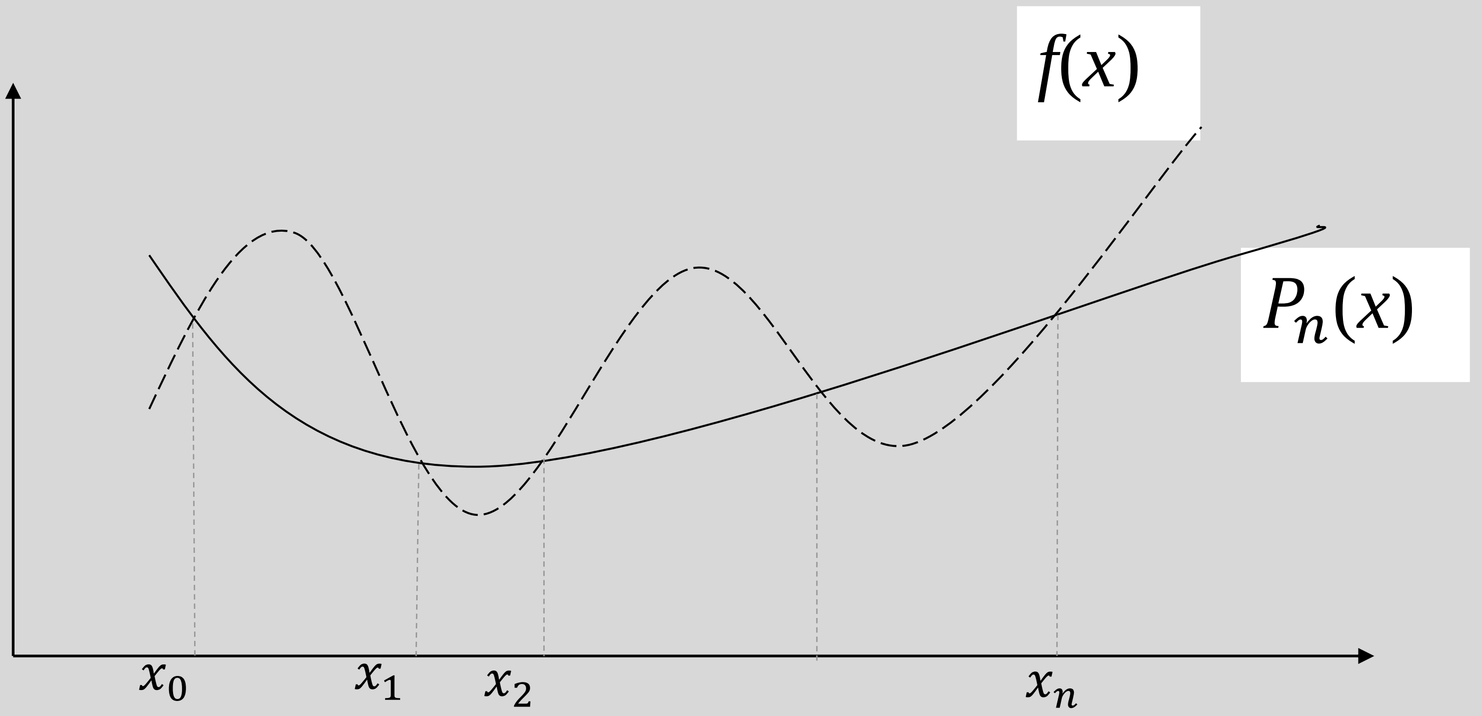
x_i	x_0	x_1	....	x_n
y_i	y_0	y_1	....	y_n

$$P_n(x_i) = f(x_i) \ \ pentru \ = 0,1,\ldots,n$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Interpolarea polinomială

$$P_n(x_i) = f(x_i)\ \ pentru\ \ = 0,1,\dots,n$$



Existența și unicitatea

Fie datele:

$$\left(x_0, f(x_0)\right), \left(x_1, f(x_1)\right), \ldots., \left(x_n, f(x_n)\right)$$

Presupunem că nodurile

$$x_0, x_1, \ldots, x_n$$

sunt distincte

Teorema:

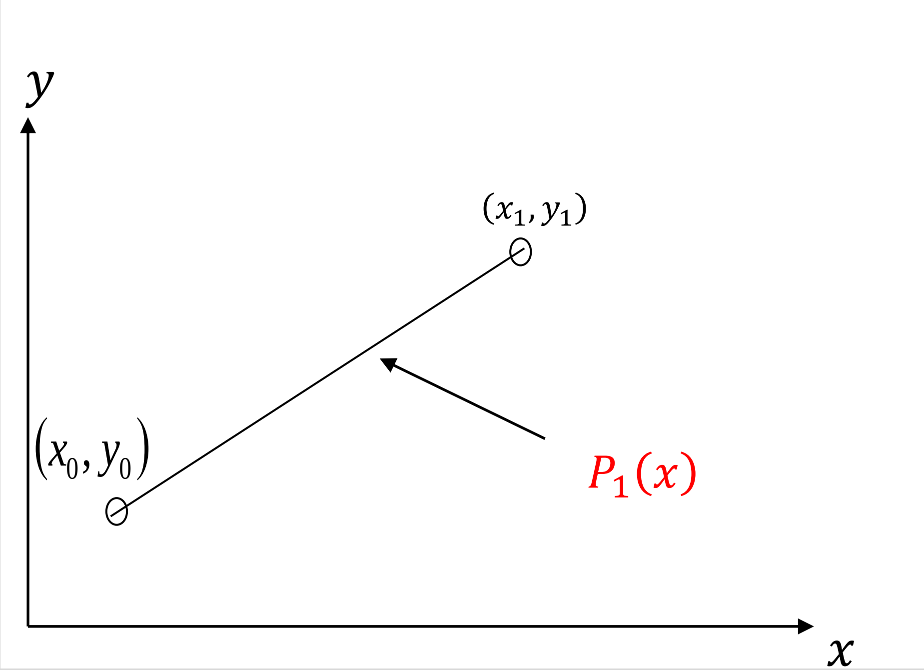
Există un polinom unic $P_n(x)$ astfel încât:

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{pentru } i = 0,1,\ldots,n$$

Interpolarea liniară

Există un polinom unic $P_1(x)$ astfel încât:

