UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI
Facultatea de Calculatoare, Informatică și Microelectronică
Departamentul
INFORMATICĂ ȘI INGINERIA SISTEMELOR

Disciplina
Metode și modele de calcul

Modulul I (Metode numerice)

Programul de licență
CALCULATOARE și REȚELE, TEHNOLOGIA INFORMAȚIEI
(frecvența redusă)

Prof. univ. dr. Vasile MORARU

Anul universitar: 2021-2022

ȘEDINȚA NR. 2

REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

Sumar

- Introducere. Definiții
- Separarea rădăcinilor
- Metoda înjumătățirii intervalului
- Metoda aproximațiilor succesive
- Criterii de oprire în metodele operative
- Metoda lui Newton (tangentei)

Introducere. Definiții

Fie $f(x) = 0$, unde $f(x)$ — este un polinom sau o funcție transcendentă.

Dacă $f(x)$ este un polinom sau în urma unor transformări poate fi adusă la forma polinomială, ecuația se numește ***algebrică***

Exemple: $4x^5 - 12x^4 + x^3 - 2x + 10 = 0$; $\sqrt{x+1} = x^2 - 2 \Rightarrow x^4 - 4x^2 - x + 3 = 0$

O ecuație algebrică în forma generală se va scrie:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0\ ,\ n \geq 1$$

și coeficienții reali $a_0, a_1, \ldots, a_n$; $a_n \neq 0$

Orice ecuație algebrică are exact n rădăcini, fiecare rădăcină multiplă fiind socotită ca atâtea rădăcini confundate cât arată ordinul ei de multiplicitate.

Ecuațiile care nu sunt algebrice se numesc ecuații ***transcendente.***

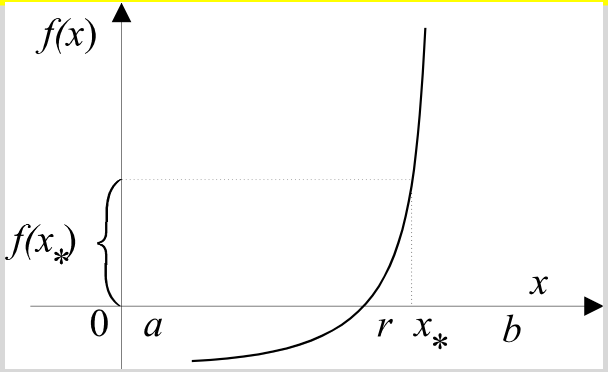
Exemple: $x^2 - \sin x - 1 = 0$; $2^x - \lg(x+1) = 0$

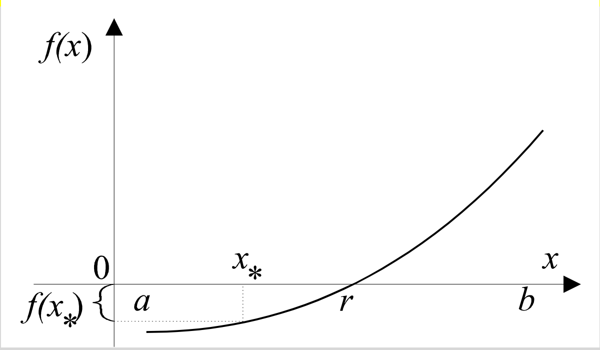
Introducere. Definiții

Prin ***rădăcină aproximativă*** se înțelege o valoare x_* suficient de apropiată de rădăcina exactă r:

$$|x_* - r| < \varepsilon, \text{ sau (și) } |f(x_*)| < \varepsilon_1, \qquad (1)$$

unde $\varepsilon>0$, $\varepsilon_1>0$ și suficient de mic.





Valoarea lui $|x_* - r|$ este foarte mică, dar $|f(x_*)|$ nu este apropiată de zero

$|f(x_*)|$ este un număr foarte mic, în timp ce $|x_* - r|$ este un număr mare

Aceste două moduri de definire a rădăcinii aproximative nu coincid. Ecuația $f(x)=0$ este echivalentă ecuației $C \times f(x) = 0$ oricare ar fi constanta $C \neq 0$

În general ar fi bine să fie satisfăcute ambele condiții (1).

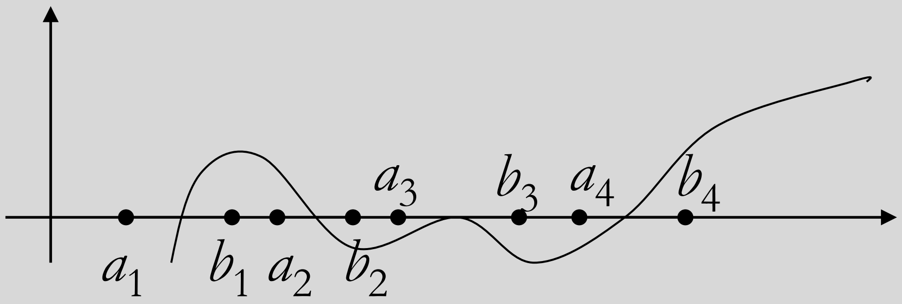
Separarea rădăcinilor reale

Rezolvarea ecuației $f(x)=0$ (algebrică sau transcendentă) implică parcurgerea a două etape importante:

Etapa 1. ***Separarea rădăcinilor*** care constă în determinarea unui interval $[a, b]$, în care este situată o rădăcină reală a ecuației

(a_1, b_1) (a_2, b_2)

(a_3, b_3) (a_4, b_4)



Etapa 2. ***Calculul aproximativ*** al fiecărei rădăcini și evaluarea erorii care s-a comis, considerând că separarea deja separarea rădăcinilor

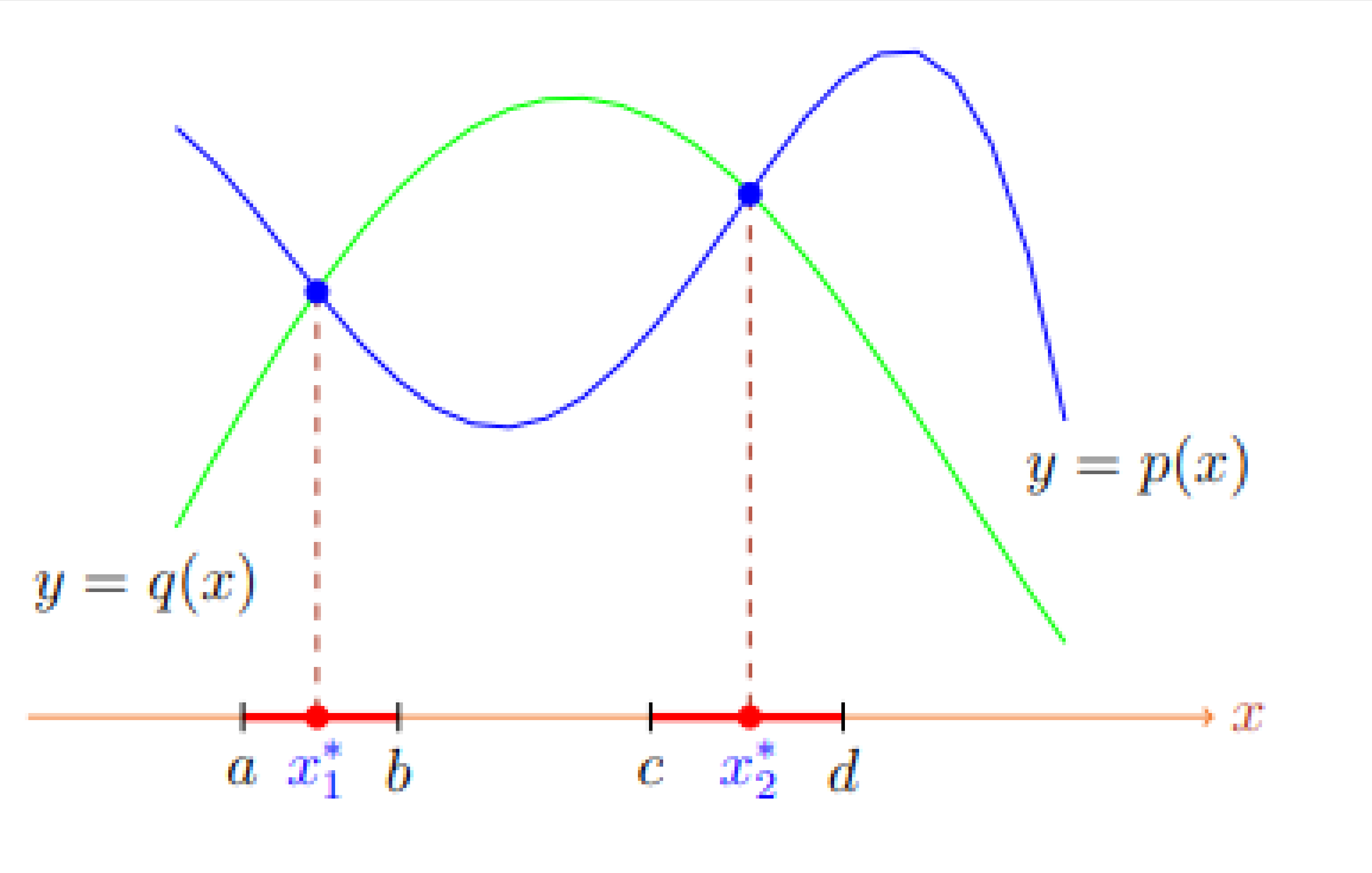
Plecând de la un x_0 dat, se construiește un şir $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$

$$x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots \to x_n$$

Dacă $|x_{n-1} - x_n| < \varepsilon$, atunci x_n – soluție aproximativă cu exactitatea $\varepsilon>0$

Metoda grafică de separare a rădăcinilor

$q(x) = p(x)$



Metoda grafică de separare a rădăcinilor

Ecuația $f(x) = 0$ o reducem la ecuația:

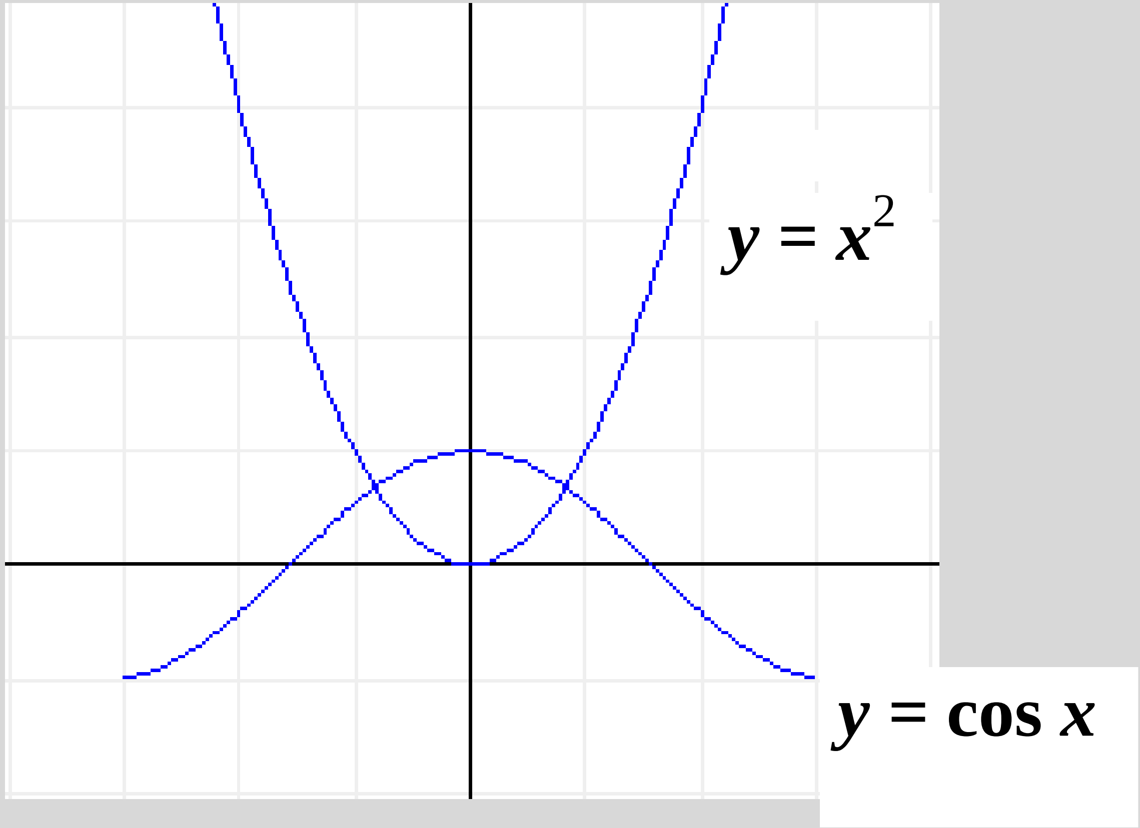
$$g(x) = \varphi(x).$$

Rădăcinile ecuații sunt abscisele punctelor de intersecție ale curbelor y=g(x) și y= φ(x)

Exemplu 1. $cos(x)=x^2$

Ecuația are două rădăcini reale situate:
pe intervalele
$[-\pi/2, 0]$ și $[0, \pi/2]$.

Dacă în descompunerea funcției în factori apare factorul $(x-r)^k$ și nu apare o putere mai mare a lui $(x-r)$, se spune că numărul r este o ***rădăcină multiplă de ordinul k.***



Metoda grafică de separare a rădăcinilor

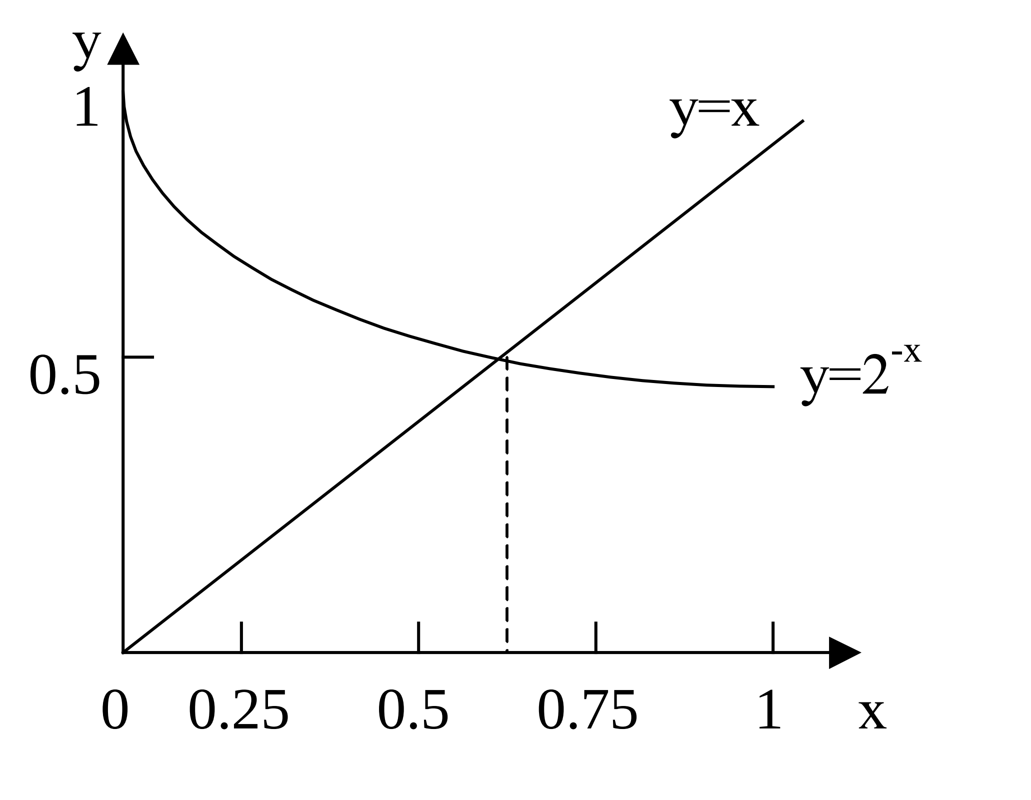
$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \qquad g(x) = \varphi(x).$

Exemplu 2.

$$f(x) = 1 - x \times 2^{x} = 0$$

$$x = 2^{-x}$$

$r \in (0.5\,; 0.75)$



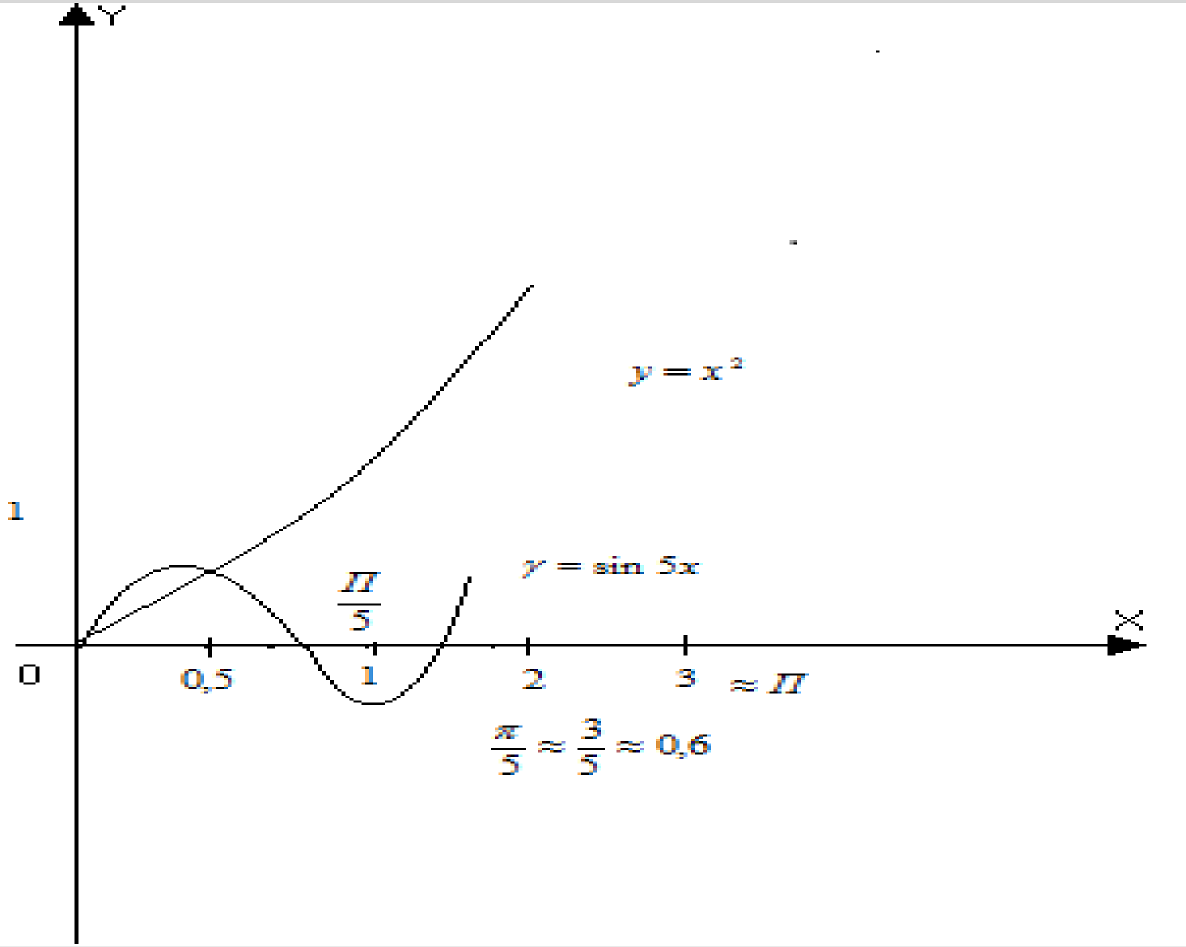
Metoda grafică de separare a rădăcinilor

Exemplu 3.

x^2 - sin(5 x)=0

$x^2 = \sin(5\,x)$

$r \in [0{,}5; 0{,}6]$

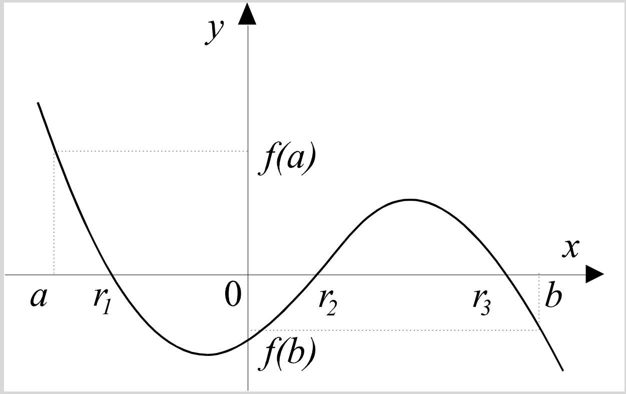


Metoda analitică de separare a rădăcinilor

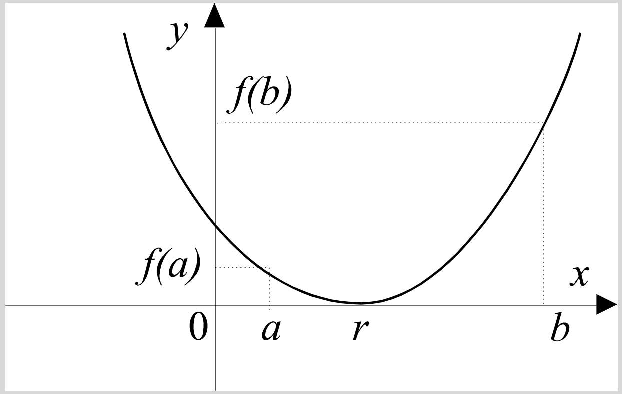
O funcție continuă nu trece de la o valoare la alta fără să treacă prin toate valorile intermediare.

