UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Mecanica

MIȘCAREA COMPUSĂ A PUNCTULUI.

Introducere

- **Noțiuni generale, definiții.**
- **Legătura dintre derivata totală și locală a unui vector definit în sistemul mobil de coordonate.**
- **Teorema compunerii vitezelor.**
- **Teorema compunerii accelerațiilor (teorema lui Coriolis).**
- **Accelerația lui Coriolis.**

Introducere

- **La studierea mișcării punctului și rigidului, anterior mișcarea a fost considerată în cadrul unui singur sistem de referință (sistem de coordonate)**.

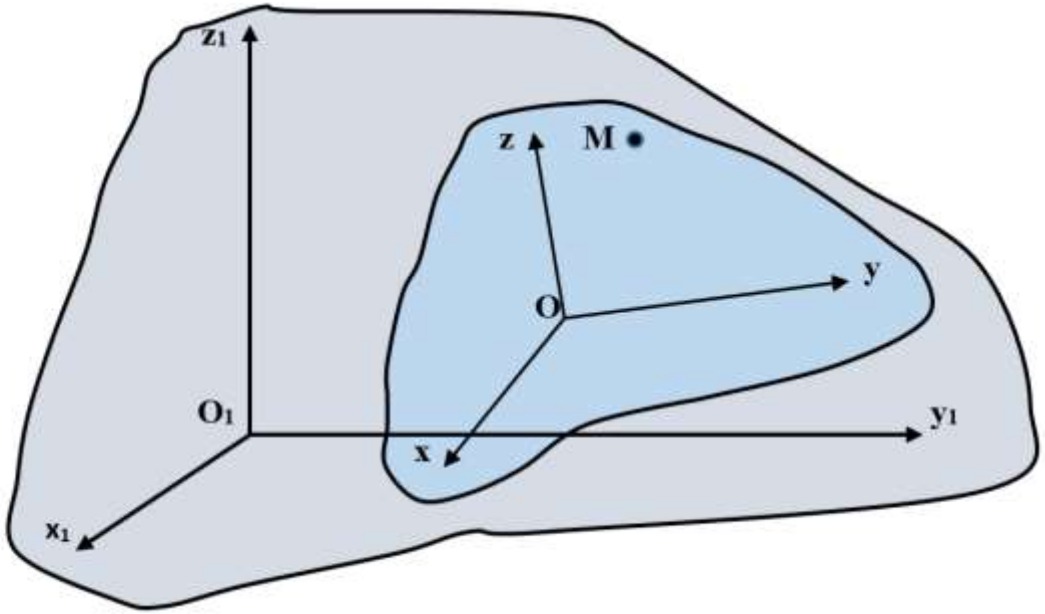
- Însă, la rezolvarea problemelor de mecanică, adesea este mai rational, iar uneori și necesar, de studiat mișcarea punctului **simultan în raport cu două sisteme de coordonate**, unul din care se consideră de bază considerat **imobil**, iar altul efectuează o mișcare în raport cu primul (**mobil**).

• Mișcarea efectuată de punct în acest caz se numește **mișcare compusă.** *De exemplu, mișcarea unui pendul matematic, suspendat într-un automobil în mișcare în raport cu Pămîntul, poate fi privită ca o mișcare compusă, ce constă din o mișcarea oscilatorie a pendulului în raport cu automobilul (**sistemul mobil de coordonate**) și o mișcare împreună cu automobilul în raport cu Pămîntul **(sistemul de coordonate imobil**).*

- Astfel mișcarea compusă a pendulului se descompune în două mișcări mai simple.

NOȚIUNI GENERALE, DEFINIȚII

- Fie mișcarea punctului M, care se mișcă în raport cu sistemul de coordonate **Oxyz**.
- La rîndul său sistemul de coordonate **Oxyz** se mișcă în raport cu sistemul de coordonate $\mathbf{O_1x_1y_1z_1}$ considerat sistem de bază.
- Fiecare din aceste sisteme de coordonate este legat cu un anumit corp.