$$P_1(x_0) = y_0 = f(x_0);\ P_1(x_1) = y_1 = f(x_1)$$



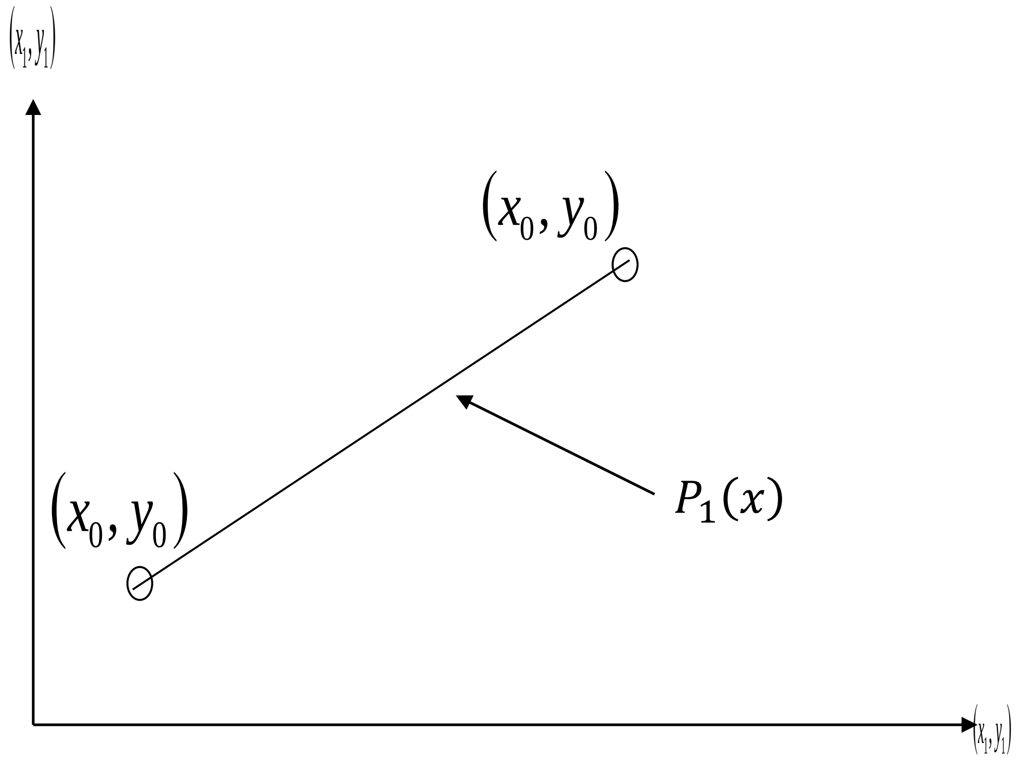
Interpolarea liniară

$$P_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$$

unde

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

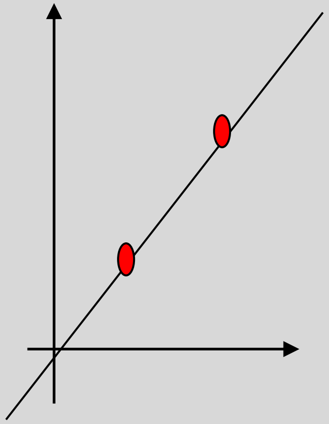
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Interpolarea liniară

Exemplu :

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$$

x	1	2
y	2	4



$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

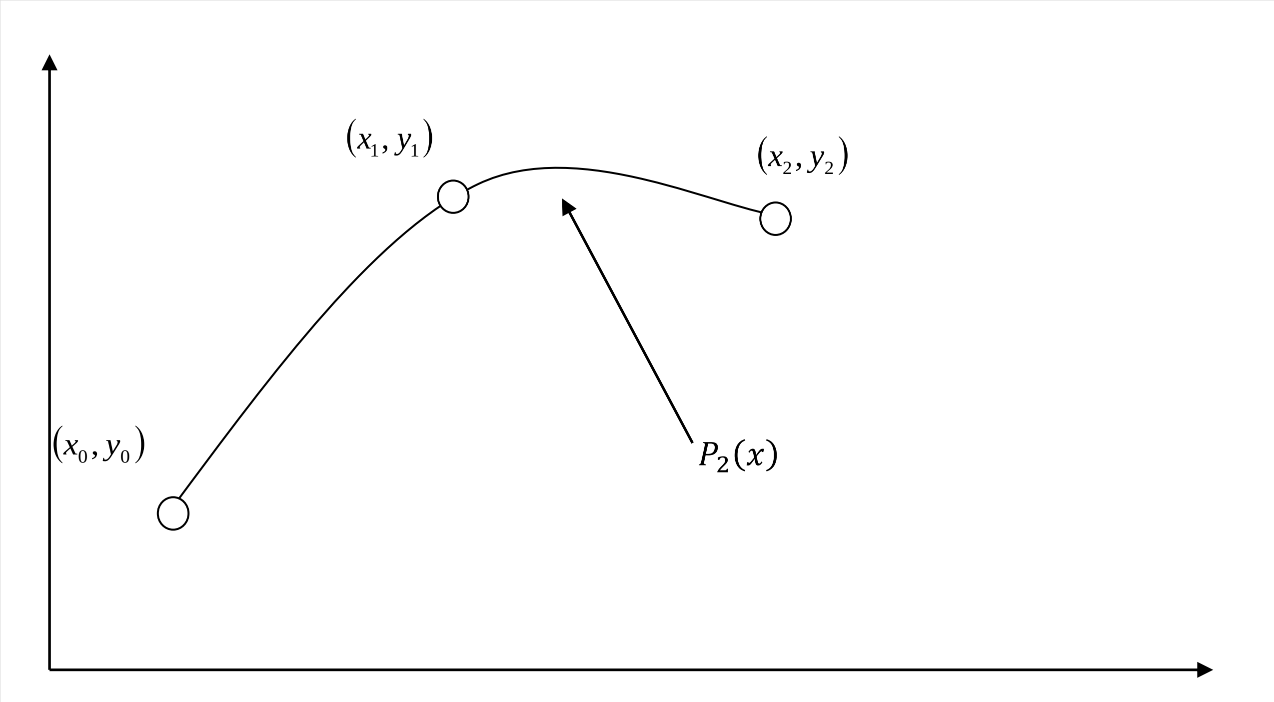
$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

$$y = 2x$$

$$P_1(x) = L_1(x) = 2x$$

Interpolarea pătratică

$$P_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_1)(x - x_2)$$



Interpolarea pătratică

Datele: $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)),$ și $(x_2, f(x_2))$

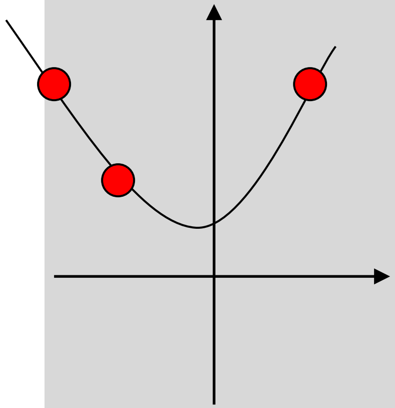
$$P_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_1)(x - x_2)$$

unde:

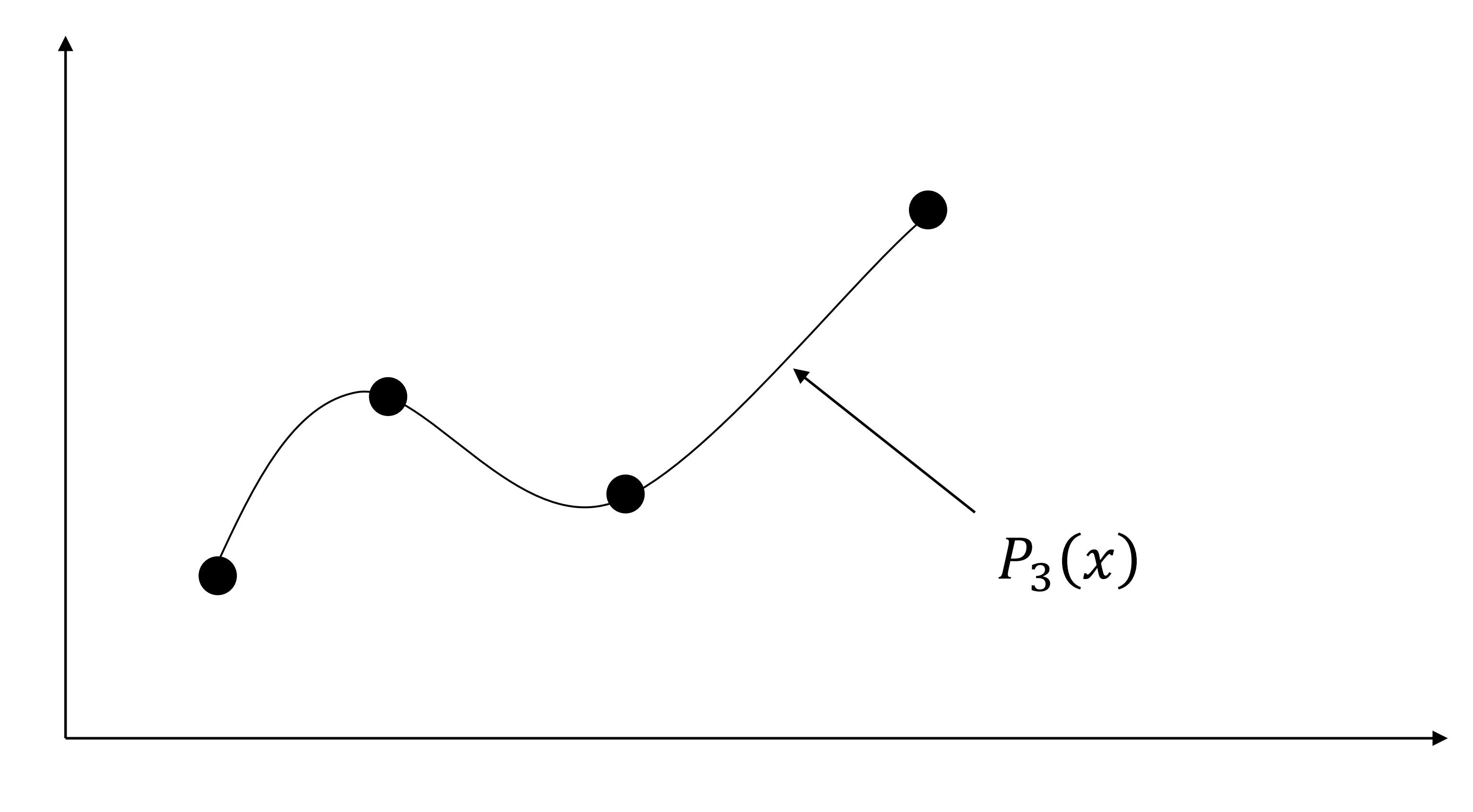
$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$



