

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI
Facultatea de Calculatoare, Informatică și Microelectronică
Departamentul
INFORMATICĂ ȘI INGINERIA SISTEMELOR

Disciplina
Metode și modele de calcul
Modulul I (Metode numerice)

Programul de licență
CALCULATOARE și REȚELE, TEHNOLOGIA INFORMAȚIEI
(frecvența redusă)

Prof. univ. dr. Vasile MORARU
Anul universitar: 2021-2022



ȘEDINȚA NR. 3

***METODE NUMERICE ÎN ALGEBRA
LINIARĂ***

Sumar

**Sisteme de ecuații algebrice
liniare**

**Metoda eliminării a lui
Gauss. Factorizare *LU***

Factorizarea Cholesky

**Metoda iterativă Jacobi
Metoda Gauss – Seidel**

**Sisteme liniare
supradeterminate**

**Calculul valorilor și
vectorilor proprii**

Sisteme de ecuații algebrice liniare

Considerăm sistemul de ecuații algebrice liniare:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Acest sistem poate fi scris sub formă matriceală:

$$Ax = b.$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A rezolva sistemul de ecuații dat înseamnă a determina un vector $x^* \in R^n$ care satisface $Ax^* \equiv b$

Sisteme de ecuații algebrice liniare

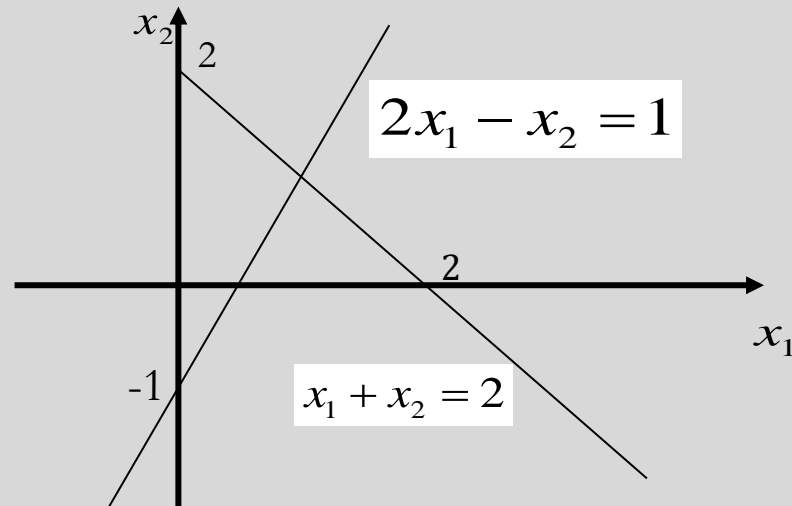
Oricare ar fi sistemul de ecuații algebrice liniare există trei și numai trei posibilități.

1. Sistemul de ecuații are o soluție unică. În acest caz se spune că sistemul este **compatibil determinat**.

De exemplu, sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

este compatibil determinat cu soluția $x_1^* = x_2^* = 1$.



Dacă matricea A este nesingulară ($\det A \neq 0$), atunci oricare ar fi vectorul $b \in R^n$ sistemul $Ax=b$ este *compatibil determinat*. Soluția sistemului poate fi scrisă sub forma: $x^* = A^{-1}b$. **Inversarea matricelor este o operație costisitoare care trebuie evitată în practică.**

Sisteme de ecuații algebrice liniare

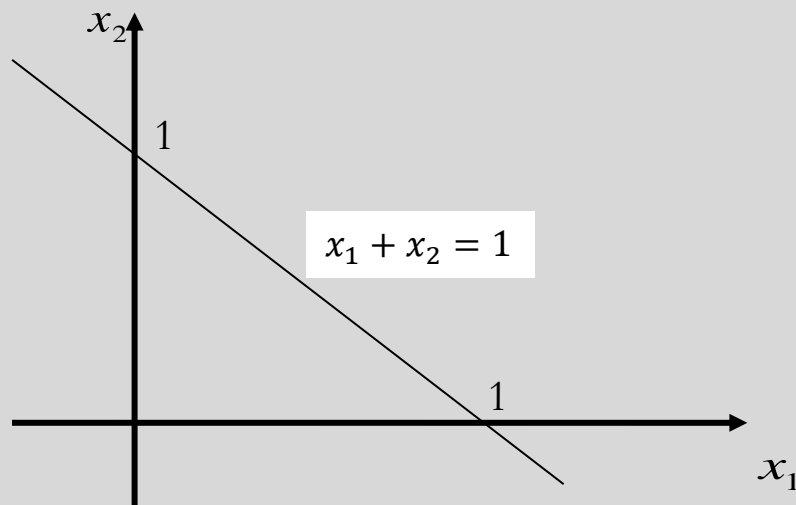
Oricare ar fi sistemul de ecuații algebrice liniare există trei și numai trei posibilități.

2. Sistemul de ecuații are o infinitate de soluții. Despre astfel de sisteme se spune că sunt **compatibil nedeterminate**.

De exemplu, sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

are o infinitate de soluții; aceste două soluții descriu una și aceeași dreaptă $x_2 = 1 - x_1$.



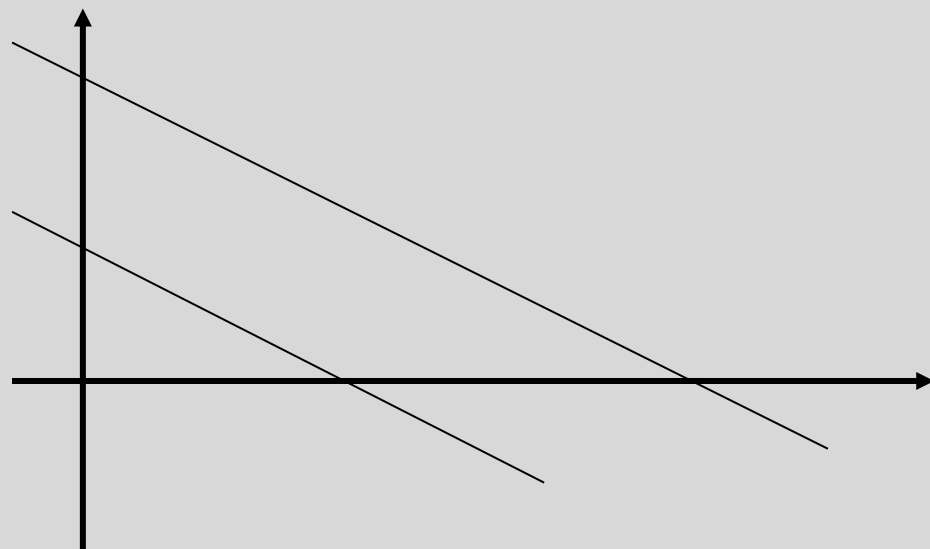
Sisteme de ecuații algebrice liniare

Oricare ar fi sistemul de ecuații algebrice liniare există trei și numai trei posibilități.

3. Sistemul de ecuații nu are soluții, adică este **incompatibil**. De exemplu, sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases}$$

nu este compatibil. Dreptele $x_2 = 1 - \frac{1}{2}x_1$ și $x_2 = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}x_1$ sunt paralele



Sisteme de ecuații algebrice liniare

Metodele numerice de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare sunt de două tipuri: *metode directe* și *metode iterative*

Metodele directe constau în transformarea sistemului $Ax=b$ într-un sistem echivalent pentru care rezolvarea este cu mult mai simplă. În metodele directe soluția exactă se obține după un număr finit de operații aritmetice elementare (adunare, scădere, înmulțire, împărțire și rădăcină pătrată) și acest număr de operații este de ordinul n^3 .

Subliniem că soluția exactă se obține în cazurile (ideale) în care erorile de rotunjire sunt absente. La fiecare operație elementară efectuată de calculator avem o eroare de rotunjire și prin urmare metodele directe în caz general furnizează doar o soluție aproximativă.

Metodele directe se utilizează pentru rezolvarea sistemelor nu prea “mari”, de dimensiune $n \leq 200$.

Sisteme de ecuații algebrice liniare

Metodele numerice de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare sunt de două tipuri: *metode directe* și *metode iterative*

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare printr-o *metodă iterativă* înseamnă construirea unui șir de vectori $\{x^{(k)}\}$, $k = 0, 1, \dots$ (pornind de la un vector $x^{(0)}$ ales arbitrar) convergent către soluția sistemului considerat. În metodele iterative, de obicei, o iterație necesită efectuarea unui număr de ordinul n^2 operații aritmetice. De aceea metodele iterative se utilizează pentru rezolvarea sistemelor “mari”, de dimensiune $n \geq 10^2$ (în cazul asigurării unei viteze sporite de convergență pentru o alegere a aproximării inițiale adecvate).