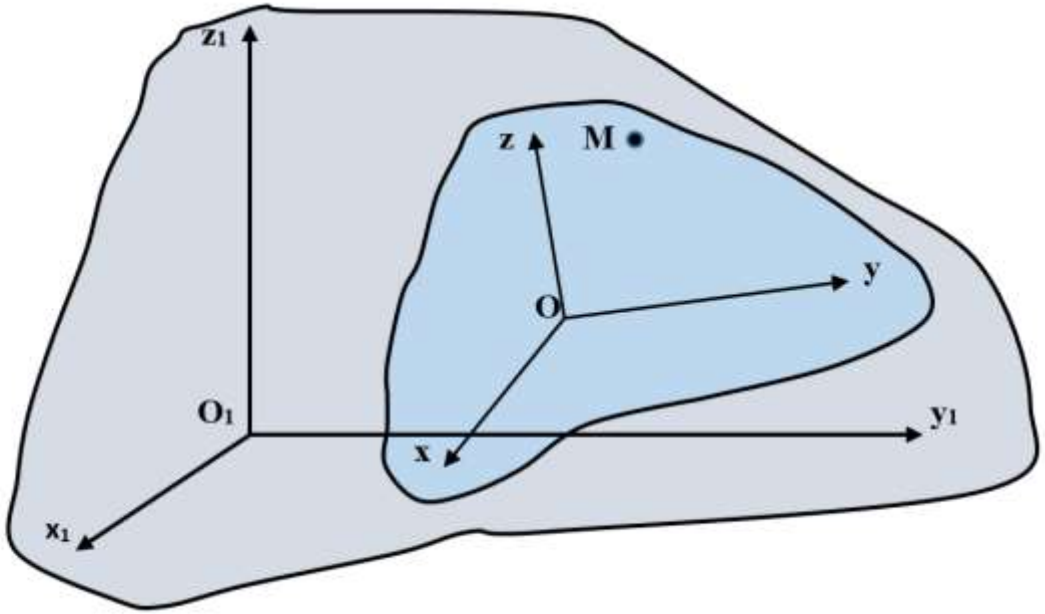
Vom numi mișcare compusă "absolută" a unui punct mișcarea lui în raport cu sistemul de coordonate ales ca sistem de bază, adică mișcarea punctului M în raport cu sistemul de coordonate $O_1x_1y_1$.

Vom numi mișcare relativă a unui punct mișcarea lui în raport cu sistemul de coordonate mobil, adică mișcarea punctului M în raport cu sistemul de coordonate Oxyz.

Vom numi mișcare de transport mișcarea sistemului de coordinate mobil în raport cu sistemul de bază.

9.1. NOȚIUNI GENERALE, DEFINIȚII

- **Mişcarea absolută -** ***viteză absolută*** $\vec{\mathbf{v}}$ și ***accelerație absolută*** $\vec{a}$.
- **Mişcarea relativă -** ***viteză relativă*** $\vec{\mathbf{v}}^r$ și ***accelerație relativă*** $\vec{a}^r$.
- **Mişcarea de transport –** ***viteză de transport*** $\vec{v}^e$ ***și accelerație de transport*** $\vec{a}^e$



Scopul - stabilirea relațiilor dintre aceste trei mişcări care ne-a permite să rezolvăm diverse probleme de determinare a caracteristicilor cinematice ale mişcării compuse şi a mişcărilor componente.