Interpolarea cubică



Interpolarea Lagrange

Determinăm polinoamele $\ell_i(x)$ de gradul *n*:

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 0, pentru\ i \neq j \\ 1, pentru\ i = j \end{cases}$$

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}$$

$$l_0(x_0) = 1,\ l_0(x_i) = 1,\ i \neq 0$$

În mod analog

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)}$$

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$l_i(x_i) = 1,$$
$$l_i(x_j) = 0,\ i \neq j$$

Polinomul Lagrange

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Polinomul Lagrange

- Fie dată funcția tabelar

x_i	x_0	x_1	....	x_n
y_i	y_0	y_1	....	y_n

$$L_n(x_i) = f(x_i)\ pentru\ i = 0,1,\ldots,n$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x)$$

$$\ell_i(x) = \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Interpolarea liniară și interpolarea pătratică

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1, \quad n = 1,$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2, \quad n = 2.$$

Exemplu 1

x	1/3	1/4	1
y	2	-1	7

$$L_2(x) = f(x_0)\ell_0(x) + f(x_1)\ell_1(x) + f(x_2)\ell_2(x)$$

$$\ell_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}\frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1/4)}{(1/3 - 1/4)}\frac{(x - 1)}{(1/3 - 1)}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}\frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1/3)}{(1/4 - 1/3)}\frac{(x - 1)}{(1/4 - 1)}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)}\frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1/3)}{(1 - 1/3)}\frac{(x - 1/4)}{(1 - 1/4)}$$

$$L_2(x) = 2\left\{-18\left(x - \frac{1}{4}\right)(x - 1)\right\} - 1\left\{16\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)\right\} +$$
$$+7\{2(x - 1/3)(x - 1/4)\}$$

Exemplu 2

$$L_4(x) = \sum_{i=0}^{4} f(x_i)\ell_i = \ell_0 + 3\ell_1 + 2\ell_2 + 5\ell_3 + 4\ell_4$$

$$\ell_0 = \frac{(x-1)}{(0-1)}\frac{(x-2)}{(0-2)}\frac{(x-3)}{(0-3)}\frac{(x-4)}{(0-4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{24}$$

$$\ell_1 = \frac{(x-0)}{(1-0)}\frac{(x-2)}{(1-2)}\frac{(x-3)}{(1-3)}\frac{(x-4)}{(1-4)} = \frac{x(x-2)(x-3)(x-4)}{-6}$$

$$\ell_2 = \frac{(x-0)}{(2-0)}\frac{(x-1)}{(2-1)}\frac{(x-3)}{(2-3)}\frac{(x-4)}{(2-4)} = \frac{x(x-1)(x-3)(x-4)}{4}$$

$$\ell_3 = \frac{(x-0)}{(3-0)}\frac{(x-1)}{(3-1)}\frac{(x-2)}{(3-2)}\frac{(x-4)}{(3-4)} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-4)}{-6}$$

$$\ell_4 = \frac{(x-0)}{(4-0)}\frac{(x-1)}{(4-1)}\frac{(x-2)}{(4-2)}\frac{(x-3)}{(4-3)} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$$

x	y
0	1
1	3
2	2
3	5
4	4

Exemplu 3

x	-1	0	1	3
y	2	1	0	-1

$$y = P(x)$$

$$= \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3$$

Exemplu 3 (continuare)

x	-1	0	1	3
y	2	1	0	-1

$$= \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(-1-0)(-1-1)(-1-3)}(2) + \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(0+1)(0-1)(0-3)}(1)$$

$$+ \frac{(x+1)(x-0)(x-3)}{(1+1)(1-0)(1-3)}(0) + \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(3+1)(3-0)(3-1)}(-1)$$

$$= \frac{x(x^2-4x+3)}{(-1)(-2)(-4)}(2) + \frac{(x^2-1)(x-3)}{(1)(-1)(-3)}(1)$$

$$+ \frac{x(x^2-2x-3)}{(2)(1)(-2)}(0) + \frac{x(x^2-1)}{(4)(3)(2)}(-1)$$

Exemplu 3 (continuare)

$$y = \frac{(x^3 - 4x^2 + 3x)}{-8}(2) + \frac{(x^3 - 3x^2 - x + 3)}{3}(1)$$

$$+0 + \frac{x^3 - x}{24}(-1)$$

$$= \frac{(x^3 - 4x^2 + 3x)}{24}(-6) + \frac{(x^3 - 3x^2 - x + 3)}{24}(8) + \frac{x^3 - x}{24}(-1)$$

$$= \frac{-6x^3 + 24x^2 - 18x + 8x^3 - 24x^2 - 8x + 24 - x^3 + x}{24}$$

$$y = f(x) = \frac{1}{24}(x^3 - 25x + 24)$$

$$y = f(2) = -0.75$$

Eroarea interpolării polinomiale (noduri echidistante)

Fie $f(x)$ o funcție cu proprietățile:

Derivata $f^{(n+1)}(x)$ este continuă în $[a,b]$ și

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$$

Fie $P_n(x)$ un polinom de interpolare de grad $\leq n$ care interpolează funcția cu $(n+1)$ noduri situate la distanțe egale în $[a,b]$, atunci

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{4(n+1)}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}$$

Exemplu

$f(x) = \sin(x)$

a=0, b=1.6875

$\sin(x) \approx P_9(x)$

$\left|f^{(n+1)}\right| \leq 1$ pentru $n > 0$

$M = 1, \qquad n = 9$

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{4(n+1)}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}$$

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{4(10)}\left(\frac{1.6875}{9}\right)^{10} = 1.34 \times 10^{-9}$$

Eroarea interpolării polinomiale (cazul general)

$$f(x) = L_n(x) \; + R_n((x))$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

Dacă $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$

$\Rightarrow$

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

Exemplu 1

$f(x) = \sqrt{x}$ $\sqrt{116} = ?????$ $\sqrt{116} = L_2(116)$

x	100	121	144
y	10	11	12

$$\sqrt{x} \approx L_2(x);\ f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}};\ f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}};\ f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$M = \max_{100 \le x \le 144} |f'''(x)| = \frac{3}{8}100^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}10^{-5}$$

$$\left|\sqrt{116} - L_2(116)\right| \le \frac{3}{8}10^{-5}\frac{1}{3!}\ |(116-100)(116-121)(116-144)| \approx 1{,}4 \times 10^{-3}$$

Exemplu 2

$f(x) = \cos(\pi x)$

x	0	1/3	1/2
y	1	1/2	0

$$\cos(\pi x) \approx L_2(x) = -3x^2 - \frac{x}{2} + 1$$

$$M = max|f'''(x)|$$

$$|\cos(0{,}1\pi) - L_2(0{,}1)| \leq \frac{M}{(2+1)!}\, |(0{,}1 - 0)(0{,}1 - 1/3)(0{,}1 - 1/2)|$$

Avantajele polinomului Lagrange

- Aproximarea efectuată cu polinomul Lagrange este o interpolare globală, în sensul că se folosește un singur polinom pentru tot intervalul de definiție, $[x_0 , x_n]$, corespunzător funcției *f*(*x*).
- Datele nu trebuie să fie specificate cu nodurile x_i in ordine crescătoare sau descendentă.
- Unul dintre avantajele interpolarii Lgrange este posibilitatea utilizarii unei multimi de puncte neechidistante.