Dacă la capetele unui interval închis [*a*, *b*]) valorile funcției *f*(*a*) și *f*(*b*) sunt de semne diferite: *f*(*a*)*f*(*b*)<0), atunci există între *a* și *b* cel puțin un punct *r*, astfel încât avem *f*(*r*)=0.

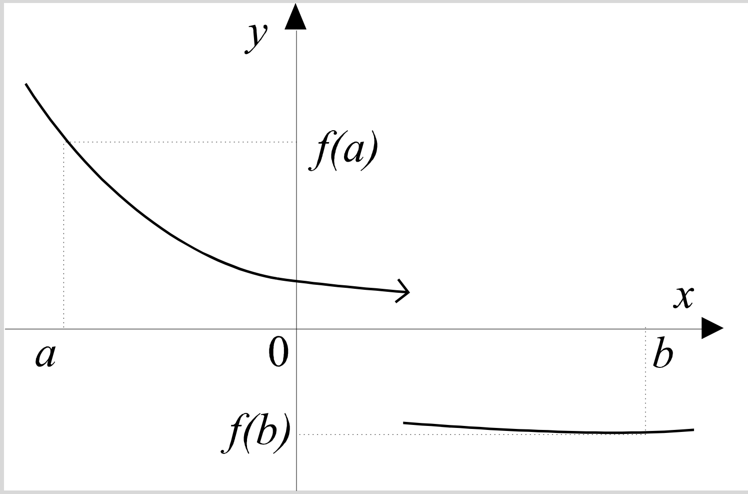
Condiția $f(a)f(b)<0$ arată că ecuația $f(x)=0$ are un număr impar de rădăcini (cel puțin una) pe intervalul $[a, b]$.



Dacă $f(a)$ și $f(b)$ au același semn, aceasta încă nu înseamnă că ecuația $f(x)=0$ nu are pe intervalul $[a, b]$ o rădăcină reală:



Condiția de continuitate a funcției *f*(*x*) este esențială!



Metoda analitică

Pentru separarea soluțiilor se va folosi următoarea teoremă din analiza matematică:

Teoremă. Dacă funcţia $f(x)$ continuă pe segmentul $[a, b]$ primeşte la extremităţile lui valori de semn diferit $f(a)\times f(b)<0$ atunci pe acest segment există cel puțin un punct ξ, pentru care expresia $f(\xi) = 0$ este adevărată. Dacă pe acest segment există $f'(x)$,continuă, care are un semn constant, atunci soluţia ecuaţiei pe segmentul $[a,b]$ este unică. (*fără demonstrație*)

Dacă soluțiile ecuaţiei $f'(x)=0$ pot fi uşor calculate, atunci procesul de separare a soluțiilor se reduce la determinarea semnelor funcţiei în extremităţile segmentului $[a, b]$ şi în punctele în care derivata funcţiei este 0. Segmentele la extremităţile cărora funcţia va avea valori de semn opus vor conține câte o soluție a ecuației inițiale.

Metoda analitică

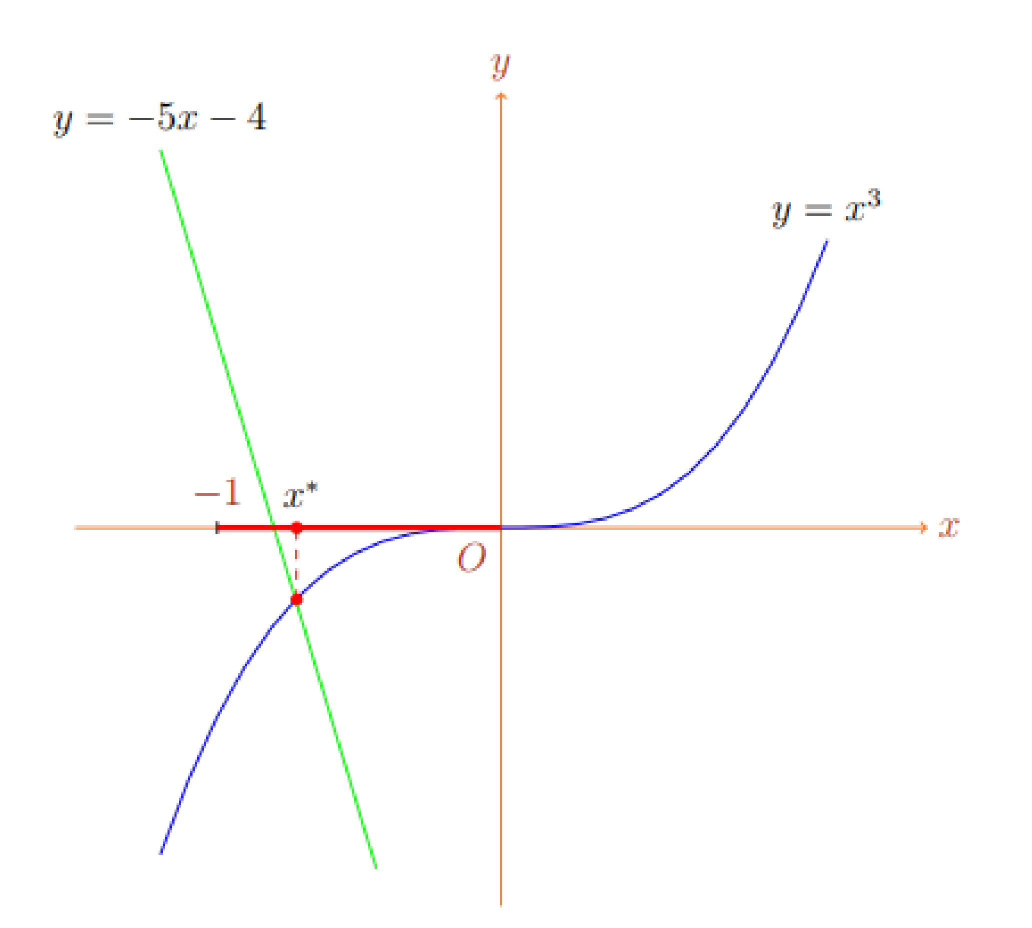
Exemplu

$$f(x) = x^3 + 5x + 4 = 0$$

$$f(-1) \cdot f(0) = -2 \cdot 4 = -8 < 0.$$
$$f'(x) = 3x^2 + 5 > 0.$$

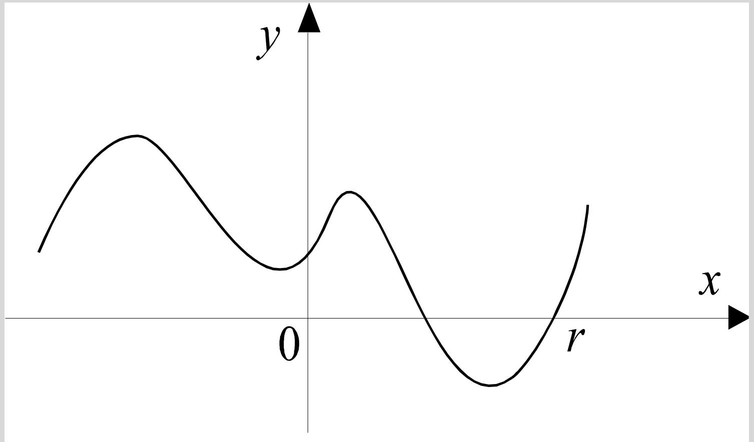
$$r \in [-1; 0]$$

$$x^3 = -5x - 4$$
$$y = x^3$$
$$y = -5x - 4$$

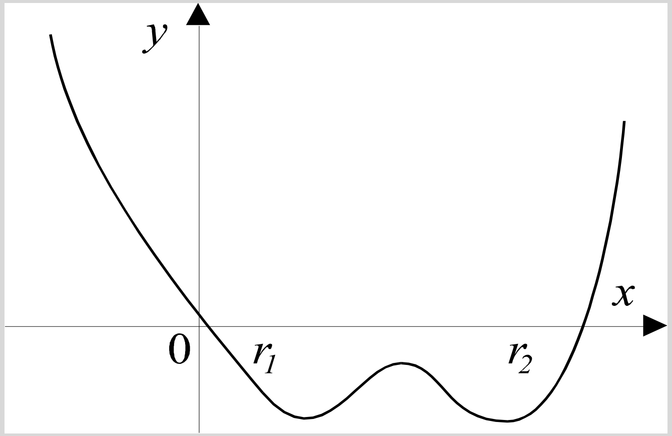


Metoda șirului lui Rolle de separare a rădăcinilor

Între două rădăcini reale consecutive ale derivatei funcției $f(x)$ există cel mult o rădăcină reală a ecuației $f(x)=0$:



Între două rădăcini consecutive ale ecuației $f(x)=0$ există cel puțin o rădăcină a ecuației $f'(x)=0$



Fie $a<x_1<x_2<\ldots<x_k<b$ rădăcinile ecuației $f'(x)=0$, așezate în ordine crescătoare. Șirul

$$f(a),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_k),\ f(b)$$

se numește ***șirul lui Rolle.***

Ecuația $f(x)=0$ are atâtea rădăcini reale, câte variații de semn prezintă șirul lui Rolle:

x	a	x_1	x_2	…	x_k	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_k)$	$f(b)$

Metoda șirului lui Rolle de separare a rădăcinilor

Exemplu.

Fie ecuația algebrică:

$$f(x)=x^4-x^3-2x^2+3x-3=0.$$

Derivata

$$f'(x)=4x^3-3x^2-4x+3=4x(x^2-1)-3(x^2-1)=(x^2-1)(4x-3)$$

se anulează pentru

$$x_1=-1,\ x_2=3/4,\ x_3=1$$

Șirul lui Rolle este următorul:

x	-2	-1	$3/4$	1	2
$f(x)$	7	–6	–1.98	–2	3

Ecuația are două rădăcini reale: $r_1 \in (-2,-1)$ și $r_2 \in (1,2)$.
Celelalte două rădăcini sunt complexe.