- ***Vom numi viteză de transport a unui punct viteza în raport cu sistemul de bază a acelui punct al sistemului mobil de coordinate cu care în momentul dat coincide punctul ce face mişcare compusă.***

NOȚIUNI GENERALE, DEFINIȚII

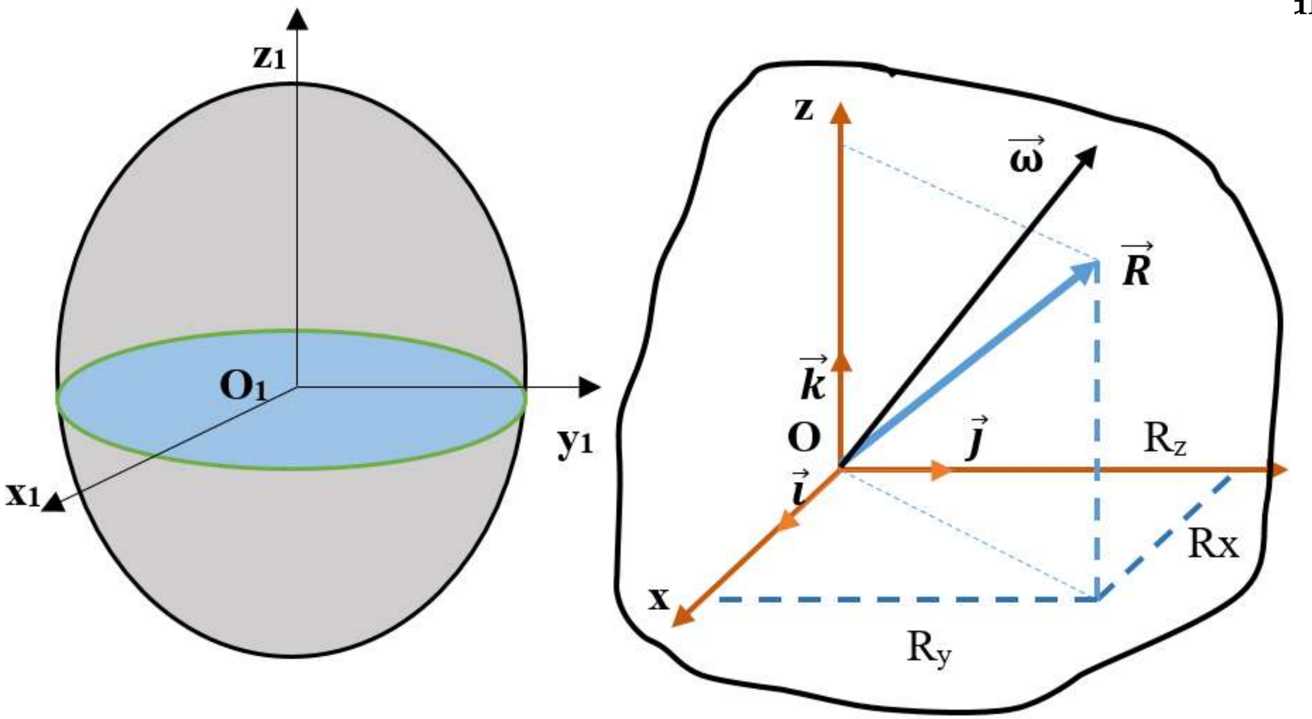
Legătura dintre derivata totală și locală a unui vector, definit în sistemul mobil de coordonate.

- În cele ce urmează ne vom întîlni cu necesitatea ... are poate să se miște arbitrar.
- Vom introduce noțiunile de ***derivată totală(absolu*** ... și ***derivată locală (relativă)*** ale vectorului.

Orice vector **R** = **R**(t) poate fi reprezentat prin comp...

$$\vec{\boldsymbol{R}} = R_x\vec{\boldsymbol{i}} + R_y\vec{\boldsymbol{j}} + R_z\vec{\boldsymbol{k}}$$

unde $\vec{\boldsymbol{i}}$, $\vec{\boldsymbol{j}}$, $\vec{\boldsymbol{k}}$ sînt versorii axelor *x*,*y* și *z*.



Să calculăm derivata totală a acestui vector în sistemul de bază, adică să calculăm derivata acestui vector din punctul de vedere al unui observator aflat în sistemul de coordonate $O_1x_1y_1z_1$.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

NOȚIUNI GENERALE, DEFINIȚII

Legătura dintre derivata totală și locală a unui vector, definit în sistemul mobil de coordonate.