Dezavantajele polinomului Lagrange

- După cum se poate observa din construcție, de fiecare dată când un nod x_i se schimbă, toate polinoamele de bază Lagrange

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

trebuie recalculate.

- Eroarea aproximării este dificil de estimat, necesitând cunoaşterea valorilor derivatei de ordinul *n*+1;
- Deși calculul lui $L_n(x)$ este relativ simplu, metoda nu este încă deosebit de eficientă pentru valori *n* mari.

Polinomul de interpolare Newton

O formă mai bună a polinomului de interpolare în scopuri practice (sau de calcul) este forma baricentrică a interpolării Lagrange sau a ***polinoamelor Newton*** .

Polinomul de interpolare Newton de grad *n* poate fi scris folosind următoarea formă generală:

$$p_n(x) = \boldsymbol{b_0} + \boldsymbol{b_1}(\boldsymbol{x} - x_0) + \boldsymbol{b_2}(\boldsymbol{x} - x_0)(\boldsymbol{x} - x_1) + \\ + \cdots + \boldsymbol{b_n}(\boldsymbol{x} - x_0)(\boldsymbol{x} - x_1)\cdots(\boldsymbol{x} - x_{n-1})$$

Coeficienții $\boldsymbol{b_0}$, $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$,..., $\boldsymbol{b_n}$ se determină cu ajutorul diferențelor divizate.

Diferențe divizate

Expresia

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

se numește ***diferență divizată de ordinul întâi***.

Diferențele divizate de ordinul 2 se definesc cu ajutorul diferențelor divizate de ordinul întâi:

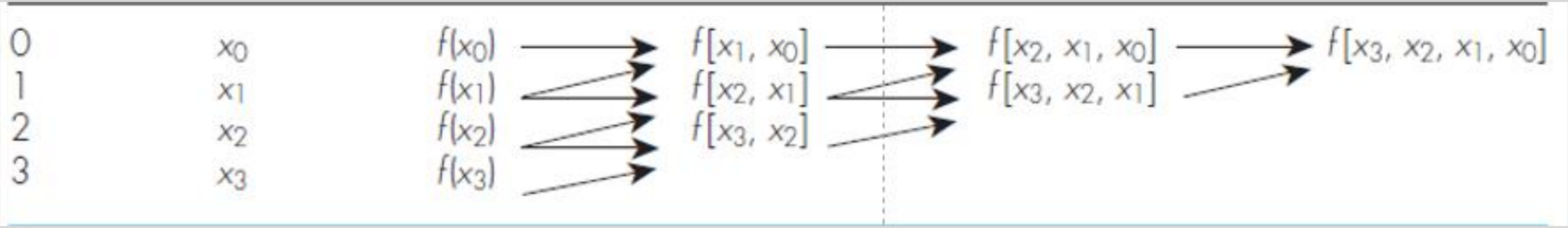
$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_j}$$

Diferențele divizate de ordinul n :

$$f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1] - f[x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0]}{x_n - x_0}$$

Diferențe divizate

Diferențele divizate sunt recursive, adică diferențele de ordin superior sunt calculate prin luarea diferențelor de diferențe de ordin inferior.



Diferențele divizate sunt calculate utilizând diferența divizată a unui număr mai mic de termeni.

Polinomul Newton cu diferențe divizate

$$p_n(x) = \boldsymbol{b_0} + \boldsymbol{b_1}(\boldsymbol{x} - x_0) + \boldsymbol{b_2}(\boldsymbol{x} - x_0)(\boldsymbol{x} - x_1) + \\ + \cdots + \boldsymbol{b_n}(\boldsymbol{x} - x_0)(\boldsymbol{x} - x_1)\cdots(\boldsymbol{x} - x_{n-1})$$

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

$$\vdots$$

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0] = \frac{f[x_n, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, \dots, x_0]}{x_n - x_0}$$

Evaluările funcției în paranteze sunt diferențele divizate

Polinomul Newton cu diferențe divizate

Polinomul Newton de ordinul *n* care trece prin (*n* + 1) noduri

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n)).$$

$$p_n(x) = \boldsymbol{f[x_0]} + \boldsymbol{f[x_1, x_0]}(\boldsymbol{x} - x_0) + \boldsymbol{f[x_2, x_1, x_0]}(\boldsymbol{x} - x_0)(\boldsymbol{x} - x_1) + \cdots + \boldsymbol{f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0]}(\boldsymbol{x} - x_0)(\boldsymbol{x} - x_1)\cdots(\boldsymbol{x} - x_{n-1})$$

Prin definiție $\boldsymbol{f[x_i] = f(x_i)}$

Tot ce este necesar este ca nodurile de interpolare să fie distincte.

Polinomul Newton cu diferențe divizate

Exemplu

x	$f(x)$
$x_0=1$	$f(x_0)=1$
$x_1=2$	$f(x_1)=8$
$x_2=4$	$f(x_2)=14$

$$\boldsymbol{f[x_i] = f(x_i)}$$

$$f[x_1,x_0] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{8-1}{2-1} = 7$$

$$f[x_2,x_1] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = \frac{14-8}{4-2} = 3$$

$$f[x_2,x_1,x_0] = \frac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0} = \frac{3-7}{4-1} = -\frac{4}{3}$$

$$p_2(x) = f[x_0] + f[x_1,x_0](x-x_0) + f[x_2,x_1,x_0](x-x_0)(x-x_1)$$

$$p_2(x) = 1 + 7(x-1) - \frac{4}{3}(x-1)(x-2) = -\frac{26}{3} + 11x - \frac{4}{3}x^2$$

Polinomul Newton cu diferențe divizate

Exemplu

x_i	$f(x_i)$
1	3
2	6
3	19
5	99

Se cere de calculat $f(4)$, folosind polinoamele de interpolare ale lui Newton de ordinul 1 până la 3.

x_i	$f[x_i]$	ordinul întâi	ordinul doi	ordinul trei
1	3	3	5	1
2	6	13	9	
3	19	40		
5	99			

$$p_1(x) = 3 + 3(x-1)$$

$$p_1(4) = 12$$

$$p_2(x) = 3 + 3(x-1) + 5(x-1)(x-2)$$

$$p_2(4) = 42$$

$$p_3(x) = 3 + 3(x-1) + 5(x-1)(x-2) + (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$p_3(4) = 48$$

Polinomul Newton cu diferenţe divizate

Exemplu

Se cere de calculat diferențele divizate pentru datele date în tabelul alăturat și să se construiască polinomul de interpolare Newton care utilizează toate aceste date.

x	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

i	x_i	$f[x_i]$	Ordinul întâi	Ordinul doi	Ordinul trei	Ordinul patru
0	1.0	0.7651977	−0.4837057	−0.1087339	0.0658784	0.0018251
1	1.3	0.6200860	−0.5489460	−0.0494433	0.0680685	
2	1.6	0.4554022	−0.5786120	0.0118183		
3	1.9	0.2818186	−0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

$$p_4(x) = 0.7651977 - 0.4837057(x - 1.0) - 0.1087339(x - 1.0)(x - 1.3) + 0.0658784(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6) + 0.0018251(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6)(x - 1.9)$$

Coeficienții polinomului de interpolare Newton sunt situați în primul rând din tabel.