Metoda înjumătățirii intervalului

Proprietate importantă:

Dacă funcția $f(x)$ este continuă în intervalul $[a,b]$ și

sign of $f(a) \neq$ sign of $f(b)$, atunci

există o valoare $r \in [a,b]$ astfel încât: $f(r) = 0$ adică, există o rădăcină reală r în intervalul $[a,b]$

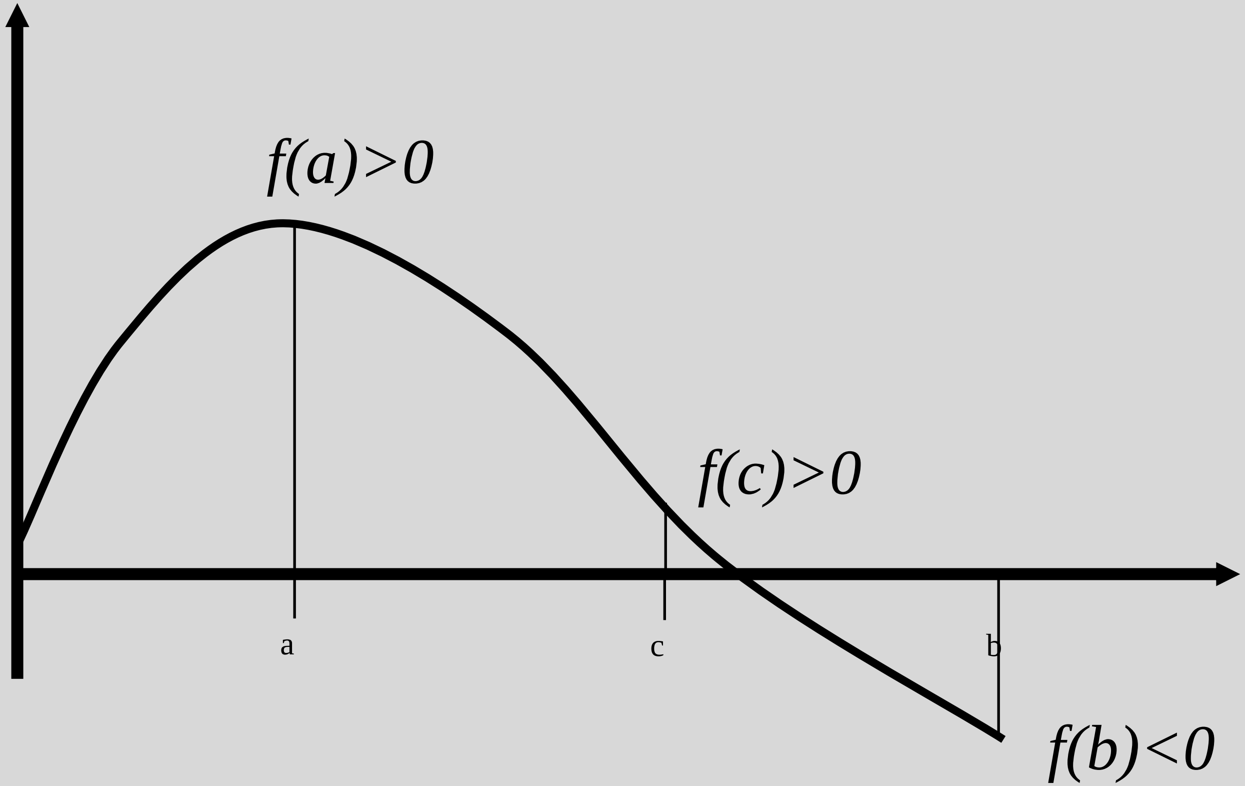
Pe baza faptului că funcția își schimbă semnul pe măsură ce trece prin rădăcină avem

$$f(a) \times f(b) < 0$$

Evaluăm punctul din mijloc $c=(a+b)/2$ și reducem la jumătate intervalul.

Metoda înjumătățirii intervalului

c=(*a*+*b*)/2



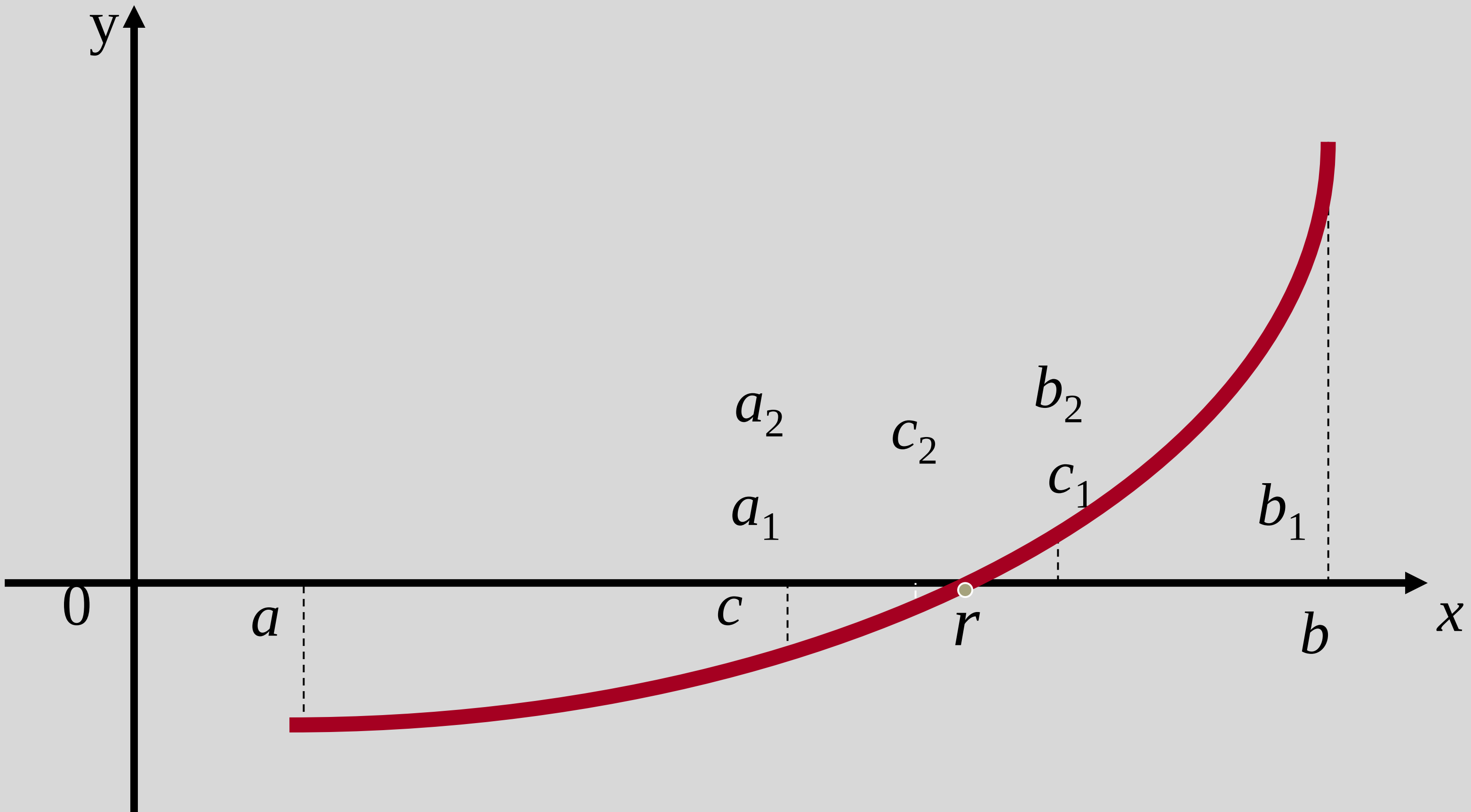
Metoda înjumătățirii intervalului constă în construirea recurentă a unui șir de subintervale $[a_k, b_k]$ și a unui șir de puncte $c_k=(a_k+b_k)/2$

$b\text{-}a>\varepsilon$

$c = (a + b) / 2$

Se recomandă
$c=a+(b–a)/2$

$f(a_k)f(b_k)<0$



$$b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b-a)$$

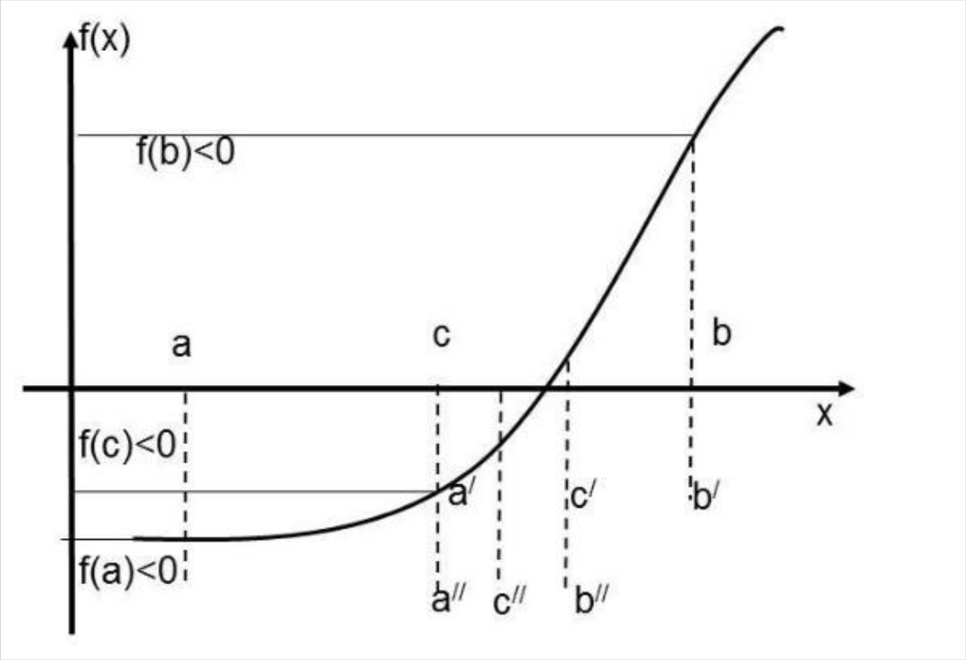
$$|c_k - r| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} < \varepsilon$$

Metoda înjumătățirii intervalului

Algoritmul:

1. $c := (a+b)/2$ mijlocul intervalului
2. Determinăm $f(a)$ și $f(c)$
3. Dacă $f(a) \times f(c) < 0$ atunci $b := c$ altfel $a := c$
4. Dacă $\frac{|b-a|}{2} > \varepsilon$ se trece la pasul 1

c- rădăcina



Se recomandă *(de ce?)*
$c = a + (b-a)/2$

Metoda aproximațiilor succesive

Fie o ecuație algebrică sau transcendentă care admite o singură rădăcină reală în intervalul [*a*, *b*].