Trunchierea șirului $\{x^{(k)}\}$ are loc la un indice m astfel încât $x^{(m)}$ constituie o aproximație satisfăcătoare a soluției căutate x^*

(de exemplu, $\|x^{(m)} - x^*\| < \varepsilon$, unde $\varepsilon > 0$ este eroarea admisă)

Metoda eliminării a lui Gauss

Metoda eliminării a lui Gauss constă în a aduce sistemul inițial la un sistem echivalent având matricea coeficienților superior triunghiulară.

Transformarea sistemului dat într-un sistem de formă triunghiulară fără ca să se modifice soluția sistemului se realizează cu ajutorul următoarelor trei operații de bază:

- rearanjarea ecuațiilor (schimbarea a două ecuații între ele);
- înmulțirea unei ecuații cu o constantă (diferită de zero);
- scăderea unei ecuații din alta și înlocuirea celei de a doua cu rezultatul scăderii.

Metoda eliminării a lui Gauss

Exemplu:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 0x_1 - x_2 + 0x_3 = 3 \\ 0x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -3 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = -3 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad (3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 = 3 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = -3 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = -3 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \quad (5) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

Metoda eliminării a lui Gauss

Dacă un element pivot este exact egal cu zero sau chiar aproape egal cu zero, din motive de stabilitate numerică, trebuie să efectuăm rearanjarea ecuațiilor.

Exemplu: (o aritmetică a virgulei mobile cu $\beta=10$, $t=3$)

$$\begin{cases} 0.000100x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{soluția exactă } x_1^* &= 1.00010, \\ x_2^* &= 0.99990 \end{aligned}$$

Aplicând metoda eliminării a lui Gauss obținem sistemul:

$$\begin{cases} 0.000100x_1 + x_2 = 1, \\ -10000x_2 = -10000. \end{cases}$$

Din ultima ecuație avem $x_2^* = 1.000$ care înlocuită în prima ecuație ne dă $x_1^* = 0.000$, evident un rezultat eronat. ***S-a produs o catastrofă de calcul!***

Metoda eliminării a lui Gauss

Permutând ecuațiile între ele ale sistemului din exemplul de mai sus

$$\begin{cases} 0.000100x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

avem sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2. \\ 0.000100x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

și metoda eliminării lui Gauss îl transformă în:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2. \\ x_2 = 1. \end{cases} \text{ cu soluția } x_1^* = x_2^* = 1.00$$

Metoda eliminării a lui Gauss

Există două strategii de alegere a elementului pivot pentru a preveni ca influența erorilor de rotunjire să devină catastrofală. Prima strategie se numește **pivotare parțială** și constă în următoarele: la pasul k pivotul se ia egal cu primul element maxim în modul din coloana k :

$$\left| a_{rk}^{(k)} \right| = \max_{k \leq i \leq n} \left| a_{ik}^{(k)} \right|$$

și se permută liniile k și r .

În **pivotarea completă (totală)**; se schimbă liniile k și r ($r \geq k$) și coloanele k și s , ($s \geq k$) astfel încât pivotul $a_{kk}^{(k)}$ obținut după permutare să coincidă cu primul element maxim în modul din submatricea delimitată de ultimile $n-k$ linii și coloane:

$$\left| a_{rs}^{(k)} \right| = \max_{k \leq i, j \leq n} \left| a_{ij}^{(k)} \right|$$



Carl Friedrich Gauss 1777-1855

Matematică, astronomie,
geodezie, magnetism

1809 GE

(Ca adolescent în
Braunschweig a descoperit
teorema binomială,
reciprocitatea pătratică, media
aritmetico-geometrică...)



$1+2+3+4+\dots+98+99+100+$

История

https://ru.qwe.wiki/wiki/Gaussian_elimination

В Европе метод основан на записях [Исаака Ньютона](#) . В 1670 году он написал, что во всех известных ему книгах по алгебре не хватает уроков по решению одновременных уравнений, которые затем преподавал Ньютон. Кембриджский университет в конце концов опубликовал заметки как *Arithmetica Universalis* в 1707 году, спустя много времени после того, как Ньютон оставил академическую жизнь. Примечания были широко имитированы, что сделало (то, что сейчас называют) методом исключения Гаусса стандартным уроком в учебниках алгебры к концу 18 века. [Карл Фридрих Гаусс](#) в 1810 году изобрел обозначение для симметричного исключения, которое было принято в 19 веке профессиональными [ручными компьютерами](#) для решения нормальных уравнений задач наименьших квадратов. Алгоритм, который преподают в средней школе, был назван в честь Гаусса только в 1950-х годах из-за путаницы в истории предмета.

Algoritmul lui Strassen

Mulți ani s-a crezut că metoda eliminării lui Gauss este optimă în sensul că orice altă metodă directă de rezolvare a sistemelor din n ecuații liniare necesită cel puțin $\frac{n^3}{3}$ operații aritmetice. În momentul de față se cunosc metode în care numărul de operații este redus la Cn^α ($2 < \alpha < 3$). Aceste metode se bazează pe un rezultat remarcabil obținut în 1971 de către A. Schonhage și V. Strassen care au arătat că, teoretic, înmulțirea poate avea o complexitate numai cu puțin superioară adunării.

Algoritmul lui Strassen

Fie de exemplu,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Algoritmul lui se bazează pe identitatea matriceală:

$$A \times B = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}$$

unde:

$$C = (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) + a_{22}(-b_{11} + b_{21}) - (a_{11} + a_{12})b_{22} + (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22}),$$

$$F = (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) + a_{11}(b_{12} - b_{22}) - (a_{21} + a_{22})b_{11} + (-a_{11} + a_{21})(b_{11} + b_{12}),$$

$$D = a_{11}(b_{12} - b_{22}) + (a_{11} + a_{12})b_{22},$$

$$E = (a_{21} + a_{22})b_{11} + a_{22}(-b_{11} + b_{21}).$$

Pentru a obține produsul a două matrice este suficient de a efectua șapte înmulțiri și 18 adunări. Dacă am multiplica matricele în mod tradițional, ne-ar trebui opt înmulțiri.

Numărul de operații efectuate la înmulțirea a două matrice cu algoritmul lui Strassen este:

$$N(n) = n^{\log_2 7} + 6(n^{\log_2 7} + n^{\log_2 4})$$

Algoritmul lui Strassen pentru n suficient de mare este mai avantajos decât procedeul obișnuit de înmulțire a matricelor.

Factorizarea LU

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & l_{i,j} & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,1} & \cdots & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & u_{i,j} & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

LU разложение матрицы

Этот способ есть не что иное, известный метод Гаусса исключения неизвестных. Пример:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{ccc|ccc} & A & & E & & \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} U & & & L_0 & & \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \quad L = L_0^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad U = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Factorizarea LU

$$A x = b$$

$$A = LU$$

$$LUx = b$$

$$L y = b$$

$$U x = y$$

Factorizarea LU

Dacă se cunoaște o factorizare LU a matricei A , atunci sistemul de ecuații liniare $Ax = b$ este echivalent cu

$$LUx = b,$$

care se desface în două sisteme triunghiulare:

$$Ly = b, \quad Ux = y.$$

Se rezolvă mai întâi sistemul inferior triunghiular

$$Ly = b$$

printr-o procedură tipică de **substituție "înainte"** începând cu prima ecuație:

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}, \quad y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k}{l_{ii}}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Apoi se rezolvă sistemul superior triunghiular $Ux = y$ prin procedura de **substituție "înapoi"**, începând cu ultima ecuație:

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}, \quad x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ki} x_k}{u_{ii}}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1,$$

Utilizând o factorizare LU a lui A putem rezolva simultan mai multe sisteme de ecuații, având aceeași matrice A , fără a relua calculele de la început.