Observație importantă

- Ordinea datelor (nodurilor) nu contează.
- Tot ce este necesar este ca punctele de date (nodurile) să fie distincte.
- Prin urmare, diferența divizată

$$f[x_k, x_{k-1}, \cdots, x_1, x_0]$$

este invariantă față de toate permutările nodurilor x_i.

Două exemple

x	y		
1	0	3	1
2	3	5	
3	8		

$$P_2(x) = 0 + 3(x-1) + 1(x-1)(x-2) = x^2 - 1$$

x	y		
2	3	3	1
1	0	4	
3	8		

$$P_2(x) = 3 + 3(x-2) + 1(x-2)(x-1) = x^2 - 1$$

Ordonarea nodurilor nu afectează polinomul de interpolare Newton.

Proprietățile diferenței divizate

Ordonarea nodurilor nu afectează polinomul de interpolare Newton.

:

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_2, x_1, x_0]$$

Eroarea polinomului Newton

Eroarea de ordinul de ordinul *n* este

$$\boldsymbol{R_n(x) = f[x, x_n, \cdots, x_0]}(\boldsymbol{x} - x_0)\cdots(\boldsymbol{x} - x_n)$$

$$\boldsymbol{R_n(x) = f[x, x_n, \cdots, x_0]}\prod_{j=0}^{n}(\boldsymbol{x} - x_j)$$

Eroarea polinomului Newton •

eroarea de ordinul n este $R_n(x) = f[x, x_n, \cdots, x_0](x - x_0)\cdots(x - x_n)$

Exemplu ... -chapter 18 ite.iugaza.edu.ps

Fit a second-order Newton's interpolating polynomial to estimate log(10) using the data at x = 8, 9, and 11. Compute the true error.

x_i	$f(x_i)$
8	0.9031
9	0.9542
11	1.0414
12	1.0792

```
x=[8 9 11];
y=log10(x);
[d]=Divided_diff(x,y);
[yi] = eval_poly(x,d,10)
err = yi-1
```

MATLAB

0.9031
0.0512
-0.0025

$p_2(x) = 0.9031 + 0.0512(x-8) - 0.0025(x-8)(x-9)$

$p_2(10) = 1.000343408828085$

True error = - 3.434e-04

$R_2(x) = f[x, x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

$R_2(10) = f[10, 11, 9, 8](10-8)(10-9)(10-11)$ (*)

$R_2(10) = 0.0001717(10-8)(10-9)(10-11)$

$R_2(10)$ = -3.434e-04

Because (*) contains the unknown $f(10)$, it cannot be solved for the error. However, if an additional data point $f(x_3)$ is available, (*) can be used to estimate the error, as in

$R_2(10) \approx f[12, 11, 9, 8](10-8)(10-9)(10-11)$

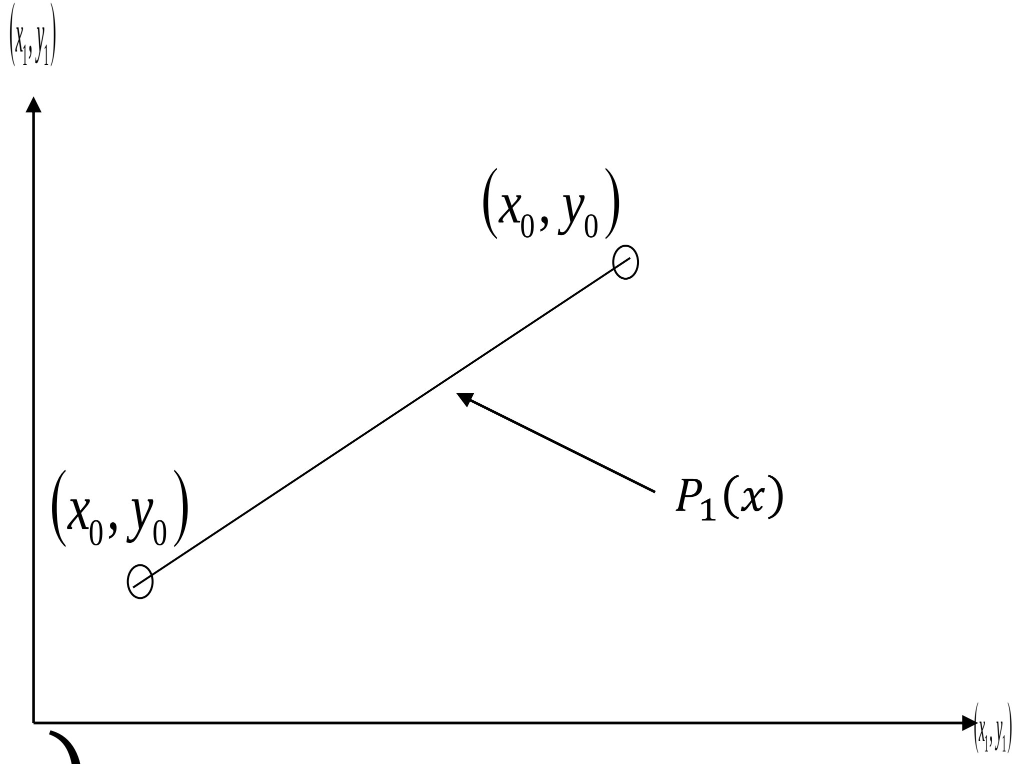
$R_2(10) \approx 1.49e-4(10-8)(10-9)(10-11)$

$R_2(10) \approx$ -2.985e-04

Interpolarea liniară

$$P_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$$

unde



$$b_0 = f(x_0)$$

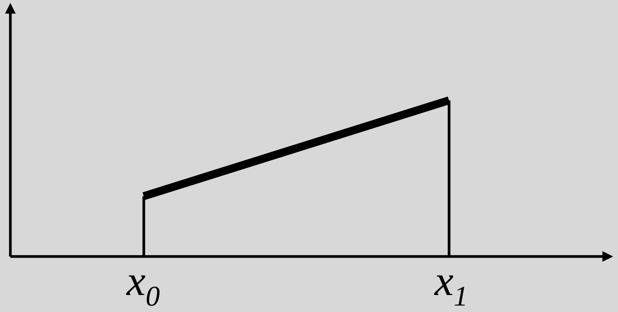
$$b_1 = f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Interpolarea liniară