Ecuația $f(x)=0$ o punem sub forma echivalentă: $x=\varphi(x)$

Exemple .

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

$$\varphi(x) = x^2 - 2$$

sau

$$\varphi(x) = \sqrt{x+2}$$

sau

$$\varphi(x) = 1 + \frac{2}{x}$$

$$\vdots$$

$$f(x) = x^3 - 2x - 9$$

$$x = x^3 - x - 9$$

$$x = \sqrt[3]{2x+9}$$

$$x = \frac{2x+9}{x^2}$$

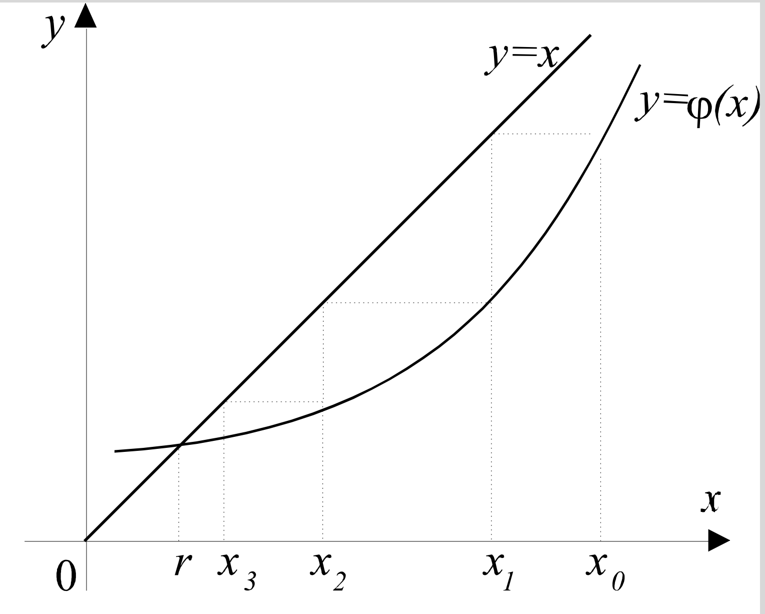
$$x = \frac{9}{x^2 - 2}$$

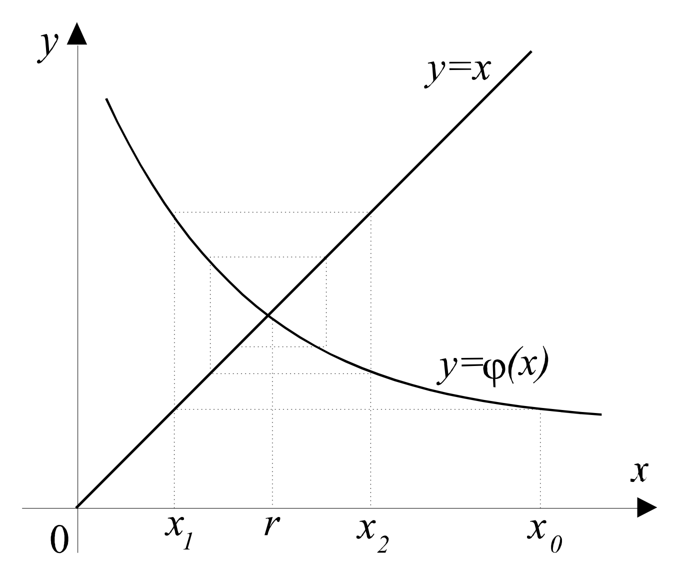
Metoda aproximațiilor succesive

Plecând de la o valoare inițială arbitrară $x_0 \in [a, b]$, generăm șirul x_k conform regulii:

$$x_k = \varphi(x_{k-1}),\ k = 1, 2, \ldots$$

Modul cum șirul aproximațiilor succesive $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$ conduce spre soluția exactă este ilustrat mai jos (în funcție de forma curbei $y = \varphi(x)$):





Condiție suficientă de convergență: $\left|\varphi'(x)\right| \leq \alpha < 1$

Metoda aproximațiilor succesive

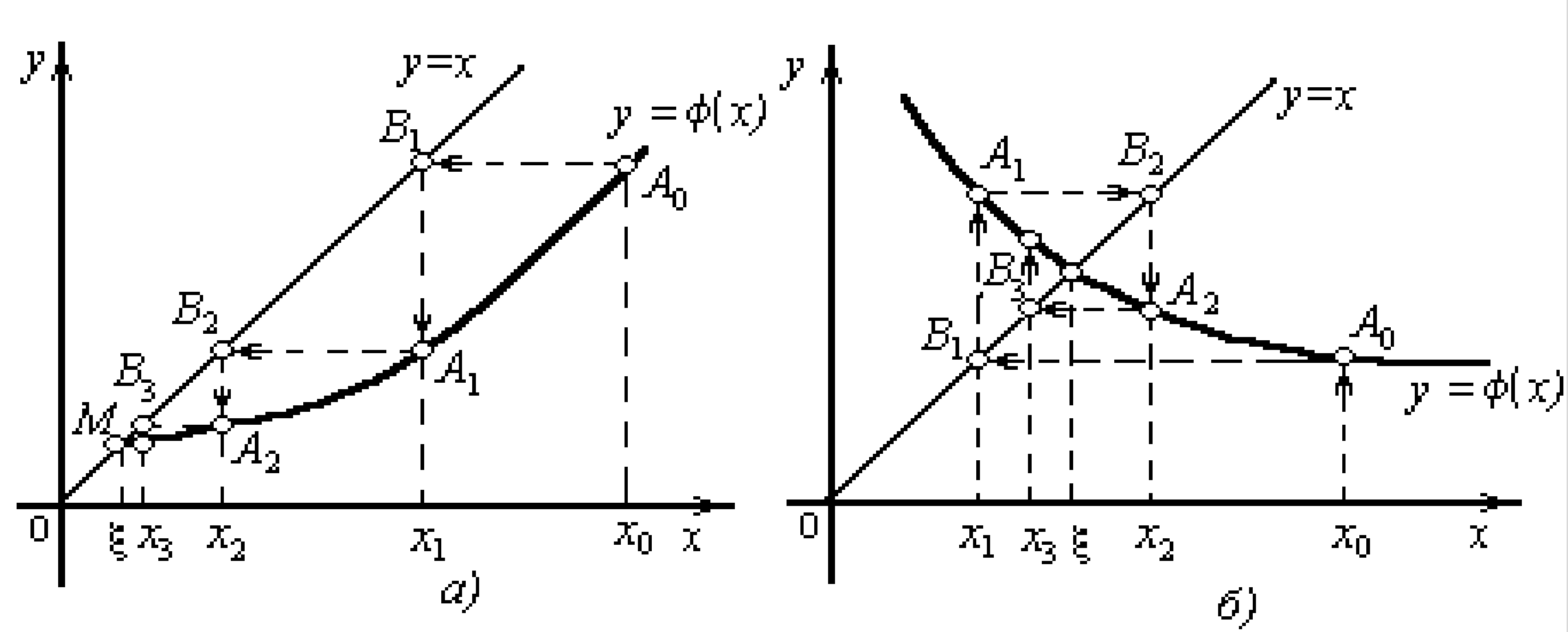
Plecând de la o valoare inițială arbitrară $x_0 \in [a, b]$, generăm șirul x_k conform regulii:

$$x_k = \varphi(x_{k-1}),\ k = 1, 2, \ldots$$

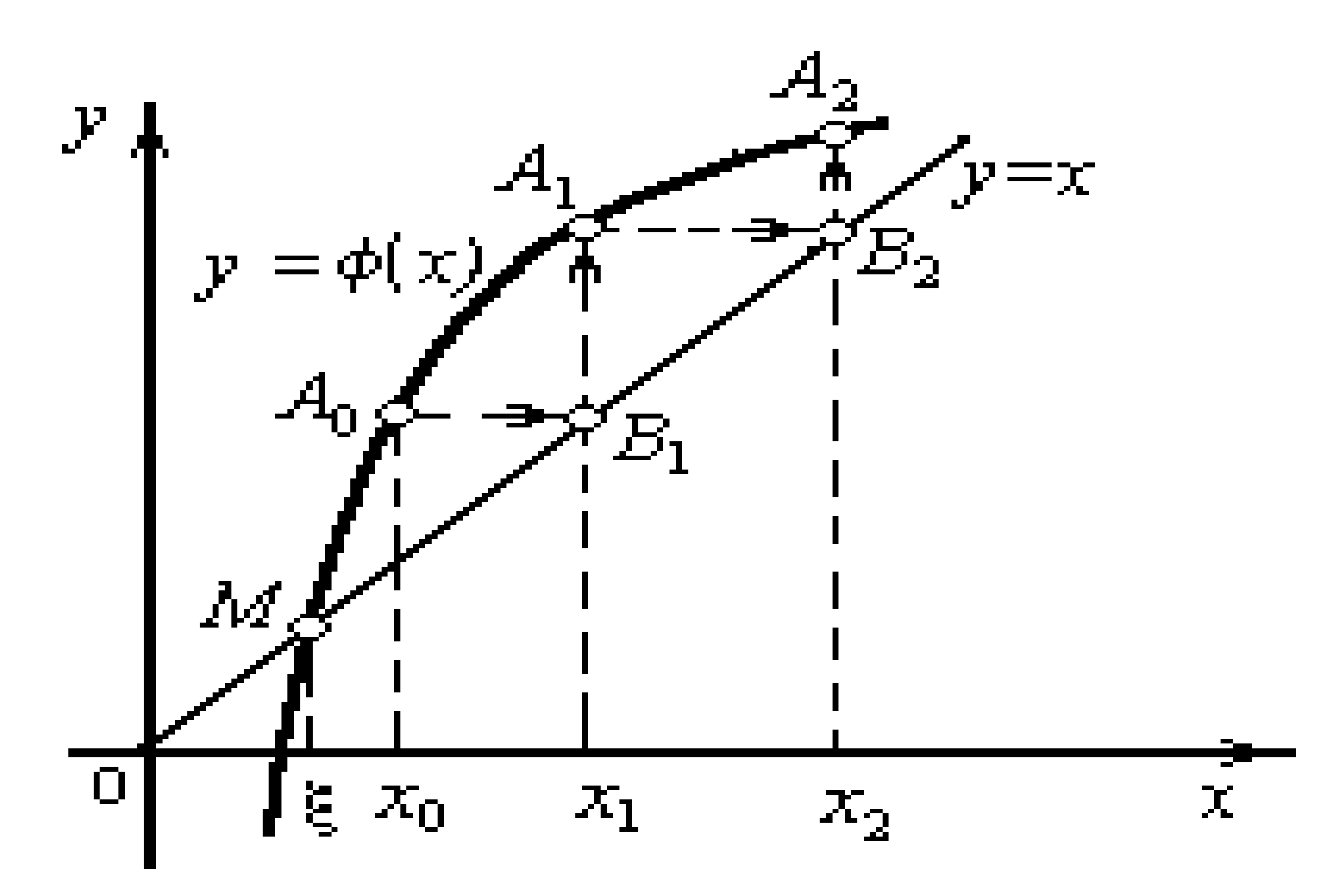
Modul cum șirul aproximațiilor succesive $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$ conduce spre soluția exactă este ilustrat mai jos (în funcție de forma curbei $y = \varphi(x)$):