- Observatorul din $O_1x_1y_1z_1$ va înregistra variația în timp a proiecțiilor R_x, R_y,R_z, cît și variația versorilor $\vec{\boldsymbol{i}}$, $\vec{\boldsymbol{j}}$, $\vec{\boldsymbol{k}}$ după direcție.

- Atunci, derivata totală a vectorului **R** după timp va fi egală cu

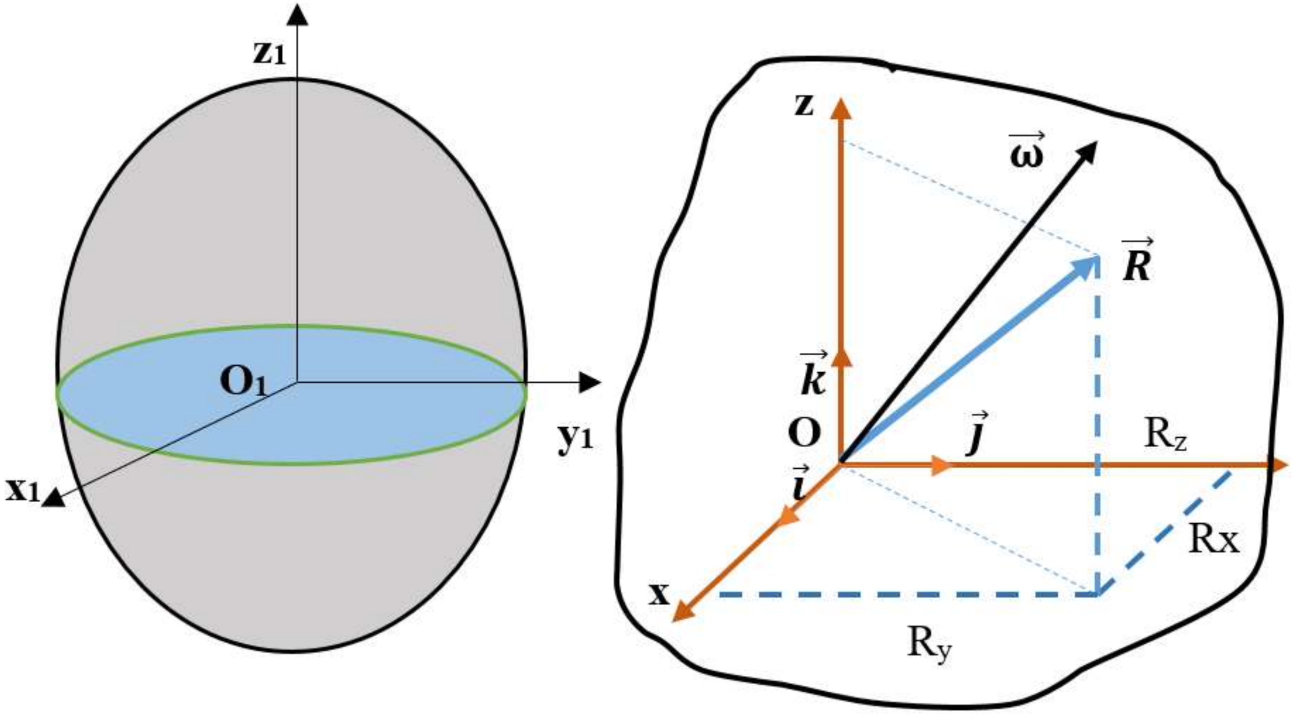
$$\frac{d\vec{\boldsymbol{R}}}{dt} = \frac{dR_x}{dt}\vec{\boldsymbol{i}} \frac{dR_y}{dt}\vec{\mathrm{j}} + \frac{dR_k}{dt}\vec{\boldsymbol{k}} + R_x\frac{\mathrm{d}\,\vec{\mathrm{i}}}{dt} + R_y\frac{d\vec{\boldsymbol{j}}}{dt} + R_z\frac{d\,\vec{\mathrm{k}}}{dt} \qquad (2)$$