Factorizarea Cholesky

Dacă matricea A este simetrică și pozitiv definită, atunci există o matrice inferior triunghiulară L , cu elementele diagonale pozitive, unică, astfel încât $A = L \cdot L^T$

O matrice simetrică este pozitiv definită, dacă:

$$(Ax, x) > 0, \quad \forall x \in R^n, x \neq 0.$$

$$A = LL^T$$



$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$



André Louis Cholesky
(1875-1918)

Factorizarea Cholesky

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} \\ 0 & L_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = L_{11}^2 \rightarrow L_{11} = (A_{11})^{\frac{1}{2}}$$

$$A_{21} = L_{21} \times L_{11} \rightarrow L_{21} = \frac{A_{21}}{L_{11}}$$

$$A_{22} = L_{21}^2 + L_{22}^2 \rightarrow L_{22} = (A_{22} - L_{21}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} l_{11}^2 = a_{11} \\ l_{21}l_{11} = a_{21} \\ l_{31}l_{11} = a_{31} \\ l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} \\ l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} = a_{32} \\ l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = a_{33} \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ l_{21} = a_{21}/\sqrt{a_{11}} \\ l_{31} = a_{31}/\sqrt{a_{11}} \\ l_{22} = \sqrt{a_{22} - \frac{a_{21}^2}{a_{11}}} \\ l_{32} = \frac{a_{32} - \frac{a_{21}a_{31}}{a_{11}}}{\sqrt{a_{22} - \frac{a_{21}^2}{a_{11}}}} \\ l_{33} = \sqrt{a_{33} - \frac{a_{21}^2}{a_{11}} - \frac{a_{31}^2}{a_{11}}} \end{cases}$$

Factorizarea Cholesky

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{LL}^T &= \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & & \text{(symmetric)} \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplu

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} & l_{3,1} \\ 0 & l_{2,2} & l_{3,2} \\ 0 & 0 & l_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$l_{1,1}^2 = 1 \Rightarrow l_{1,1} = 1$$

$$l_{2,1} = \alpha$$

$$l_{3,1} = \alpha$$

$$l_{2,2}^2 = 1 - \alpha^2 \Rightarrow l_{2,2} = \sqrt{1 - \alpha^2}$$

$$l_{3,2}\sqrt{1 - \alpha^2} = \alpha - \alpha^2 \Rightarrow l_{3,2} = \alpha \frac{1 - \alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} = \alpha \sqrt{\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}}$$

$$l_{3,3} = \sqrt{1 - \alpha^2 - \alpha^2 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}} = \sqrt{\frac{(1 - \alpha^2)(1 + \alpha) - \alpha^2(1 - \alpha)}{1 + \alpha}} = \sqrt{\frac{(1 - \alpha)(1 + 2\alpha)}{1 + \alpha}}$$

Factorizarea Cholesky

Elementele l_{ij} ale matricei inferior triunghiulare L pot fi calculate în modul următor:
se determină prima coloană a matricei L

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

după ce s-au obținut primele $(k - 1)$ coloane ale matricei L se calculează coloana k

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

$$l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj} \right), \quad i = k + 1, \dots, n.$$

O caracteristică remarcabilă a algoritmului Cholesky constă în stabilitatea lui numerică

Exemplu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 35 \end{pmatrix}$$

$$l_{1,1}^2 = 1 \Rightarrow l_{1,1} = 1$$

$$l_{2,1} = 2$$

$$l_{3,1} = 3$$

$$l_{2,2}^2 = 5 - 4 = 1 \Rightarrow l_{2,2} = 1$$

$$l_{3,2} = 1 - 2 \cdot 3 = -5$$

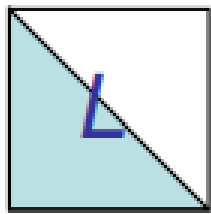
$$l_{3,3} = \sqrt{35 - 25 - 9} = 1,$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Metoda Cholesky

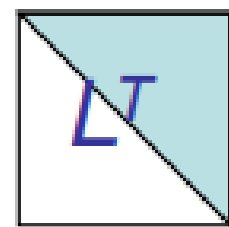
$$Ax = b \iff LL^T x = b \iff \begin{cases} Ly = b, \\ L^T x = y. \end{cases}$$

$$LY = B$$



$$\begin{array}{|c|} \hline Y \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{red arrow} \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline \end{array}$$

$$L^T X = Y$$



$$\begin{array}{|c|} \hline X \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{red arrow} \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline Y \\ \hline \end{array}$$

Metoda Cholesky

$$Ax = b \iff LL^T x = b \iff \begin{cases} Ly = b, \\ L^T x = y. \end{cases}$$

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left[b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k \right], \quad i = 1, \dots, n,$$

$$x_i = \frac{1}{l_{ii}} \left[y_i - \sum_{k=i+1}^n l_{ki} x_k \right], \quad i = n, \dots, 1.$$

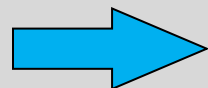
Schema generală de construire a metodelor iterative

Considerăm sistemul de ecuații liniare $Ax = b$, unde

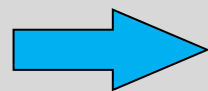
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Metodele iterative se construiesc utilizând desfacerea matricei A definită prin:

$$A = S - T$$



$$Sx = Tx + b,$$



$$x = Qx + d,$$

$$\text{unde } Q = S^{-1}T, \quad d = S^{-1}b$$

Putem construi șirul $\{x^{(k)}\}$ utilizând relația recurentă:

$$Sx^{(k+1)} = Tx^{(k)} + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{sau } x^{(k+1)} = Qx^{(k)} + d, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

Schema generală de construire a metodelor iterative

Pentru a reduce sistemul $Ax = b$ la forma $x = Qx + d$, potrivită pentru iterație, desfacerea matricii

$$A = S - T$$

trebuie să satisfacă condițiile:

- Sistemul

$$Sx^{(k+1)} = Tx^{(k)} + b$$

are o soluție unică $x^{(k+1)}$ și se rezolvă ușor.

De aceea matricea S se alege de o formă simplă și este inversabilă. Ea poate fi diagonală sau triunghiulară

- Șirul $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ converge către soluția exactă x^* oricare ar fi $x^{(0)} \in R^n$

Condiția suficientă de convergență

Dacă există o normă matriceală subordonată unei norme vectoriale astfel încât

$$\|Q\| \leq q < 1,$$

atunci sistemul

$$x = Qx + d$$

are o soluție unică x^* , șirul $\{x^{(k)}\}$ definit prin

$$x^{(k+1)} = Qx^{(k)} + d, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

converge către x^* oricare ar fi aproximația inițială $x^{(0)} \in R^n$ și eroarea se evaluează prin:

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

Metoda iterativă Jacobi

Presupunem că elementele diagonale $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Atunci în calitate de matrice S se poate lua matricea diagonală atașată matricei A :

$$S = \text{Diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

$$S^{-1} = \text{Diag}\left(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}}\right)$$

Sistemul $Ax=b$ devine:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Procesul iterativ **Jacobi** este definit prin:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Metoda iterativă Jacobi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^0 - \cdots - a_{1n}x_n^0) \\ x_2^1 &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^0 - a_{23}x_3^0 - \cdots - a_{2n}x_n^0) \\ x_n^1 &= \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^0 - a_{n2}x_2^0 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^0) \end{aligned}$$

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right]$$

Metoda iterativă Jacobi

Exemplu 1.

$$\begin{array}{rcccc} 10x_1 & -x_2 & +2x_3 & & = 6 \\ -x_1 & +11x_2 & -x_3 & +3x_4 & = 25 \\ 2x_1 & -x_2 & +10x_3 & -x_4 & = -11 \\ & 3x_2 & -x_3 & +8x_4 & = 15 \end{array}$$



$$\begin{array}{rcccc} x_1 = & & \frac{1}{10}x_2 & -\frac{1}{5}x_3 & +\frac{3}{5} \\ x_2 = & \frac{1}{11}x_1 & & +\frac{1}{11}x_3 & -\frac{3}{11}x_4 +\frac{25}{11} \\ x_3 = & -\frac{1}{5}x_1 & +\frac{1}{10}x_2 & & +\frac{1}{10}x_4 -\frac{11}{10} \\ x_4 = & & -\frac{3}{8}x_2 & +\frac{1}{8}x_3 & +\frac{15}{8} \end{array}$$

Exemplu 1 (continuare)

Fie aproximația inițială: $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, $x_3^{(0)} = 0$ și $x_4^{(0)} = 0$.

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}x_2^{(0)} - \frac{1}{5}x_3^{(0)} + \frac{3}{5} = 0.6000 \\x_2^{(1)} &= \frac{1}{11}x_1^{(0)} + \frac{1}{11}x_3^{(0)} - \frac{3}{11}x_4^{(0)} + \frac{25}{11} = 2.2727 \\x_3^{(1)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(0)} + \frac{1}{10}x_2^{(0)} + \frac{1}{10}x_4^{(0)} - \frac{11}{10} = -1.1000 \\x_4^{(1)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(0)} + \frac{1}{8}x_3^{(0)} + \frac{15}{8} = 1.8750\end{aligned}$$

Procesul iterativ **Jacobi** este definit prin:

$$\begin{aligned}x_1^{(k)} &= \frac{1}{10}x_2^{(k-1)} - \frac{1}{5}x_3^{(k-1)} + \frac{3}{5} \\x_2^{(k)} &= \frac{1}{11}x_1^{(k-1)} + \frac{1}{11}x_3^{(k-1)} - \frac{3}{11}x_4^{(k-1)} + \frac{25}{11} \\x_3^{(k)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(k-1)} + \frac{1}{10}x_2^{(k-1)} + \frac{1}{10}x_4^{(k-1)} - \frac{11}{10} \\x_4^{(k)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(k-1)} + \frac{1}{8}x_3^{(k-1)} + \frac{15}{8}\end{aligned}$$

Metoda iterativă Jacobi

Exemplu 2.