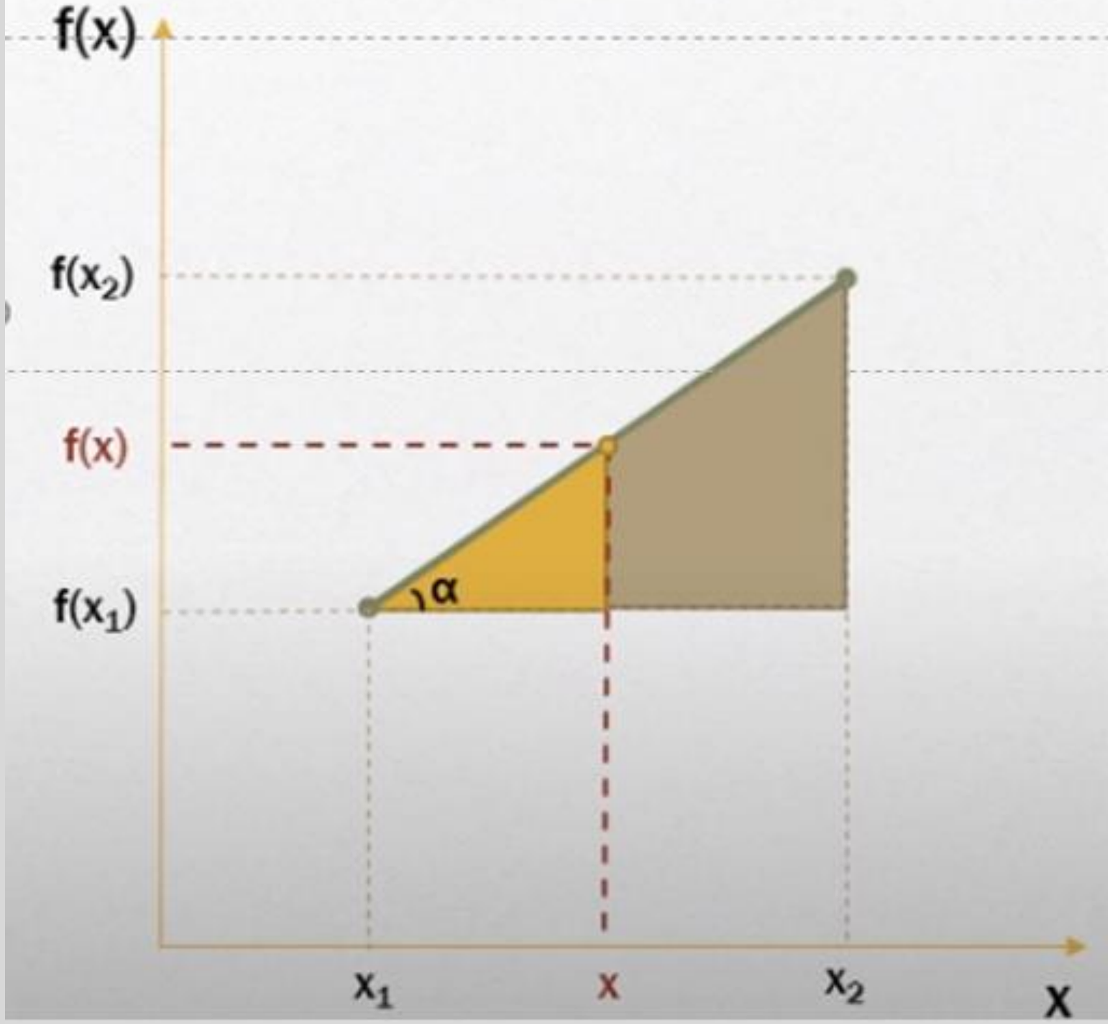
Interpolarea liniară simplă rezultă din a avea doar 2 noduri.

$$p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

pantă



Interpolarea liniară



$$tg\,\alpha = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

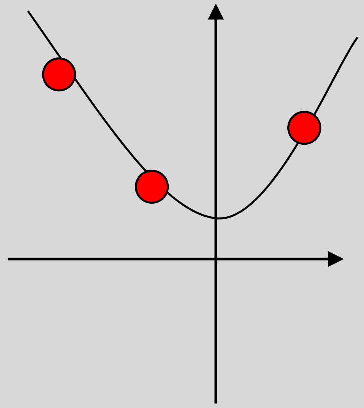
$f(x_1)$ разделенная разность нулевого порядка

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ разделенная разность первого порядка

$$f(x) = [f(x_1)] + [f(x_1), f(x_2)](x - x_1)$$

Interpolarea pătratică

Datele: $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)),\, și\; (x_2, f(x_2))$



$P_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$

unde:

$b_0 = f(x_0)$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Interpolarea pătratică

Trei noduri de interpolare: $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), și\ (x_2, f(x_2))$

$$p_2(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{\left[\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right] - \left[\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right]}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1)$$

$$= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$+ \frac{\left(\left[\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)\right](x - x_0)\right) - \left(\left[\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)\right](x - x_1)\right)}{x_2 - x_0}$$

Avantajele interpolării Newton

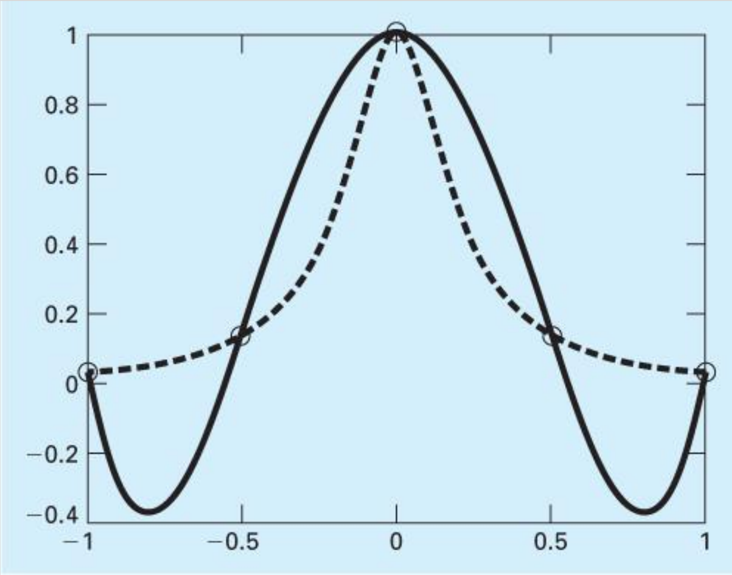
Există două mari dezavantaje în utilizarea polinomului de interpolare Lagrange.

1. Aceasta implică mai multe operații aritmetice decât diferențele divizate.
2. Dacă dorim să adăugăm sau să excludem un punct din mulțimea de noduri pentru a construi polinomul Lagrange, trebuie în esență să o luăm de la capăt în calcule.

   Diferențele divizate evită acest lucru.

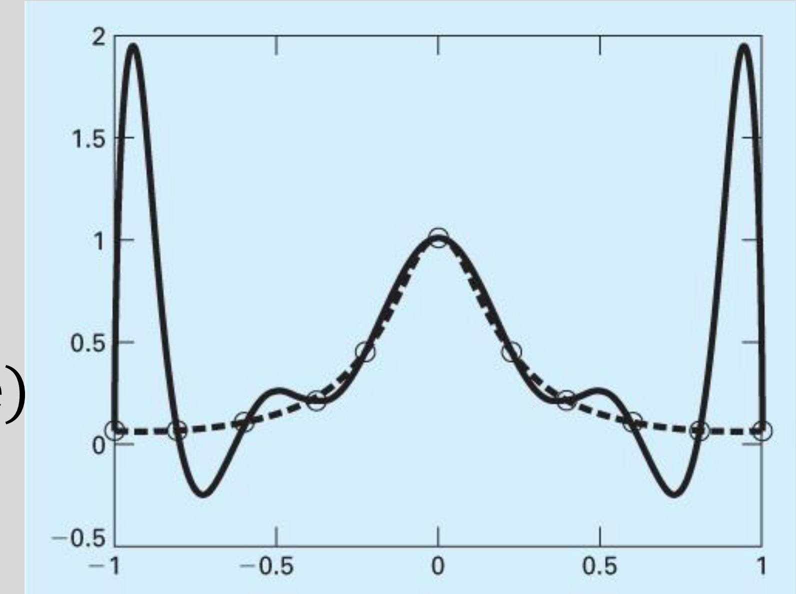
Oscilații

- Polinoamele de ordin superior nu numai că pot duce la erori de rotunjire din cauza condiționării necorespunzătoare, dar pot introduce și oscilații mari la interpolarea polinomială acolo unde nu ar trebui să fie
- În figurile de mai jos, linia punctată reprezintă o funcție, cercurile reprezintă mostre ale funcției, iar linia continuă reprezintă rezultatele unei interpolare polinomiale:

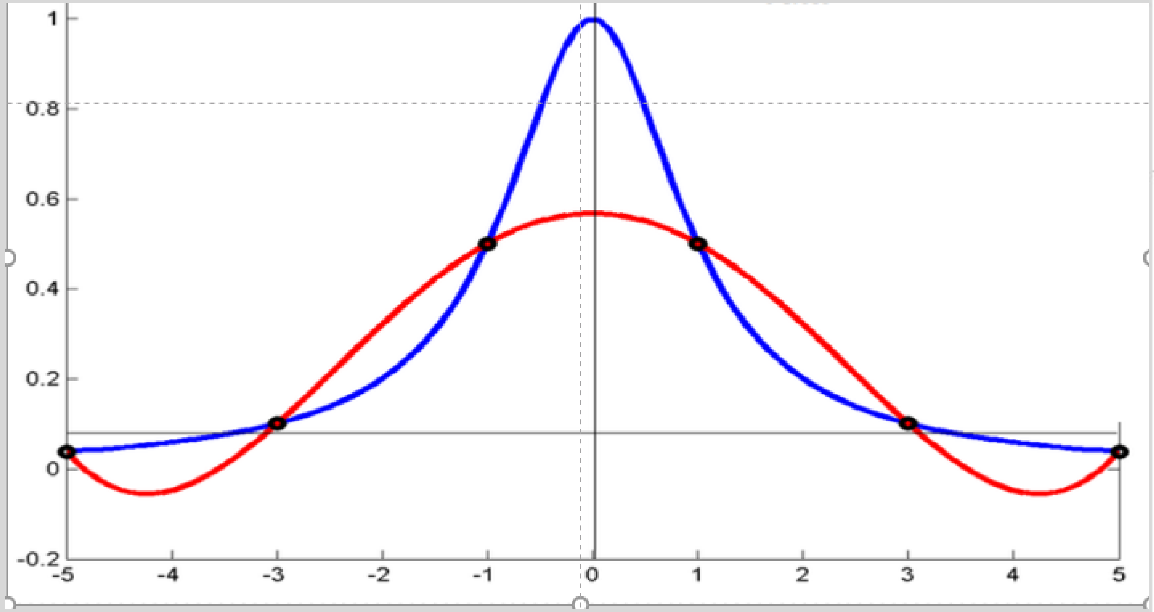


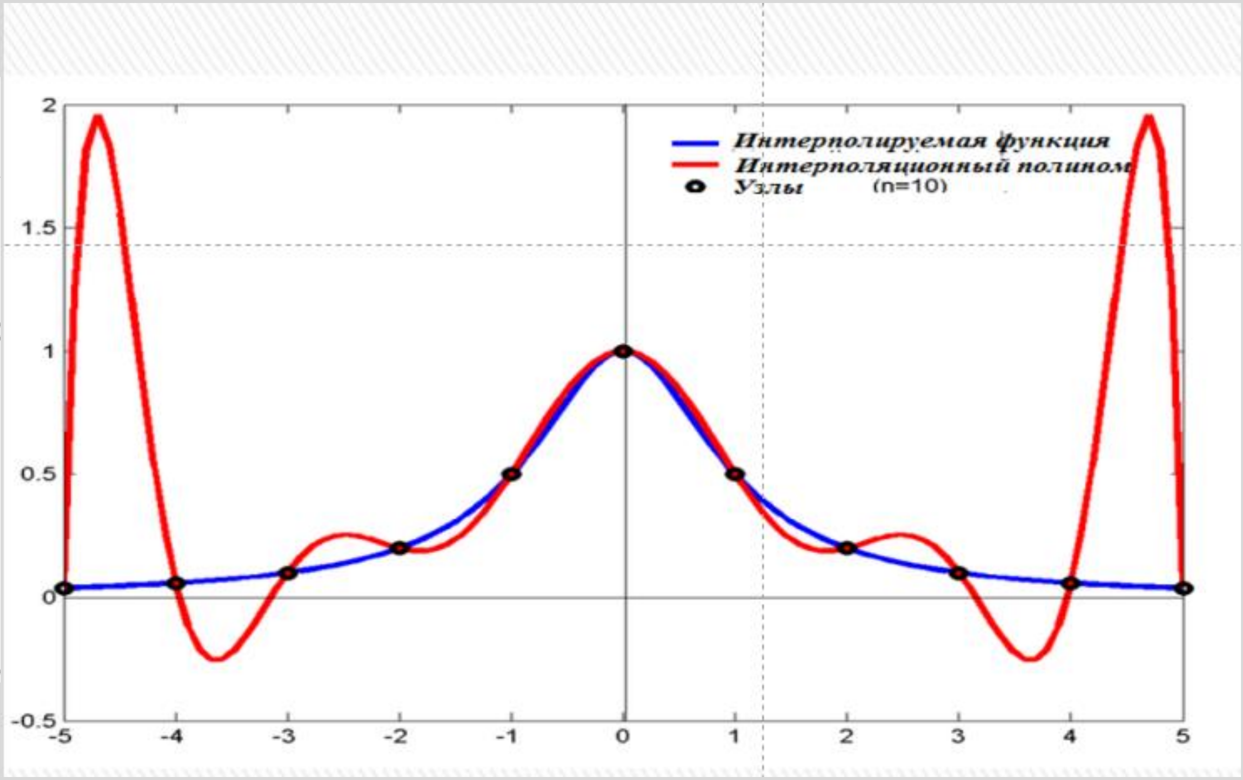
$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

$(\mathit{Funcția\ lui}\ \text{Runge})$



(n=6) Funcția de interpolare nu o apropie suficient de exact pe cea originală. Ce se întâmplă dacă creșteți numărul de noduri de interpolare (n=10)?





Nodurile Chebyshev

- Este posibil ca punctele distribuite în mod egal să nu fie soluția optimă.
- Dacă am putea selecta nodurile , care ar fi acestea?
- Dorim să minimizăm termenul

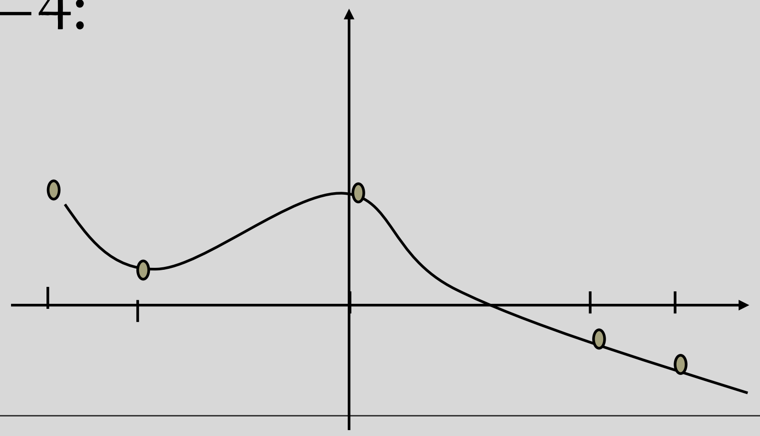
$$\prod_{i=0}^{n}\left(x - x_i\right)$$

- Acestea sunt nodurile Chebyshev
- Pentru x=-1 la 1:

$$x_i = \cos\left[\left(\frac{i}{n}\right)\pi\right],\ (0 \le i \le n)$$

Nodurile Chebyshev

Pentru n=4:



$$x_0 = \cos\left[\left(\frac{0}{4}\right)\pi\right] = 1$$

$$x_1 = \cos\left[\left(\frac{1}{4}\right)\pi\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$$

$$x \;\; = \cos\left[\left(\frac{2}{4}\right)\pi\right] = 0$$

$$x_3 = \cos\left[\left(\frac{3}{4}\right)\pi\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.707$$