Vom nota suma primilor trei termeni din (2) prin

$$\frac{\tilde{d}}{dt}\vec{\boldsymbol{R}} = \frac{dR_x}{dt}\vec{\boldsymbol{i}} + \frac{dR_y}{dt}\vec{\mathrm{j}} + \frac{dR_k}{dt}\vec{\boldsymbol{k}} \qquad (3)$$

- derivata vectorului **R** în sistemul de coordonate mobil

adică acea variație a vectorului **R** care o vede observatorul aflat în sistemul de coordonate mobil și se numește ***derivata locală*** sau ***derivata relativă*** .



9.1. NOȚIUNI GENERALE, DEFINIȚII

Legătura dintre derivata totală și locală a unui vector, definit în sistemul mobil de coordonate.

- $\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dR_x}{dt}\vec{i}\frac{dR_y}{dt}\vec{j} + \frac{dR_k}{dt}\vec{k} + R_x\frac{d\,\vec{i}}{dt} + R_y\frac{d\vec{j}}{dt} + R_z\frac{d\,\vec{k}}{dt}$ (2)

Versorii $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ai sistemului de coordonate legate cu corpul, efectuează o mișcare de rotație în raport cu polul O, cu o viteză unghiulară instantanee $\vec{\omega}$.:

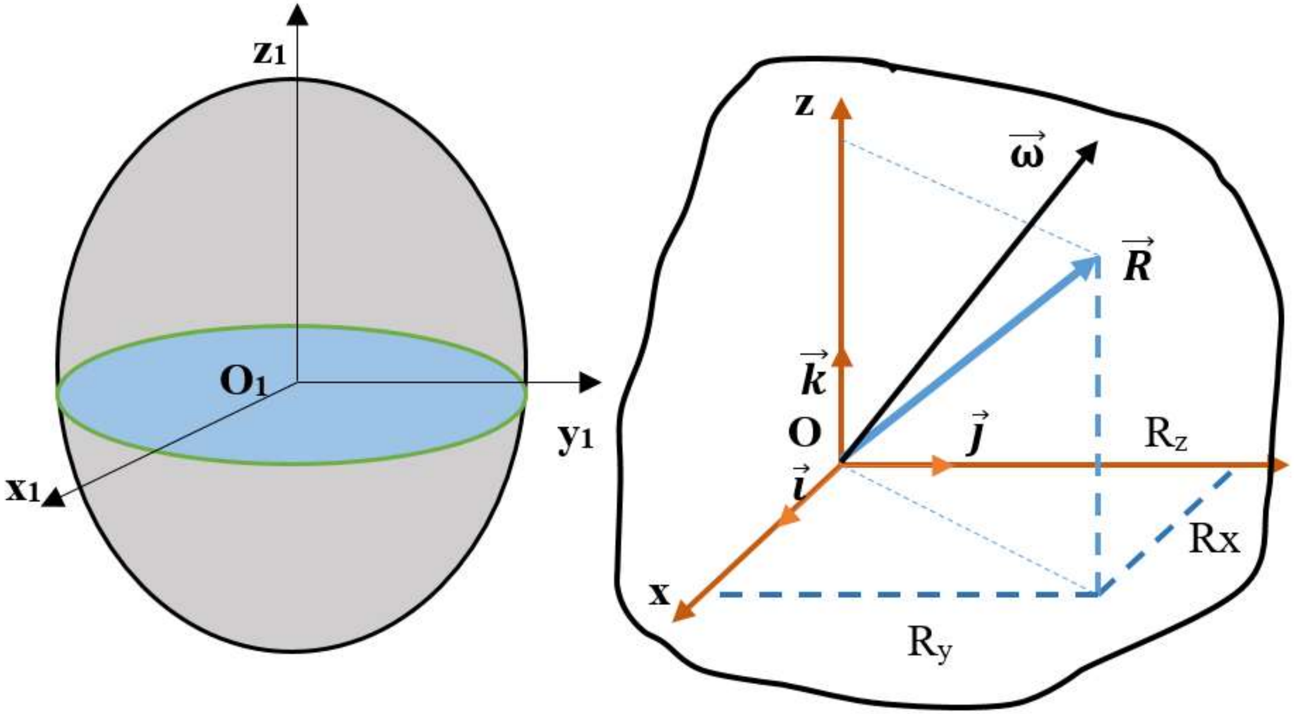
$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \qquad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}\,, \qquad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}\,.$$