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{array} \right\} \text{ Soluția exactă } x^* = (1, 1)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = S^{-1}T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}x_2^{(k)} + \frac{1}{2}, \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}x_1^{(k)} + \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Pentru $x^{(0)} = (0, 0)^T$ obținem șirul:

$$x^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, \quad x^{(2)} = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)^T, \quad x^{(3)} = \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right)^T, \quad x^{(4)} = \left(\frac{15}{16}, \frac{15}{16}\right)^T, \dots$$

Observație

În metoda lui Jacobi matricea Q are elementele

$$q_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } i = j, \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

Norma $\|Q\|_\infty$ este

$$\|Q\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |q_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

Rezultă că dacă

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

adică dacă matricea A este **diagonal dominantă**, atunci metoda lui Jacobi este convergentă

Exemplu 3 (Metoda iterativă Jacobi)

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -21 \\ 15 \end{bmatrix} \quad x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \|b - Ax^0\|_2 = 26.7395$$

Matricea este diagonal dominantă

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{7 + x_2^0 - x_3^0}{4} = \frac{7}{4} = 1.75 \\ x_2^1 &= \frac{21 + 4x_1^0 + x_3^0}{8} = \frac{21}{8} = 2.625 \\ x_3^1 &= \frac{15 + 2x_1^0 - x_2^0}{5} = \frac{15}{5} = 3.0 \end{aligned} \quad \|b - Ax^1\|_2 = 10.0452$$

Exemplu 3 (continuare)

$$x_1^2 = \frac{7 + x_2^1 - x_3^1}{4} = \frac{7 + 2.625 - 3}{4} = 1.65625$$

$$x_2^2 = \frac{21 + 4x_1^1 + x_3^1}{8} = \frac{21 + 4 \times 1.75 + 3}{8} = 3.875$$

$$x_3^2 = \frac{15 + 2x_1^1 - x_2^1}{5} = \frac{15 + 2 \times 1.75 - 2.625}{5} = 4.225$$

$$\|b - Ax^2\|_2 = 6.7413$$

$$x_1^3 = \frac{7 + 3.875 - 4.225}{4} = 1.6625$$

$$x_2^3 = \frac{21 + 4 \times 1.65625 + 4.225}{8} = 3.98125$$

$$x_3^3 = \frac{15 + 2 \times 1.65625 - 3.875}{5} = 2.8875$$

$$\|b - Ax^3\|_2 = 1.9534$$

Matricea A este *diagonal dominantă*, metoda lui Jacobi este convergentă

Exemplu 4

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -21 \\ 7 \end{bmatrix} \quad x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \|b - Ax^0\|_2 = 26.7395$$

Matricea nu este diagonal dominantă

$$x_1^1 = \frac{-15 + x_2^0 + 5x_3^0}{2} = \frac{-15}{2} = -7.5$$

$$x_2^1 = \frac{21 + 4x_1^0 + x_3^0}{8} = \frac{21}{8} = 2.625$$

$$x_3^1 = 7 - 4x_1^0 + x_2^0 = 7.0$$

$$\|b - Ax^1\|_2 = 54.8546$$

Exemplu 4 continuare...

$$x_1^1 = \frac{-15 + 2.625 + 5 \times 7}{2} = 11.3125$$

$$x_2^1 = \frac{21 - 4 \times 7.5 + 7}{8} = -0.25$$

$$x_3^1 = 7 + 4 \times 7.5 + 2.625 = 39.625$$

$$\|b - Ax^2\|_2 = 208.3761$$

Termenul rezidual crește la fiecare iterație, deci metoda diverge

Rețineți că aici matricea nu este diagonal dominantă !

Observație

În metodele iterative, nu este necesar de luat vectorul termenilor liberi în calitate de aproximație inițială $x^0 = d$. Convergența procesului de iterație depinde doar de proprietățile matricei A . Mai mult, în anumite condiții, dacă acest proces converge pentru o anumită alegere a aproximației inițiale, atunci metoda va converge la același vector limită (soluție) pentru orice altă alegere a acestei aproximări inițiale, deci vectorul inițial x^0 poate fi luat arbitrar din R^n .

Metoda Gauss-Seidel

În metoda lui Jacobi este necesar a păstra în memoria calculatorului toate componentele vectorului $x^{(k)}$ atâta timp cât se calculează vectorul $x^{(k+1)}$. Dacă modificăm metoda lui Jacobi astfel încât la pasul $(k + 1)$ să folosim în calculul componentei $x_i^{(k+1)}$, valorile deja calculate la același pas: $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$ se obține **metoda lui Gauss -Seidel**, iar șirul iterativ $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ devine:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Metoda Gauss-Seidel

Folosiți cea mai recentă actualizare

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^0 - \dots - a_{1n}x_n^0) \\ x_2^1 &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^0 - \dots - a_{2n}x_n^0) \\ x_n^1 &= \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^1 - a_{n2}x_2^1 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^1) \end{aligned}$$

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right]$$

Metoda Gauss-Seidel

Exemplu

$$\begin{array}{rclcl} 10x_1 & -x_2 & +2x_3 & & = 6 \\ -x_1 & +11x_2 & -x_3 & +3x_4 & = 25 \\ 2x_1 & -x_2 & +10x_3 & -x_4 & = -11 \\ & 3x_2 & -x_3 & +8x_4 & = 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} x_1^{(k)} & = & \frac{1}{10}x_2^{(k-1)} & -\frac{1}{5}x_3^{(k-1)} & +\frac{3}{5} \\ x_2^{(k)} & = & \frac{1}{11}x_1^{(k)} & +\frac{1}{11}x_3^{(k-1)} & -\frac{3}{11}x_4^{(k-1)} +\frac{25}{11} \\ x_3^{(k)} & = & -\frac{1}{5}x_1^{(k)} & +\frac{1}{10}x_2^{(k)} & +\frac{1}{10}x_4^{(k-1)} -\frac{11}{10} \\ x_4^{(k)} & = & & -\frac{3}{8}x_2^{(k)} & +\frac{1}{8}x_3^{(k)} +\frac{15}{8} \end{array}$$

Metoda Gauss-Seidel

Metodei Gauss-Seidel corespunde desfacerea

$$A = S - T$$

unde S este matricea subdiagonală atașată lui A , iar T este matricea strict supradiagonală cu elementele $-a_{ij}$ atașată la aceeași matrice A :

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Metoda Gauss-Seidel

Dacă matricea A este diagonal dominantă, adică

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

atunci metoda lui Jacobi și metoda lui Gauss – Seidel vor genera un șir de aproximații succesive care converge către soluția exactă oricare ar fi aproximația inițială $x^{(0)}$

Metoda Gauss-Seidel

Condiția că matricea A este diagonal dominantă

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

este numai suficientă și nu necesară pentru ca metoda lui Jacobi și metoda lui Gauss – Seidel vor converge către soluția exactă oricare ar fi aproximația inițială $x^{(0)}$.

De exemplu pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 50 & 25 & 2 \end{pmatrix}$$

care nu este diagonal dominantă metoda lui Gauss – Seidel converge foarte rapid

Metoda Gauss-Seidel

Reluăm exemplul de mai sus

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Șirul Gauss-Seidel în exemplul de mai sus arată astfel:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{2}x_2^{(k)} + \frac{1}{2}, \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$$

Pentru aproximația inițială $x^{(0)} = (0, 0)^T$ obținem:

$$x^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, x^{(2)} = \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)^T, x^{(3)} = \left(\frac{15}{16}, \frac{31}{32}\right)^T, \dots$$

Se observă că o iterație Gauss – Seidel aici este echivalentă cu două iterații Jacob

Metoda Gauss-Seidel

Dacă A este o matrice pozitiv definită atunci metoda Gauss – Seidel converge de două ori mai repede către soluție decât metoda lui Jacobi.

Se cunosc modele în care metoda lui Gauss – Seidel converge, iar metoda lui Jacobi nu converge și invers.

Metoda Gauss-Seidel

Teorema (Reich). Dacă matricea A este simetrică și are elementele diagonale

$$a_{ii} > 0 \text{ pentru orice } i$$

atunci metoda Gauss – Seidel converge dacă și numai dacă A este o matrice pozitiv definită.

Metoda suprarelaxărilor succesive

Metoda lui Gauss – Seidel poate fi modificată pentru îmbunătățirea vitezei de convergență a șirului aproximațiilor succesive. Fie $\tilde{x}^{(k)}$ vectorul obținut la pasul $k + 1$ prin metoda Gauss – Seidel. Metoda iterativă definită prin:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(\tilde{x}^{(k)} - x^{(k)})$$

este cunoscută cu numele de *metoda suprarelaxărilor succesive*.

Parametrul de relaxare $\omega \in (0, 2)$ se alege astfel încât să crească viteza de convergență. Pentru $\omega = 1$ metoda se reduce la metoda lui Gauss – Seidel.