Condiție suficientă de convergență:

$$|\varphi'(x)| \leq \alpha < 1$$



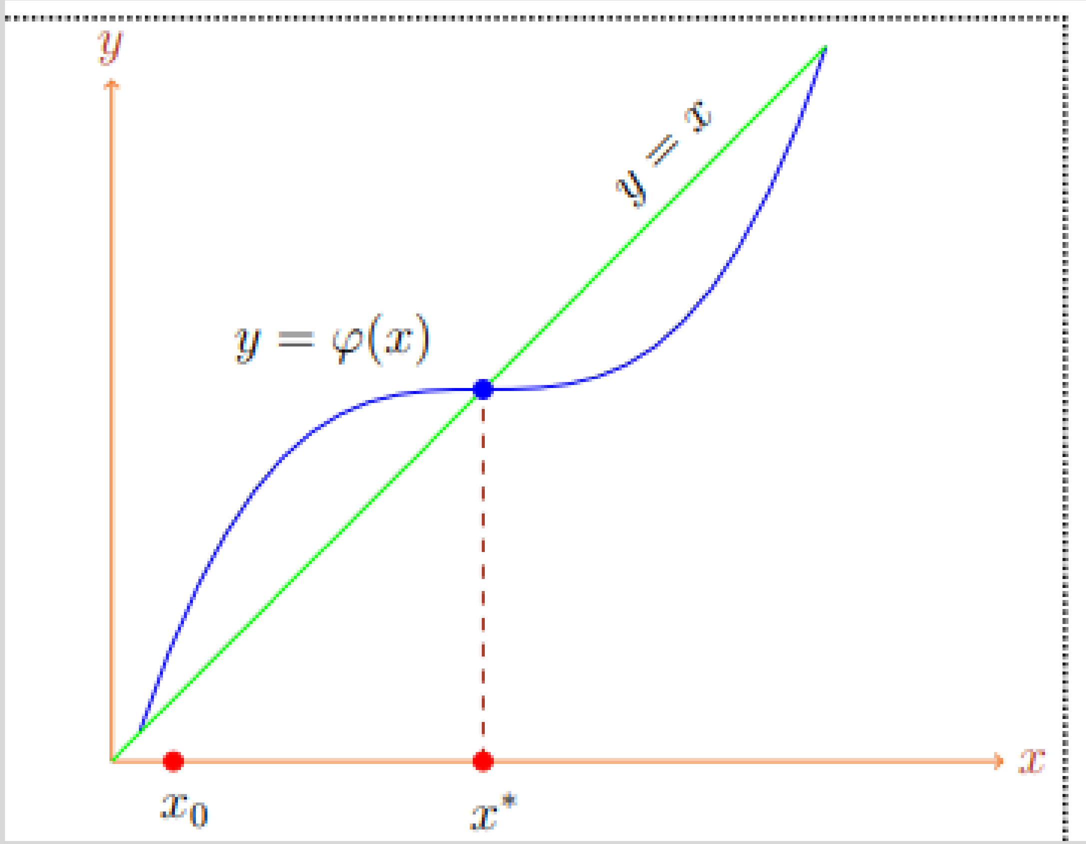
Metoda aproximațiilor succesive

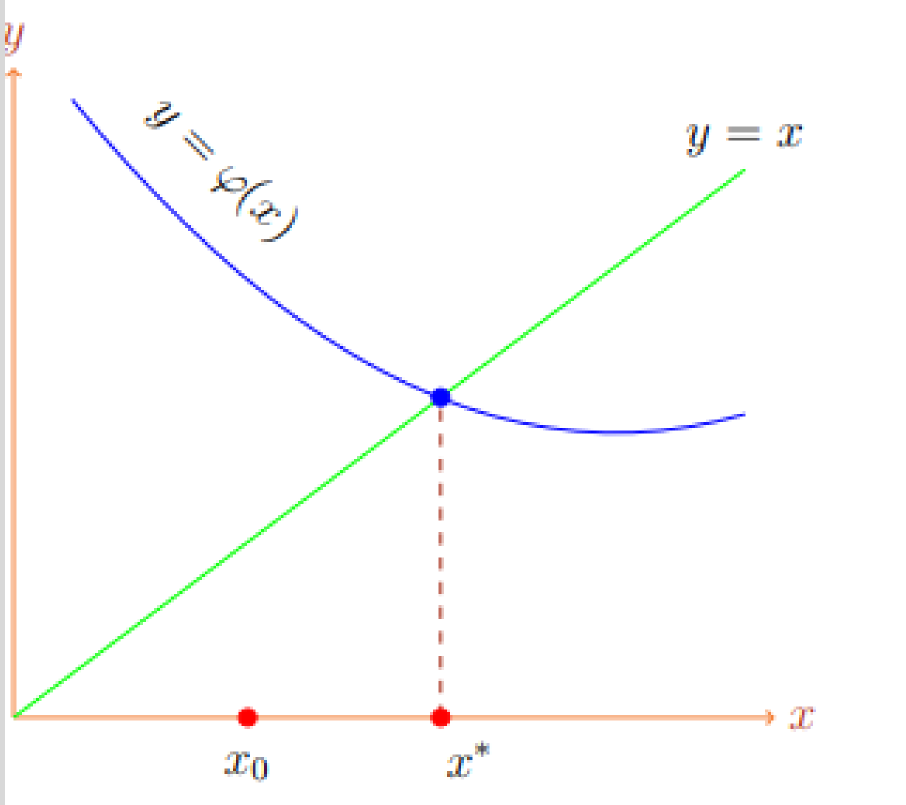


Șirul de iterare poate fi divergent

$$|\varphi'(x)| > 1$$

Metoda aproximațiilor succesive





Metoda aproximațiilor succesive

Exemplu.

$$f(x) \equiv x^3 - x - 1 = 0 \qquad r \in (1, 2)$$

$$x = x^3 - 1 \qquad \varphi = x^3 - 1$$

$$\varphi'(x) = 3x^2 \qquad \varphi'(x) \geq 3 \text{, pentru } 1 \leq x \leq 2$$

$$x = \sqrt[3]{x + 1}, \qquad \varphi(x) = \sqrt[3]{x + 1} \quad \varphi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$0 < \varphi'(x) < \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} < \frac{1}{4}$$

Criterii de oprire în metodele iterative

Fie funcția $f(x)$ continuă și derivabilă pe intervalul $[a, b]$ și fie $m=\min|f'(x)|>0$, $x\in(a, b)$. Avem

$$|x_k - r| \leq \frac{|f(x_k)|}{m}$$

Dacă $|f'(r)|$ este mic, atunci $|f(x_k)|/m$ este mare și perturbații slabe în x_k pot produce perturbații mari în rădăcină; în acest caz se spune că problema determinării lui r este ***rău condiționată***.

Dacă dorim să determinăm rădăcina r cu eroarea prescrisă $\varepsilon>0$ am putea opri iterațiile de îndată ce

$$|f(x_k)|<\varepsilon m,$$

ceea ce presupune cunoașterea majorantei m a derivatei $f'(x)$.

Criterii de oprire în metodele iterative

În practică, putem folosi următorul criteriu de stopare. Fie

$$|f(x_{k+1})| < \varepsilon_1$$

unde $\varepsilon_1 > 0$ și este suficient de mic; de exemplu $\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon_M}$

Putem accepta x_{k+1} ca rădăcină aproximativă, dacă

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_2$$

Aici $\varepsilon_2 > 0$ și se alege astfel încât $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$

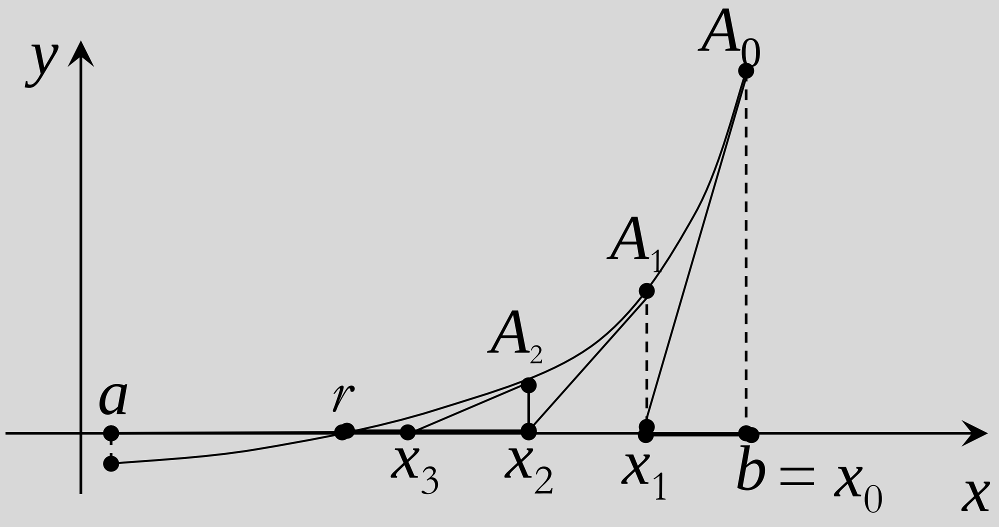
Cel mai des este utilizat în calitate de criteriu de oprire a algoritmului este cel care verifică doar inegalitatea $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_2$ cu $\varepsilon_2 > 0$ și suficient de mic

Metoda lui Newton (tangentei)

Fie ecuația algebrică sau transcendentă $f(x)=0$ care admite o singură rădăcină reală r în intervalul $[a,b]$
Să presupunem în plus că derivatele $f'(x)$ şi $f''(x)$ păstrează un semn constant pe intervalul $[a, b]$.

Ecuația tangentei în punctul $A_0(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\times(x - x_0)$$



Luând $y = 0$, $x = x_1$, obținem

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Procedeul se va repeta în mod asemănător. Se obține metoda tangentelor definită de următoarea formulă de iterare:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$k=0, 1, 2, \ldots$

Eroarea metodei lui Newton

Eroarea este estimată de relația :

$$|x_{k+1} - r| \le \frac{M_2}{2m} \cdot |x_k - r|^2$$

unde

$$M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)| \qquad m = \min_{[a,b]} |f'(x)|$$

În cazul rădăcinilor simple ($f\,'(r) \neq 0$) metoda lui Newton are gradul doi de convergență ***(convergența pătratică)***.