Prin urmare suma ultimilor trei termeni din (2) poate fi adusă la forma

$$Rx\frac{d\,\vec{i}}{dt} + Ry\frac{d\vec{j}}{dt} + Rz\frac{d\,\vec{k}}{dt} =$$

$$Rx(\vec{\omega} \times \vec{i}\,) + Ry(\vec{\omega} \times \vec{j}\,) + Rz(\vec{\omega} \times \vec{k}\,) =$$

$$\vec{\omega} \times (Rx\vec{i} + Ry\,\vec{j} + Rz\,\vec{k}) = \vec{\omega} \times \vec{R}. \qquad (4)$$



Înlocuind (3) și (4) în (2) obținem

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\tilde{d}}{dt}\vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{R} \qquad (5)$$

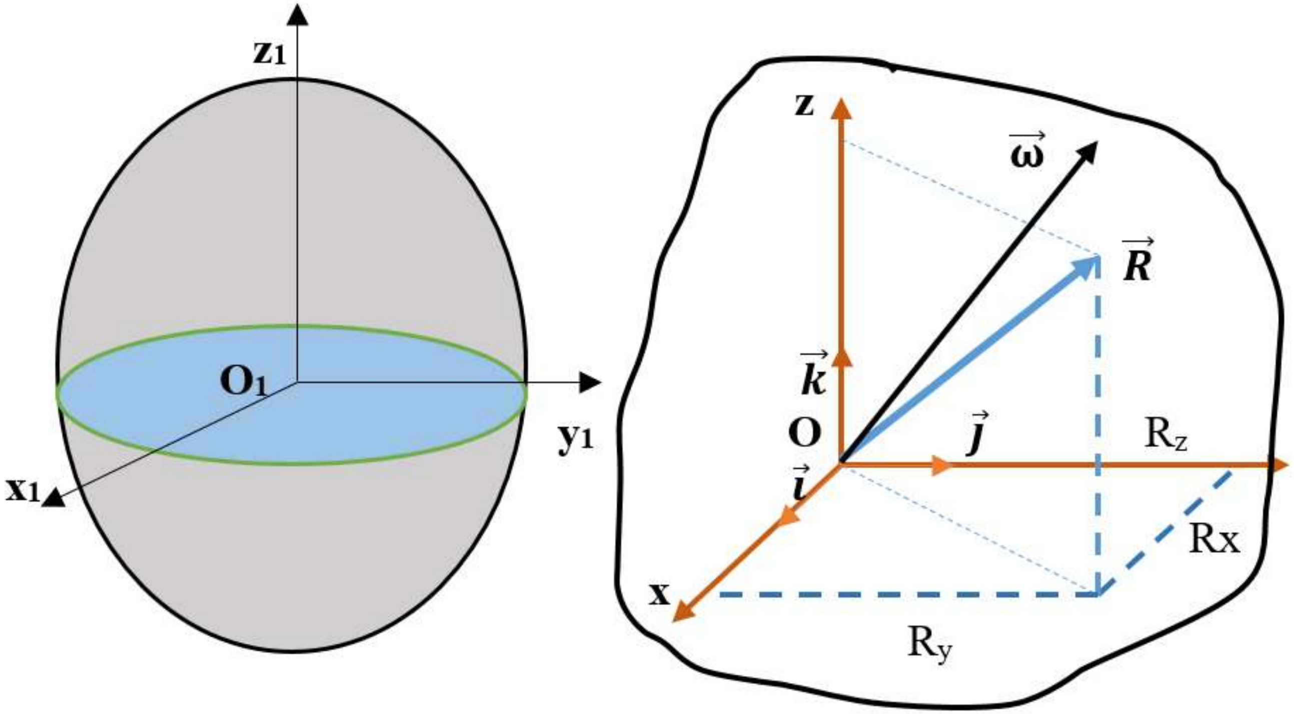
NOȚIUNI GENERALE, DEFINIȚII

Legătura dintre derivata totală și locală a unui vector, definit în sistemul mobil de coordonate.

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\tilde{d}}{dt}\vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{R} \qquad (5)$$

• Formula (5) reprezintă matematic legătura dintre derivata totală și derivata locală a unui vector definit în sistemul mobil de coordonate.

• ***Astfel, derivata totală(absolută) a unui vector definit într-un sistemm mobil de coordonate este egală cu suma vectorială a derivatei locale (relative) a acestu vector și a produsului vectorial dintre viteza unghiulară a sistemului mobil de coordonate și acest vector.***