Metoda suprarelaxărilor succesive

S-a găsit că pentru o alegere potrivită a parametrului ω convergența metodei suprarelaxării succesive:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(\tilde{x}^{(k)} - x^{(k)})$$

este net superioară metodelor Jacobi și Gauss – Sidel.

Se poate arăta că $\omega \in (0, 2)$, de regulă, în practică:

$$\omega \approx 1.8 \div 1.9.$$

Se demonstrează că metoda suprarelaxărilor succesive converge pentru toate matricele A simetrice pozitiv definite.

Perturbații. Numărul de condiționare

Fie sistemul liniar $Ax = b$. Soluția exactă a sistemului considerat poate fi scrisă sub forma: $x^* = A^{-1}b$

Presupunem că vectorul b suferă perturbația δb

$$A\tilde{x} = b + \delta b$$

Efectului relativ al perturbației δb :

$$\frac{\|\tilde{x} - x^*\|}{\|x^*\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Dacă perturbăm elementele lui A cu δA :

$$\frac{\|\tilde{x} - x^*\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Numărul de condiționare:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Numărul de condiționare caracterizează efectul maximal al perturbărilor δb și δA la rezolvarea sistemului $Ax = b$.

Perturbații. Numărul de condiționare

Dacă numărul de condiționare $cond(A)$ este mare, atunci perturbații mici ale lui A și b vor produce perturbații relativ mari ale lui x^* ; în acest caz se spune că matricea A este **rău** (sau **prost**) **condiționată**.

Matricele cu numărul de condiționare $cond(A)$ “mic” se numesc **bine condiționate**.

Determinarea numărului de condiționare $cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ este o problemă dificilă, deoarece conține calculul lui $\|A^{-1}\|$. Un procedeu practic de calcul aproximativ al lui $\|A^{-1}\|$ constă în următoarele:

Se aleg k vectori y_i , apoi se rezolvă sistemul de ecuații

$Aw_i = y_i, i = 1, 2, \dots, k$, și se pune

$$\|A^{-1}\| \approx \max_{1 \leq i \leq k} \frac{\|w_i\|}{\|y_i\|}.$$

Sisteme liniare supradeterminate

Fie un sistem de m ecuații cu n necunoscute

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Dacă $m > n$ sistemul

$$Ax = b$$

se numește ***sistem supradeterminat***.

Formulara problemei

O pseudosoluție în sensul celor mai mici pătrate (CMMP) pentru sistemul supradeterminat

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

este un vector $x^* \in R^n$ cu proprietatea:

$$\|Ax^* - b\|_2^2 = \min_{x \in R^n} \|Ax - b\|_2^2$$

Vectorul x^* se numește *soluție generalizată* în sensul CMMP.

Formulara problemei

$$\|Ax^* - b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$$

Vectorul x^* minimizează norma euclidiană a vectorului rezidual

$$r = Ax - b$$

(minimizează abaterea pătratică a lui Ax față de b):

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|r\|_2^2 = (r, r) = \sum_{i=1}^n r_i^2$$

Formulara problemei

Exemplu. Sistemul:

$$\begin{aligned}2x_1 &= b_1, \\3x_1 &= b_2, \\4x_1 &= b_3,\end{aligned}$$

va avea soluție numai în cazul când termenii liberi b_1, b_2 și b_3 se află în raportul 2: 3: 4.

$$\|r\|_2^2 = (2x_1 - b_1)^2 + (3x_1 - b_2)^2 + (4x_1 - b_3)^2$$

Se pune problema determinării unui vector $x^* \in R^n$ care să realizeze minimul expresiei:

$$E(x) = \|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \right)^2$$

Metode bazate pe sisteme normale

Valoarea minimă a expresiei $E(x)$ se obține anulând derivatele parțiale în raport cu x_1, x_2, \dots, x_n , adică anulând gradientul funcției $E(x)$:

$$\nabla E(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial E(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial E(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\nabla E(x) = \nabla(\|Ax - b\|_2^2) = 2A^T(Ax - b) = 0$$

Metode bazate pe sisteme normale

$$\nabla E(x) = 2A^T(Ax - b) = 0$$

➔ *Sistemul normal* asociat sistemului $Ax = b$:

$$A^T Ax^* = A^T b$$

Matricea $C = A^T A$ este pozitiv semidefinită:

$$(Cx, x) = x^T Cx = x^T A^T Ax = (Ax)^T Ax = \|Ax\|_2^2 \geq 0$$

Metode bazate pe sisteme normale

Dacă

$$\text{rank}(A) = n$$

adică dacă coloanele matricei sunt liniar independente, atunci matricea *pseudoinversă* la matricea A este definită:

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$$

Această matrice este de dimensiune $m \times n$

În cazul $m=n$ matricea pseudoinversă coincide cu inversa matricei A :

$$A^+ = A^{-1}$$

Metode bazate pe sisteme normale

Teorema de existență și unicitate.

Dacă matricea A de dimensiune $m \times n$ are coloanele liniar independente, atunci oricare ar fi vectorul $b \in R^m$ sistemul $Ax = b$ are o *pseudosoluție în sensul CMMP* unică $x^* \in R^n$ și

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b = A^+ b$$

Metode bazate pe sisteme normale

Exemplu 1. Considerăm sistemul supradeterminat:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 9, \\ x_1 + 4x_2 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 &= -3. \end{aligned} \right\}$$

$$E(x) = \|Ax - b\|_2^2 = (2x_1 - x_2 - 9)^2 + (x_1 + 4x_2 - 0)^2 + (3x_1 + x_2 + 3)^2$$

$$\frac{\partial E(x)}{\partial x_1} = 4(2x_1 - x_2 - 9) + 2(x_1 + 4x_2) + 6(3x_1 + x_2 + 3) = 0$$

$$\frac{\partial E(x)}{\partial x_2} = -2(2x_1 - x_2 - 9) + 8(x_1 + 4x_2) + 2(3x_1 + x_2 + 3) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} 28x_1 + 10x_2 - 18 &= 0, \\ 10x_1 + 36x_2 + 24 &= 0. \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} 14x_1 + 5x_2 &= 9, \\ 5x_1 + 18x_2 &= -12. \end{aligned} \right\}$$

Metode bazate pe sisteme normale

Exemplu 1. (Continuare)

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 = 9, \\ x_1 + 4x_2 = 0, \\ 3x_1 + x_2 = -3. \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Avem

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 18 \end{pmatrix},$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Metode bazate pe sisteme normale

Exemplu 1. Exemplu 1. (Continuare)

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 9, \\ x_1 + 4x_2 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 &= -3. \end{aligned} \right\}$$

Sistemul normal

$$A^T A x = A^T b$$

asociat problemei propuse devine:

$$\left. \begin{aligned} 14x_1 + 5x_2 &= 9, \\ 5x_1 + 18x_2 &= -12. \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix}$$

cu soluția

$$\begin{aligned} x_1^* &= 0,97797, \\ x_2^* &= -0,93833 \end{aligned}$$

Metode bazate pe sisteme normale

Exemplu 2. Considerăm sistemul supradeterminat:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Avem

$$C = A^T A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$A^T \bar{b} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sistemul normal

$$A^T A x = A^T b$$

asociat problemei propuse devine:

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 3x_2 = 1 \end{cases}$$

cu soluția

$$\begin{aligned} x_1^* &= 0, \\ x_2^* &= 0,33333 \end{aligned}$$

Metode bazate pe sisteme normale

Exemplu 3.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +3x_2 & = -2 \\ 3x_1 & -x_2 & = 4 \\ 2x_1 & +2x_2 & = 1 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{90} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{90} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{90} \begin{bmatrix} 2 & 23 & 10 \\ 19 & -13 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b} = \frac{1}{90} \begin{bmatrix} 2 & 23 & 10 \\ 19 & -13 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{90} \begin{bmatrix} 98 \\ -80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49/45 \\ -8/9 \end{bmatrix}$$

So $\vec{x} = \begin{bmatrix} 49/45 \\ -8/9 \end{bmatrix}$ is the vector that minimizes $\|\vec{b} - A\vec{x}\|$

Metode bazate pe sisteme normale

Cea mai mare parte a efortului este cerut de formarea sistemului normal

$$A^T A x = A^T b$$

asociat problemei considerate

$$A x = b$$

Sunt necesare

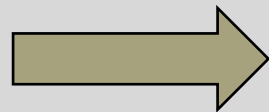
$$m \cdot n(n + 3)/2$$

operații aritmetice

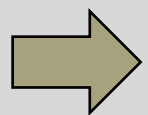
Metode bazate pe sisteme normale

Rezolvarea sistemului $Ax=b$ ($m > n$)

$$Ax = b$$



$$A^T Ax = A^T b$$



$$x = (A^T A)^{-1} A^T b = A^+ b$$

Metode bazate pe sisteme normale

Exemplu 3.

$$\begin{bmatrix} -11 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x = A^+ b = \begin{bmatrix} -.148 & .180 & .246 \\ .164 & .189 & -.107 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.492 \\ 0.787 \end{bmatrix}$$

Metode bazate pe sisteme normale

Principalul dezavantaj al metodelor bazate pe sisteme de ecuații normale este faptul că numărul de condiționare a sistemului normal este egal cu pătratul numărului de condiționare a problemei inițiale. Acest fapt afectează negativ viteza de convergență a metodelor iterative bazate pe sisteme normale. Pentru a crește viteza de convergență a metodelor iterative bazate pe sistemele normale, atunci când se rezolvă probleme rău (prost) condiționate, se utilizează în prezent diferite variante de preconditionari pentru a reduce numărul de condiționarea sistemului original de ecuații. Cu toate acestea, nu există un procedeu universal pentru a diminua valoarea numărului de condiționare.