Metoda lui Newton este un caz particular al metodei aproximațiilor succesive cu funcția:

$$\varphi(x) = x - f(x)/f\,'(x)$$

Eroarea metodei lui Newton

Dacă r este o rădăcină multiplă, atunci convergența șirului $\{x_k\}$ este liniară

Exemplu. Fie dată ecuația $x^2=0$ cu rădăcina dublă $r=0$. Potrivit metodei lui Newton putem scrie:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2}{2x_k} = \frac{1}{2} x_k .$$

$$\left| x_{k+1} - r \right| = \frac{1}{2} \left| x_k - r \right|$$

Dacă r este o rădăcină multiplă de gradul p, adică

$$f'(r) = f''(r) = \ldots = f^{(p-1)}(r) = 0, \quad f^{(p)}(r) \neq 0,$$

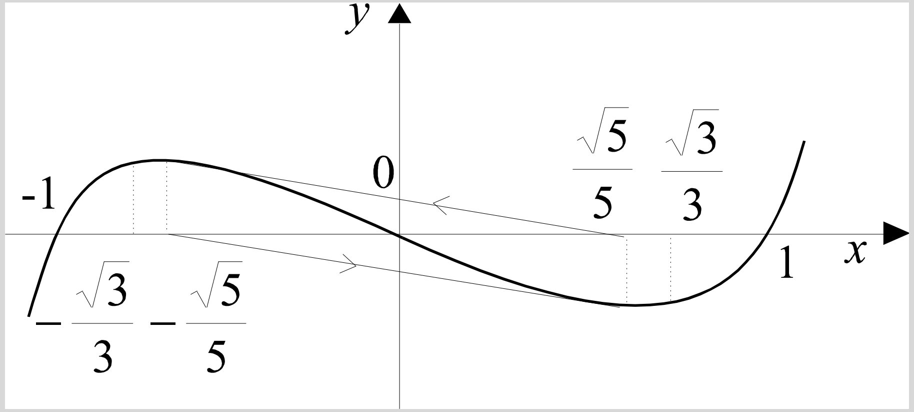
se recomandă de a efectua calculele conform formulei de iterare:

$$x_{k+1} = x_k - p \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Probleme în alegerea punctului de start

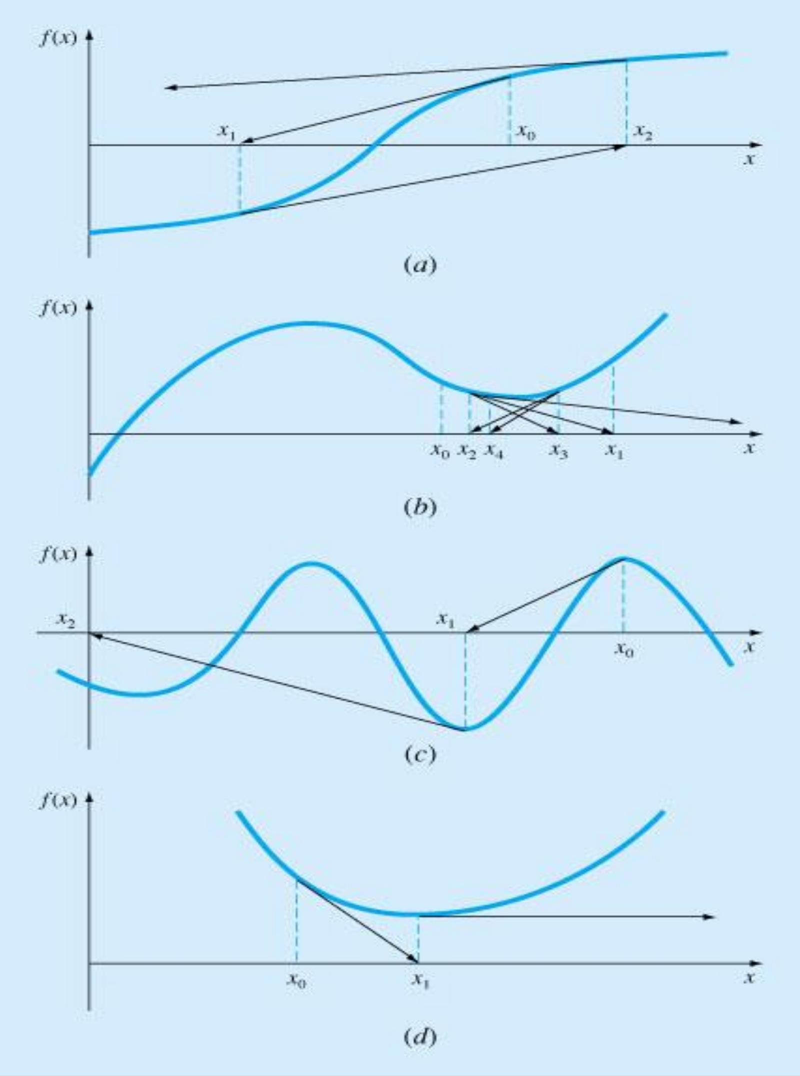
O dificultate în aplicarea metodei lui Newton (și în general a unei metode iterative) o reprezintă alegerea aproximației inițiale x_0.

Exemplu. În cazul ecuației $x^3 - x = 0$ zona de convergență a rădăcinii $r=0$ este intervalul deschis $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

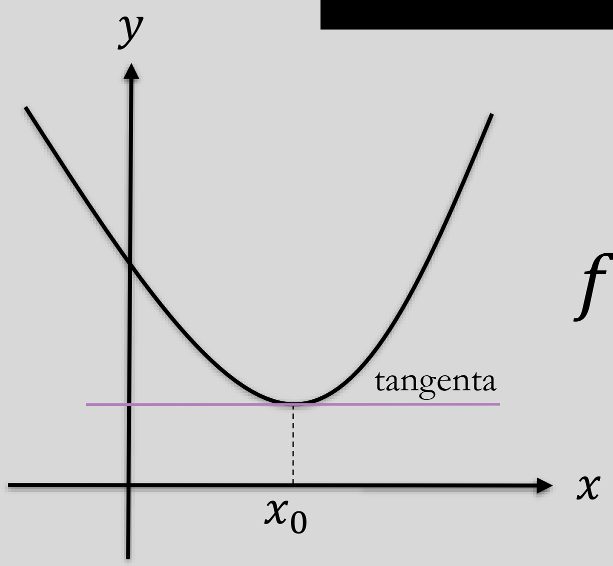


Pentru $x_0 = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ vom avea $x_1 = -x_0$, $x_2 = -x_1 = x_0$, $x_3 = -x_2 = -x_0$, … , un șir care "ciclează". Dacă $x_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, atunci $f'(x_0) = 0$ și tangenta la curba dată în aceste puncte este paralelă cu axa Ox. Alegând aproximația inițială $x_0 < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ șirul iterativ $\{x_k\}$ tinde către rădăcina $r = -1$. Dacă alegem $x_0 > \frac{\sqrt{3}}{3}$ se asigură convergența către rădăcina $r = 1$.