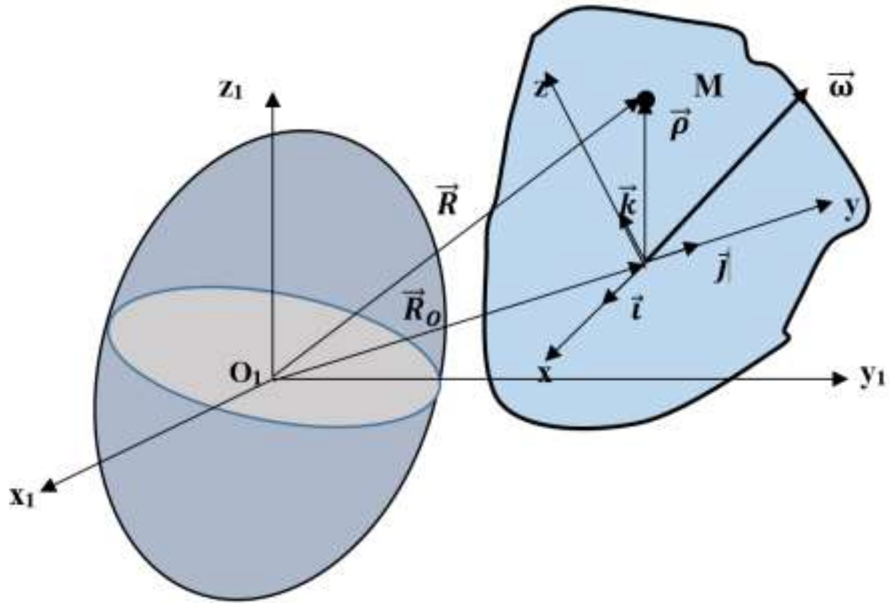


TEOREMA COMPUNERII VITEZELOR

Teoremă: ***viteza absolută a unui punct în mişcarea compusă este egală cu suma vectorială a vitezei de transport şi a vitezei relative.***

Demonstrare

Fie sistemul de coordonate $\mathbf{O_1x_1z_1}$ ca sistem de bază
și sisemul de coordonate **Oxyz** care se mișcă în raport cu sistemul de bază.



- Fie punctul M cu poziția:

$$\vec{\boldsymbol{\rho}} = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\boldsymbol{j}} + z\,\vec{\boldsymbol{k}},$$

unde $\vec{\boldsymbol{\imath}}$, $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$, $\vec{\boldsymbol{k}}$ sînt versorii axelor sistemului de coordonate mobil.

Atunci $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{R}}_{\mathbf{0}} + \vec{\boldsymbol{\rho}}$

unde $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{R}}(t)$, $\vec{\boldsymbol{R}}_O = \vec{\boldsymbol{R}}_O(\mathrm{t})$ și $\vec{\boldsymbol{\rho}} = \vec{\boldsymbol{\rho}}(t)$ sînt vectorii de poziție,
care definesc respectiv poziile punctului M și a originii O în raport cu sistemul de coordonate $O_1x_1z_1$

și poziția originii sistemului de coordonate Oxyz în raport cu sistemul de coordonate Oxyz.