Metode de ortogonalizare

Fie \bar{a}_i coloanele matricei A :

$$A = (\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \bar{a}_3 \ \dots \ \bar{a}_n)$$

În cazul în care coloanele $\bar{a}_i, i = 1, 2, \dots, n$, ale matricei A sunt ortogonale, adică:

$$\bar{a}_i^T \bar{a}_j = 0, i \neq j,$$

atunci matricea $A^T A$ devine o matrice diagonală cu elementele de pe diagonală egale cu $\bar{a}_i^T \bar{a}_i \neq 0$ și imediat se obține pseudosoluția

$$x_i^* = \frac{b^T \bar{a}_i}{\bar{a}_i^T \bar{a}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Metode de ortogonalizare

În locul formării sistemului normal putem ortogonaliza coloanele matricei A .

Un procedeu clasic de ortogonalizare este *metoda lui Gram – Schmidt*.

Șirul de vectori liniari independenți a_1, a_2, \dots, a_n se ortogonalizează prin metoda Gram-Schmidt după formulele:

$$v_1 = a_1, \quad v_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(a_i, v_j)v_j}{(v_j, v_j)}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Metode de ortogonalizare

Exemplu. Fie vectorii:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci $v_1 = a_1$, și așa cum $a_2^T v_1 = 1$ și $v_1^T v_1 = 2$ vectorul v_2 devine:

$$v_2 = a_2 - \frac{a_2^T v_1}{v_1^T v_1} v_1 = a_2 - \frac{1}{2} v_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vectorii v_1 și v_2 sunt ortogonali: $v_1^T v_2 = (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Metode de ortogonalizare

Exemplu. Fie vectorii:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Doi vectori sunt **ortonormali** dacă sunt ortogonali (au produsul scalar 0) și au amândoi lungimea unitară (norma fiecăruia este 1)

$$\|v_1\|_2 = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}, \quad \|v_2\|_2 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Vectorii ortonormați sunt:

$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|_2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|_2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Factorizarea QR

Procesul de ortonormare Gram – Schimdt dă o altă factorizare pentru matricea A , numită *factorizarea QR*

În cazul exemplului de mai sus putem scrie:

$$\begin{aligned} a_1 &= v_1, & \text{sau} & \quad a_1 = \sqrt{2}q_1, \\ a_2 &= -\frac{1}{2}v_1 + v_2, & \text{sau} & \quad a_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}q_1 + \sqrt{\frac{3}{2}}q_2. \end{aligned}$$

Reprezentarea matriceală a acestor două ecuații este:

$$(a_1 \quad a_2) = (q_1 \quad q_2) \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{1/2} \\ 0 & \sqrt{3/2} \end{pmatrix},$$

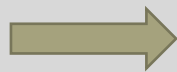
adică $A = QR$ unde Q este cu coloane ortogonale, iar R este superior triunghiulară

Factorizarea QR

Orice matrice de dimensiune $m \times n$, $m \geq n$, cu coloanele liniar independente, admite o factorizare QR, unde Q este o matrice (de dimensiune $m \times n$) cu coloanele ortonormate, iar R este o matrice (pătrată de dimensiune $n \times n$) superior triunghiulară.

Dacă se cunoaște factorizarea QR a matricei A atunci CMMP se rezolvă ușor

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T = (R^T Q^T Q R)^{-1} R^T Q^T b$$



$$x^* = (R^T R)^{-1} R^T Q^T b = R^{-1} Q^T b$$

Prin urmare pseudosoluția în sensul CMMP se poate obține ușor rezolvând sistemul triunghiular:

$$Rx = Q^T b$$

Factorizarea QR

Exemplu.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculul valorilor și vectorilor proprii

Numărul λ (real sau complex) se numește **valoare proprie** a matricei A dacă există un vector nenul $x \in R^n$, astfel încât

$$Ax = \lambda x$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vectorul $x \neq 0$ se numește **vector propriu** al lui A asociat valorii proprii λ

Formulara problemei

Ecuația $Ax = \lambda x$ poate fi rescrisă sub forma

$$(A - \lambda I)x = 0$$

unde

$$\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Formulara problemei

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Condiția necesară și suficientă ca acest sistem omogen să admită soluție nenulă este ca:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Formulara problemei

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Acest determinant este un polinom de grad n cu coeficienți reali

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n$$

Definiții de bază

Polinomul

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n$$

se numește **polinom caracteristic** asociat matricei A

Ecuația $P_n(\lambda)=0$ se numește **ecuația caracteristică** a matricei A

Definiții de bază

Ecuția caracteristică

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0$$

este o ecuație algebrică de grad n cu coeficienți reali care în virtutea teoremei fundamentale a algebrei are exact n rădăcini

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

în general, complexe și nu neapărat distincte

Definiții de bază

Mulțimea valorilor proprii ale matricei A se numește **spectrul** lui A :

$$\sigma(A) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Raza spectrală a lui A :

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

Norma spectrală:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

Dacă $A = A^T$, atunci

$$\|A\|_2 = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| = \rho(A)$$

Exemplu 1

Să se calculeze valorile proprii și vectorii proprii pentru matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Polinomul caracteristic este:

$$\begin{aligned} P_2(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -5 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (4 - \lambda)(-3 - \lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2 \end{aligned}$$

Rădăcinile ecuației caracteristice: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$

Exemplu 1

Pentru $\lambda_1 = -1$ avem:

$$(A - \lambda_1 I)x = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} 5x_1 - 5x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{array} \right\}$$

de unde vectorul propriu :

$$v^1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \text{const} \neq 0$$

Pentru $\lambda_2 = 2$ vom avea:

$$(A - \lambda_2 I)x = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v^2 = c \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0$$

Vectorii proprii ai unei matrice se determină neunivoc, deoarece dacă x este un vector propriu atunci orice vector cx , unde c este un scalar, va fi tot un vector propriu.

Exemplu 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

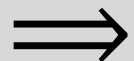


$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$



$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda)(-2-\lambda) + 3 + 2(-3-\lambda) + 5(-2-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda + 12 + 3 - 6 - 2\lambda - 10 - 5\lambda = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0$$



$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda^3 + 1) + 3\lambda(\lambda + 1) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = (\lambda + 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Proprietăți fundamentale

1. Valorile proprii ale matricelor simetrice sunt reale.

$$\text{Dacă } A = A^T \implies \lambda \in \mathbb{R}$$

Reciproca nu este adevărată

2. Valorile proprii ale matricelor pozitiv definite sunt pozitive.

$$\text{Dacă } A = A^T \text{ și } x^T A x > 0, \forall x \neq 0 \implies \lambda > 0$$

Dacă $A = A^T$ și $\lambda > 0 \implies$ matricea A este pozitiv definită

Proprietăți fundamentale

3. Valorile proprii ale

- matricelor diagonale,
- matricelor inferior triunghiulare
- matricelor superior triunghiulare

coincid cu elementele de pe diagonala principală.