Probleme în alegerea punctului de start

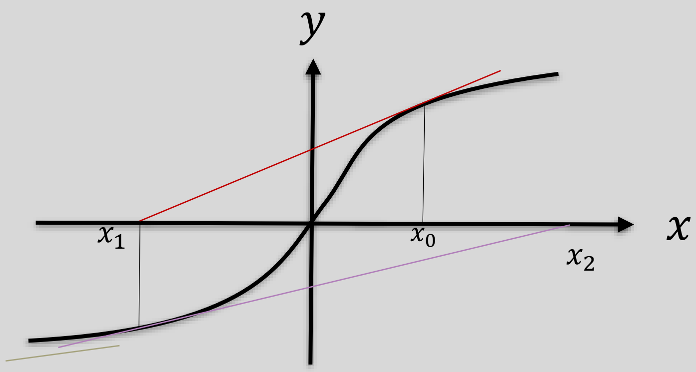


Probleme în alegerea punctului de start



$$f'(x_0) = 0,$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

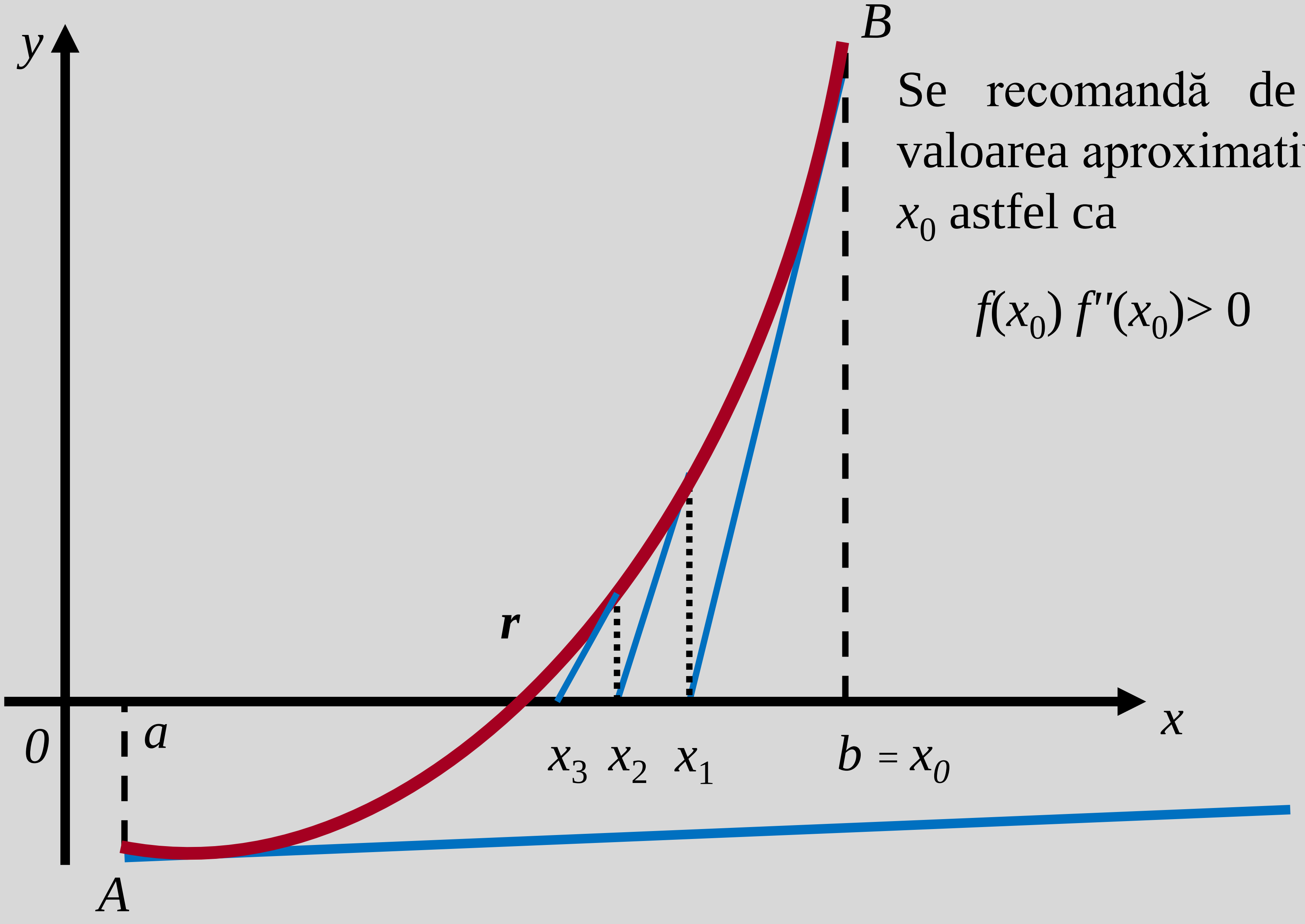


$$y = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$f(b) > 0$

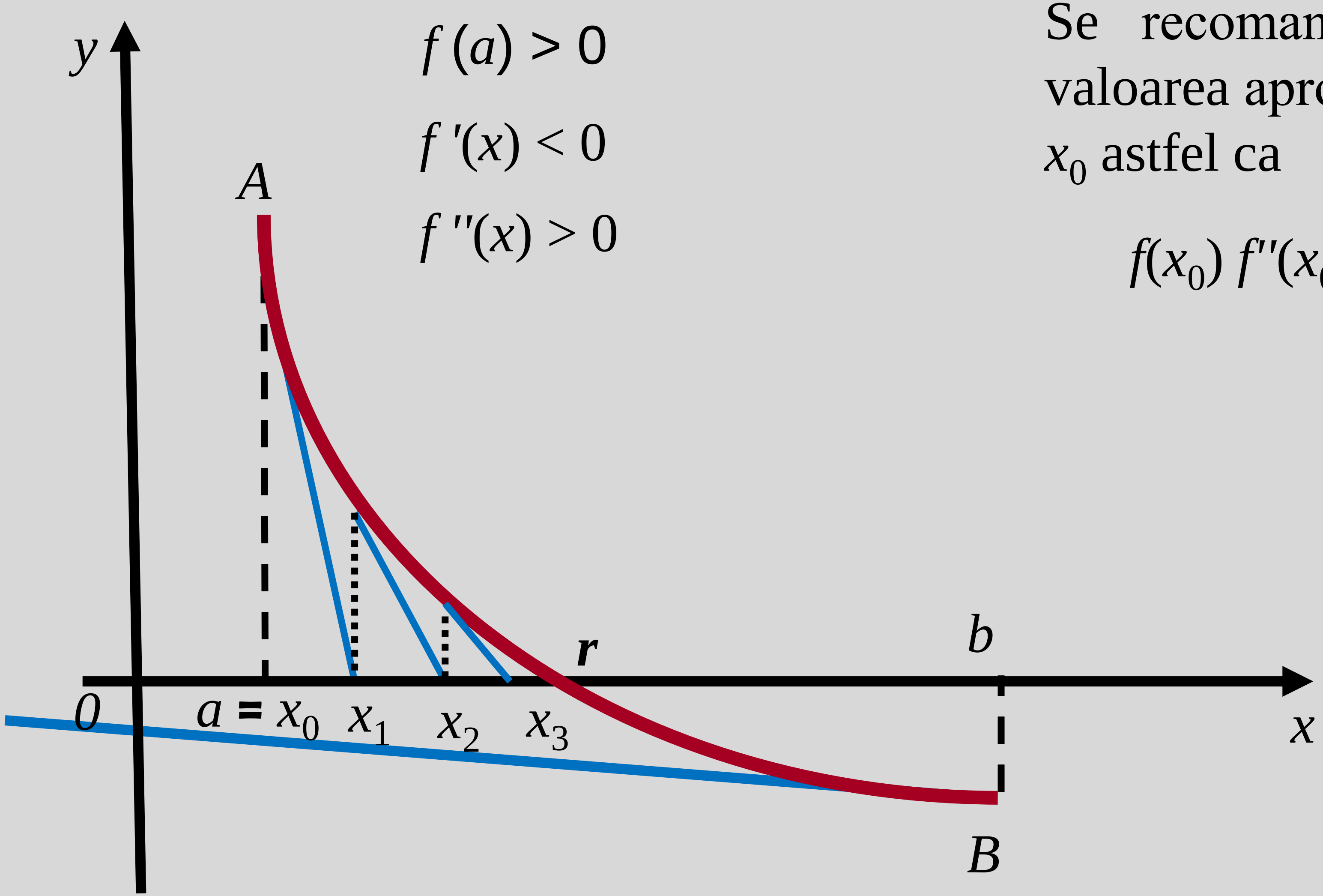
$f'(x) > 0$

$f''(x) > 0$



Se recomandă de a alege valoarea aproximativă inițială x_0 astfel ca

$$f(x_0)\, f''(x_0) > 0$$



Se recomandă de a alege valoarea aproximativă inițială x_0 astfel ca

$$f(x_0)\, f''(x_0) > 0$$

Avantajul metodei Newton

***Avantajul metodei Newton* -** convergența sa rapidă. Dacă este îndeplinită condiția: $f''(x)$ (a doua derivată) păstrează semnul și în același timp $f(x)$ și $f''(x)$ au același semn, atunci procesul converge astfel încât la fiecare iterație numărul cifrelor semnificative corecte se dublează.

$$\text{Dacă } |x_k - r| \le 10^{-k} \ \ atunci\ ,$$

$$|x_{k+1} - r| \le C \times 10^{-2k}$$

$$0 \le C < \infty$$

Avantajul metodei Newton

Exemplu. Calculul rădăcinii pătrate

$$\sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \ .$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{{x_k}^2 - 2}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right)$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1.5000000000$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} \approx 1.4166666667$$

$$\sqrt{2} = \mathbf{1.4142135623730950488016887242097}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408} \approx 1.414215686$$

$$x_4 = 1.4142135623746$$

$$x_5 = 1.4142135623730950488016896$$

$$x_6 = 1.4142135623730950488016887242097$$

Metoda secantei

Metoda secantei se deduce din metoda lui Newton, înlocuind derivata

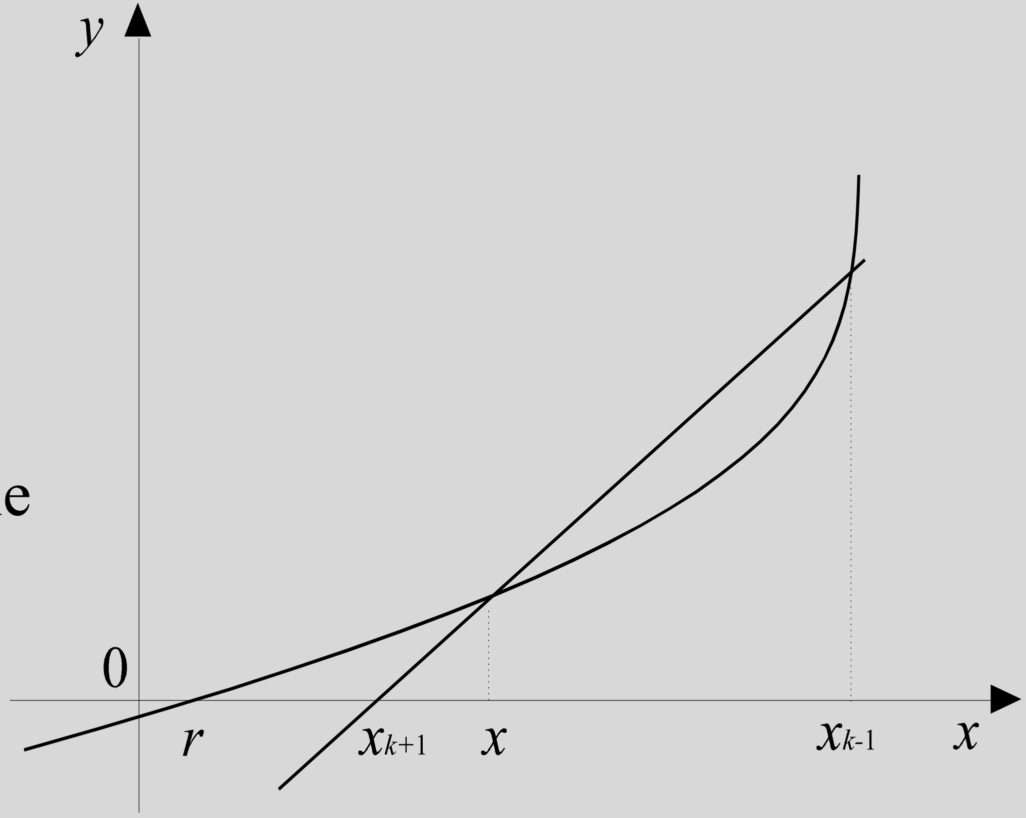
$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \qquad k=1, 2, \ldots$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Valoarea x_{k+1} este abscisa punctului de intersecție dintre secanta

$$\frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} = \frac{y - f(x_k)}{f(x_{k-1}) - f(x_k)}$$

care trece prin punctele $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ şi $(x_k, f(x_k))$ şi Ox



Metoda secantei

Eroarea este estimată de relația :

$$|x_{k+1}-r| \leq C\,|x_k-r|^{\beta}$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \approx 1.628037\ldots,$$

În metoda lui Newton β=2

Metoda lui Newton reclamă necesitatea evaluării funcției și a derivatei sale, iar metoda secantei necesită numai calculul funcției.

Un criteriu de oprire a algoritmului este verificarea inegalităților:

$$|f(x_{k+1})| < \varepsilon_1, \quad |x_{k+1}-x_k| < \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 > 0.$$

Pentru startul iterațiilor în metoda secantei sunt necesare două aproximații inițiale x_0 și x_1

Concluzii

Rezolvarea numerică a unei probleme nu este o chestiune simplă, adică nu este suficient să facem niște calcule pentru a ajunge la soluția problemei.

Mai este necesar de a studia și de a face aprecieri, privind condiționarea problemei și stabilitatea numerică a algoritmilor de calcul..

ÎNTREBĂRI !

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Maecenas porttitor congue massa.