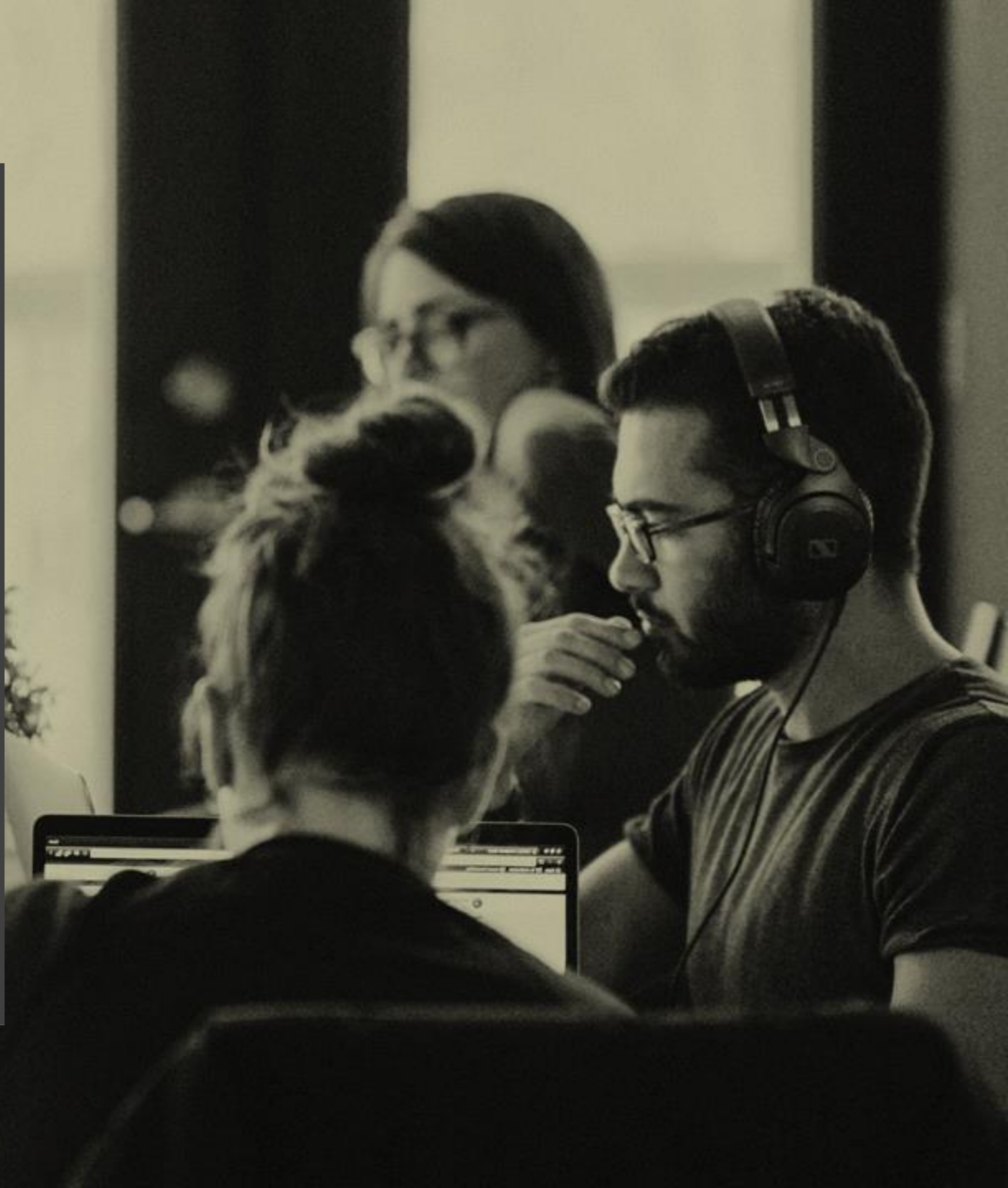
$$x_4 = \cos\left[\left(\frac{4}{4}\right)\pi\right] = -1$$

Concluzii

Polinomul de interpolare este unic.

Pentru a-l obține pot fi folosite diferite metode.

O formă mai bună a polinomului de interpolare în scopuri practice (sau de calcul) este a ***polinoamelor Newton***.

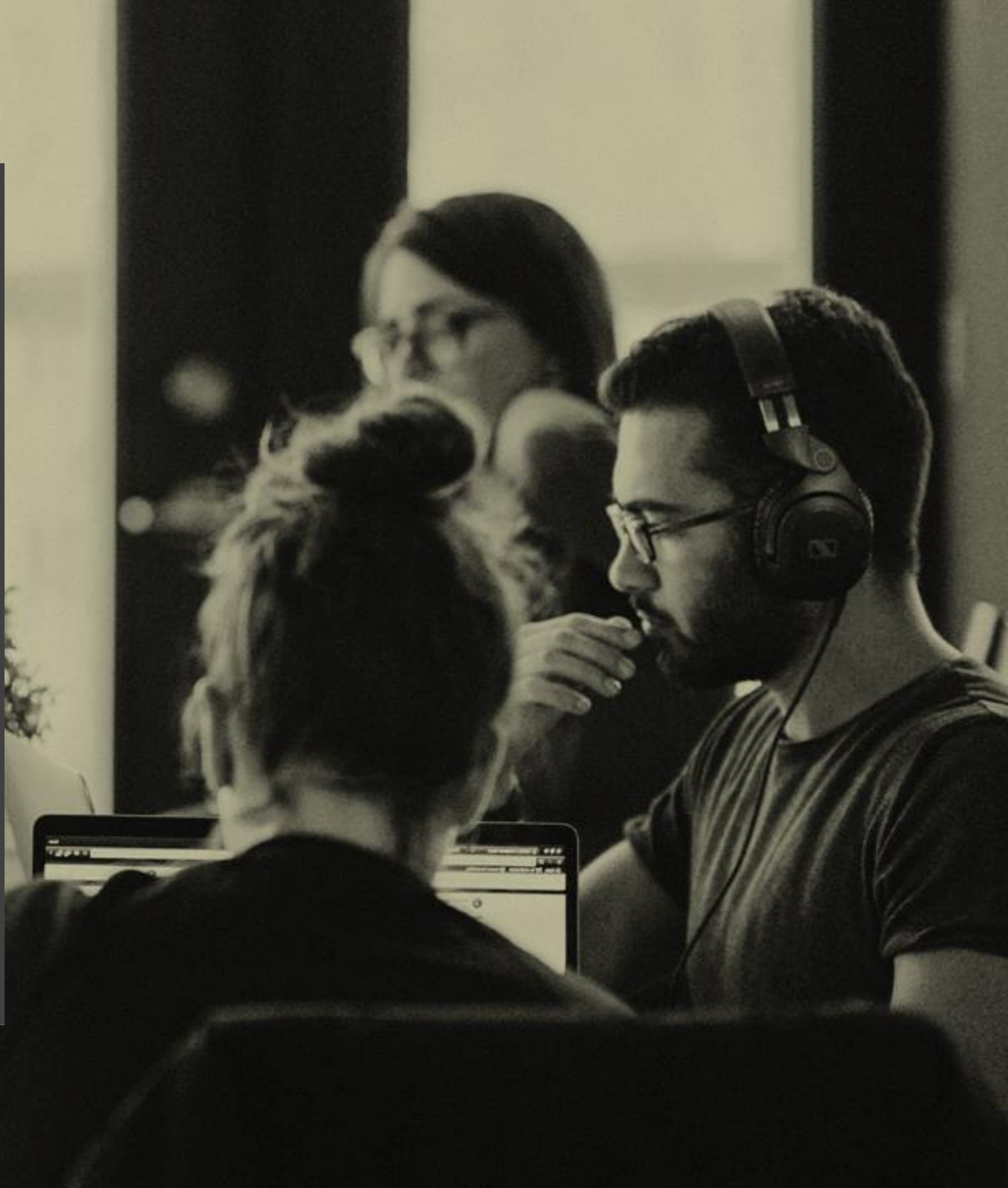


Concluzii

Interpolarea polinomială este sensibilă la datele de intrare

ATENȚIE

atunci când se utilizează polinoame de ordin înalt.



ÎNTREBĂRI !