Proprietăți fundamentale

4. Matricele asemenea (similare) au aceleași valori proprii .

Matricele A și B sunt similare dacă și numai dacă există o matrice nesingulară M astfel încât

$$B = M^{-1}AM$$

Dacă y sunt vectorii proprii ai lui B , vectorii proprii x ai lui A se găsesc din relația:

$$x = My.$$

Proprietăți fundamentale

5. Suma valorilor proprii ale unei matrice A este egală cu suma elementelor de pe diagonala principală:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

Această sumă se numește **urma matricei** A și se notează $Tr(A)$ sau $Sp(A)$

6. Produsul valorilor proprii coincide cu determinantul matricei:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det(A)$$

Proprietăți fundamentale

7. Dacă λ_i , $1 \leq i \leq n$ sunt valorile proprii ale matricei A , atunci λ_i^k , $1 \leq i \leq n$ sunt valorile proprii ale matricei $A^k = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$

8. Vectorii proprii ce corespund valorilor proprii diferite sunt ortogonali

Polinomul propriu:

$$Q_n(\lambda) = (-1)^n P_n(\lambda) = \lambda^n + q_1 \lambda^{n-1} + \dots + q_{n-1} \lambda + q_n$$

Proprietăți fundamentale

9. Valorile proprii ale matricilor A și A^T coincid

10. Formulele lui Newton:

$$\mu_k + \sum_{i=1}^{k-1} q_i \mu_{k-1} = -k q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

unde $\mu_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$, $k = 1, 2, \dots, n$

Proprietăți fundamentale

11. *Identitatea lui Cayley - Hamilton.* Orice matrice pătrată A este o rădăcină a polinomului său caracteristic:

$$P_n(A) = (-1)^n A^n + p_1 A^{n-1} + \dots \\ + p_{n-1} A + p_n I = 0$$

Exemplu.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$P_2(A) = A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proprietăți fundamentale

12. Teorema despre cercurile lui Gershgorin. Orice valoare proprie λ a matricei $A = (a_{ij})_{n \times n}$ se află, în planul complex, în reuniunea cercurilor :

$$\bigcup_{i=1}^n \left\{ z: |z - a_{ii}| \leq r_i; \quad r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right\}$$

Proprietăți fundamentale

13. Teorema (Rayleigh-Ritz). Fie A o matrice simetrică și valorile proprii ale lui A sunt așezate în ordine crescătoare

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n = \lambda_{\max}$$

Atunci

$$\lambda_1 \|x\|_2^2 \leq (Ax, x) \leq \lambda_n \|x\|_2^2, \quad \forall x \in R^n$$

$$\lambda_1 = \lambda_{\min} = \min_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \min_{\|x\|_2=1} (Ax, x)$$

$$\lambda_n = \lambda_{\max} = \max_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \max_{\|x\|_2=1} (Ax, x)$$

Proprietăți fundamentale

Expresia

$$R(x) = \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

se numește ***câțul lui Rayleigh***.

Se observa imediat că, atunci când x este un vector propriu al matricei A , câțul Rayleigh asociat coincide cu valoarea proprie corespunzătoare.

Aplicație

Inversarea unei matrici cu ajutorul coeficienților polinomului caracteristic

Din identitatea Cayley – Hamilton avem

$$A^n + q_1 A^{n-1} + \cdots + q_{n-1} A + q_n I = 0.$$

Înmulțind la dreapta prin A^{-1} se obține:

$$A^{n-1} + q_1 A^{n-2} + \cdots + q_{n-1} I = -q_n A^{-1}$$

Pentru $q_n \neq 0$ avem:

$$A^{-1} = -\frac{1}{q_n} (A^{n-1} + q_1 A^{n-2} + \cdots + q_{n-1} I)$$

METODE DE CALCUL

Metodele de calcul ale valorilor proprii se împart în două grupe:

- metode care determină întâi coeficienții polinomului caracteristic și apoi se rezolvă ecuația caracteristică;
- metode care determină valorile proprii și vectorii proprii prin procedee iterative fără a calcula coeficienții polinomului caracteristic .

METODE DE CALCUL

Se cunosc metode de determinare a coeficienților polinomului caracteristic: metoda lui Krylov, metoda lui Leverrier, metoda lui Fadeev , metoda lui Lanczos

Aceste metode sunt recomandabile doar în cazurile când matricea A este de ordin mic și rădăcinile ecuației caracteristice sunt bine separate. Numărul de operații aritmetice pentru determinarea coeficienților polinomului caracteristic este foarte mare (de exemplu, metoda lui Fadeev necesită n^4 operații).

Observații asupra metodelor de calcul

Coeficienții polinomului caracteristic se obțin cu erori de rotunjire inerente care pot conduce la variații mari ale rădăcinilor, deoarece problema rezolvării ecuațiilor algebrice este rău condiționată .

Fie, de exemplu, matricea A de forma

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Observații asupra metodelor de calcul

Polinomul caracteristic al lui $A(\varepsilon)$ este

$$P_n(\varepsilon, \lambda) = (\lambda - \alpha)^n - (-1)^n \varepsilon.$$

De exemplu, dacă

$$n = 10, \alpha = 0, \text{ și } \varepsilon = 10^{-10},$$

atunci practic matricele $A(0)$ și $A(10^{-10})$ reprezintă una și aceeași matrice în memoria mașinii electronice de calcul, în timp ce polinomul caracteristic $P_{10}(10^{-10}, \lambda)$ are rădăcina multiplă 0,1.

Prin urmare, valoarea proprie $\alpha = 0$ suferă o deplasare de 10^9 ori mai mare decât o perturbație ε care a produs-o.

Care este importanța proprietăților/vectorilor proprii?

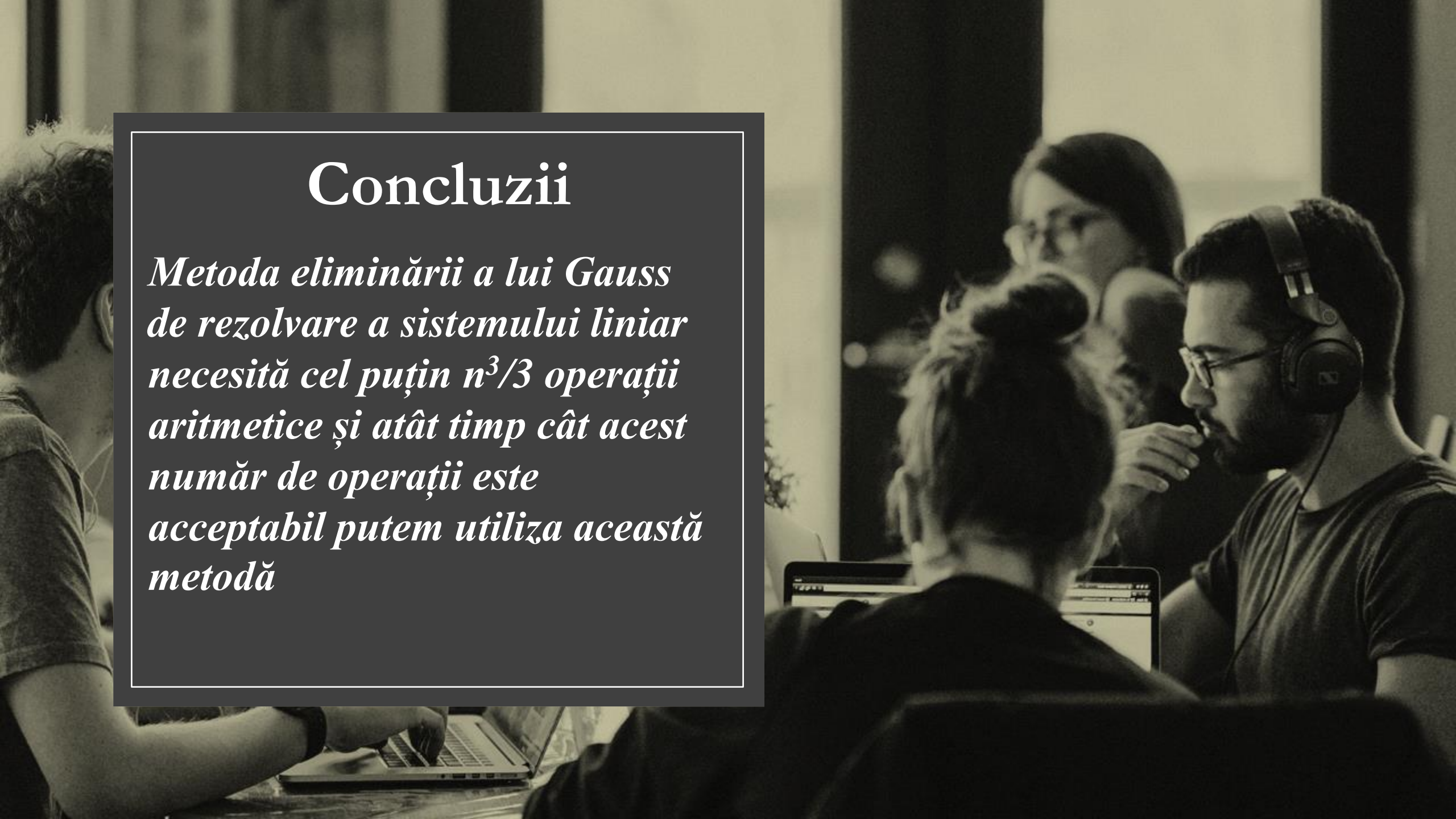
Valorile proprii caracterizează proprietăți importante ale transformărilor liniare, cum ar fi dacă un sistem de ecuații liniare are sau nu o soluție unică. În multe aplicații, valorile proprii descriu, de asemenea, proprietățile fizice ale unui model matematic.

Câteva aplicații importante:

- Analiza componentelor principale (PCA) în recunoașterea obiectelor / imaginilor;
- Fizică - analiza stabilității, fizica corpurilor rotative;
- Analiza riscului de piață - pentru a defini dacă o matrice este pozitivă definită;
- PageRank de la Google.

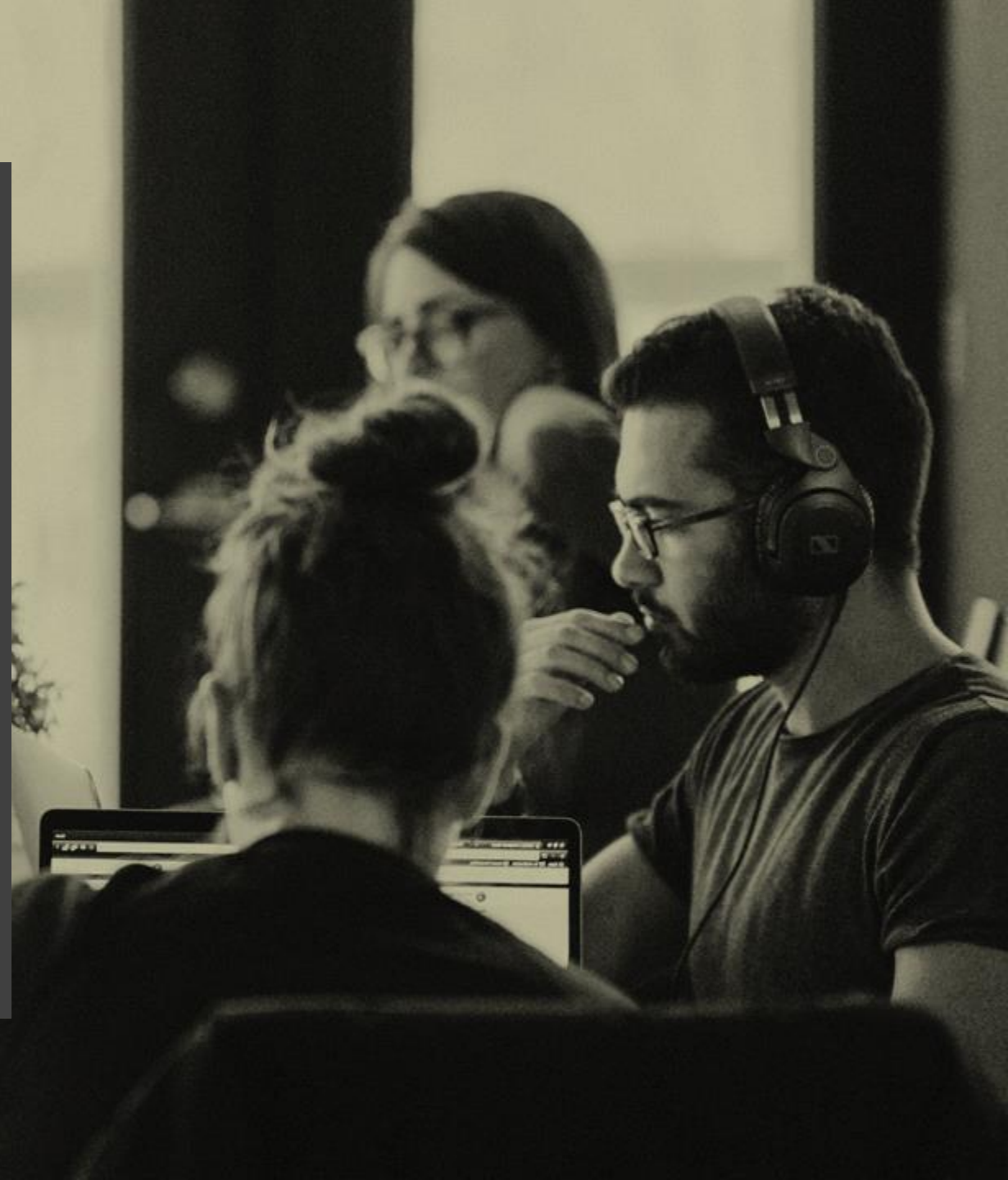
Concluzii

Metoda eliminării a lui Gauss de rezolvare a sistemului liniar necesită cel puțin $n^3/3$ operații aritmetice și atât timp cât acest număr de operații este acceptabil putem utiliza această metodă



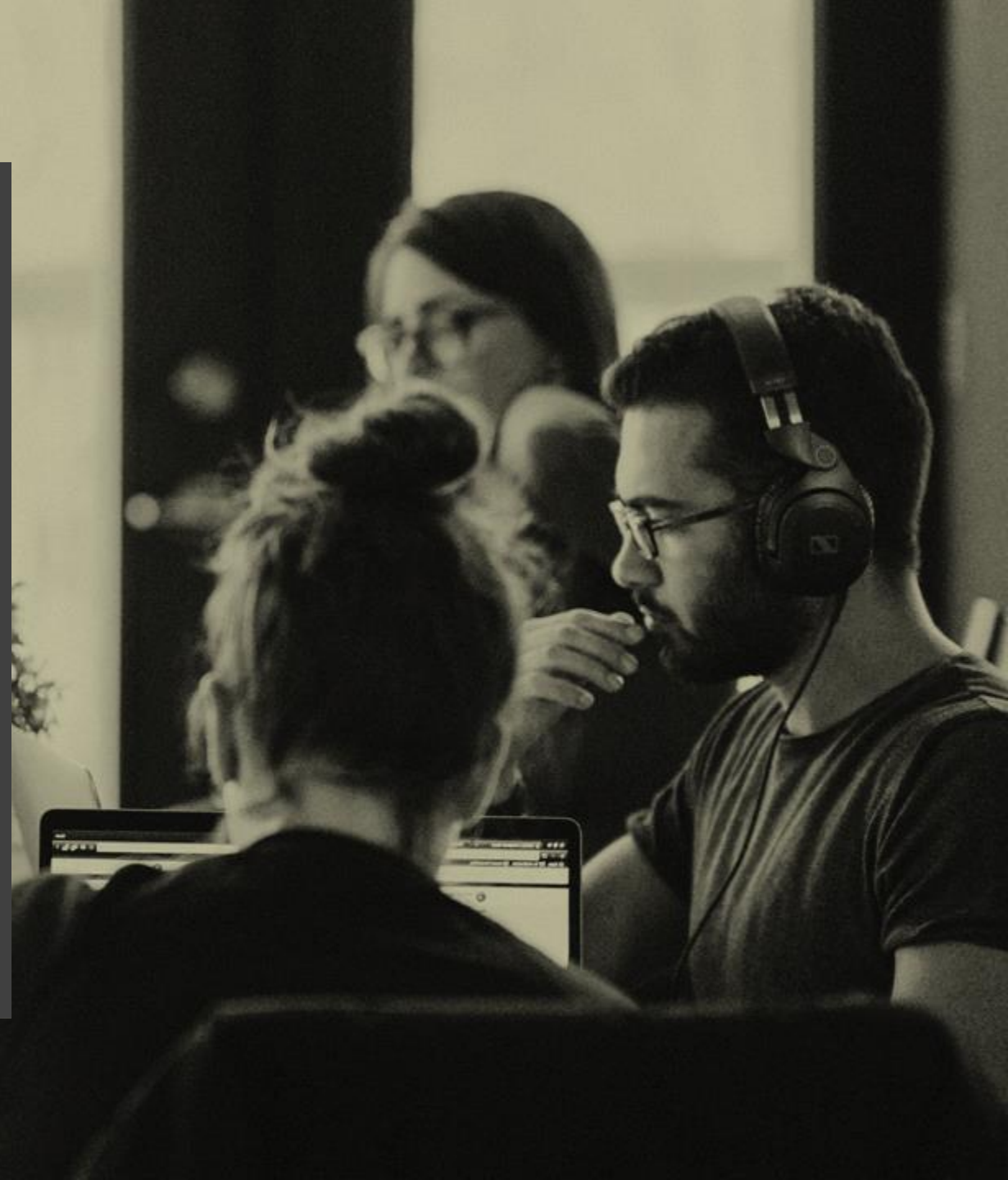
Concluzii

Deși sistemele supradeterminate în majoritatea lor nu sunt compatibile, ele se întâlnesc des în practică, de exemplu în probleme de statistică. Una din căile de rezolvare a sistemelor supradeterminate constă în a determina pseudosoluția x^* care minimizează eroarea medie pentru toate cele m ecuații ale sistemului.



Concluzii

Valorile λ și vectorii proprii joacă un rol fundamental în descrierea matematică a unor categorii foarte largi de procese tehnice, economice, biologice etc. Astfel, proprietăți esențiale (cum este, e.g. stabilitatea) ale modelelor matematice cunoscute sub denumirea de sisteme dinamice se exprimă în raport cu valorile proprii ale unor matrice. În acest context, calculul cât mai eficient λ și mai exact al valorilor λ și vectorilor proprii se impune cu necesitate.



ÎNTREBĂRI!

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Maecenas porttitor congue massa.