TEOREMA COMPUNERII VITEZELOR

$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{\rho}$

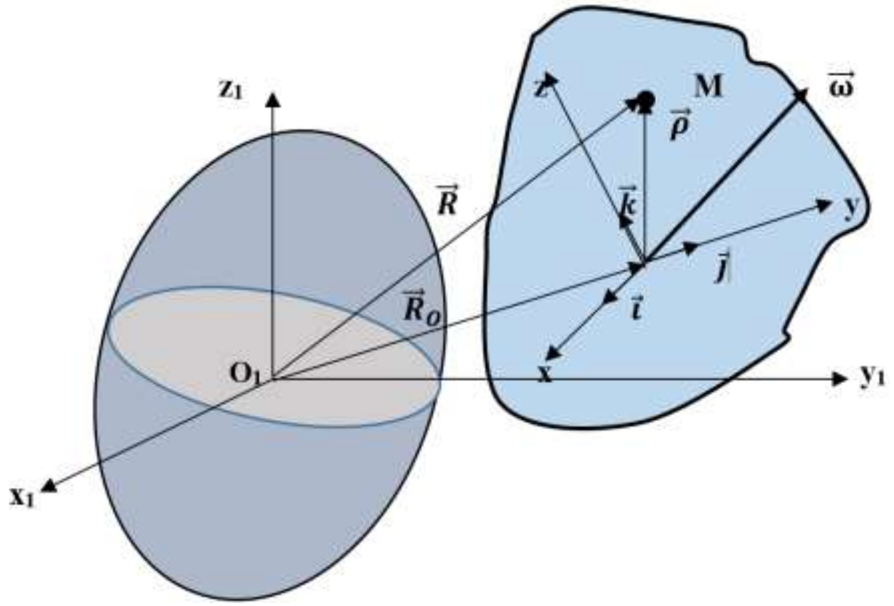
Derivata totală în raport cu timpul de la vectorul $\vec{R}$:

$$\boxed{\frac{d\vec{R}}{dt}} = \boxed{\frac{d\vec{R}_O}{dt}} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} \quad . \qquad (7)$$

unde $\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}$ este viteza absolută a punctului M,

iar $\vec{v}_O = \frac{d\vec{R}_O}{dt}$ este viteza absolută a originii O.

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\tilde{d}}{dt}\vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{R} \quad (5)$$



Derivata vectorului $\vec{\rho}$

Vectorul $\vec{\rho}$ este definit în sistemul de coordonate mobil, atunci derivata totală a acestui vector, conform (5):

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}}{dt}\vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \qquad (8)$$

unde $\vec{\omega}$ este viteza unghiulară a sistemului de coordonate mobil, iar

$\frac{\tilde{d}}{dt}\vec{\rho} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}$ -derivata locală sau relativă

TEOREMA COMPUNERII VITEZELOR

$\frac{\tilde{d}}{dt}\vec{\boldsymbol{\rho}} = \dot{x}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \dot{y}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \dot{z}\,\vec{\boldsymbol{k}}$ -derivata locală sau relativă

Conform definiției aceasta va fi viteza relativă a punctului M:

$$\vec{\boldsymbol{v}}^r = \frac{\tilde{d}}{dt}\overrightarrow{\boldsymbol{\rho}} = \dot{x}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \dot{y}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \dot{z}\,\vec{\boldsymbol{k}}\ . \tag{9}$$

Deci: $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{R}}_0 + \vec{\boldsymbol{\rho}};\ \frac{d\vec{\boldsymbol{R}}}{dt} = \frac{d\vec{\boldsymbol{R}}_O}{dt} + \frac{d\vec{\boldsymbol{\rho}}}{dt}$

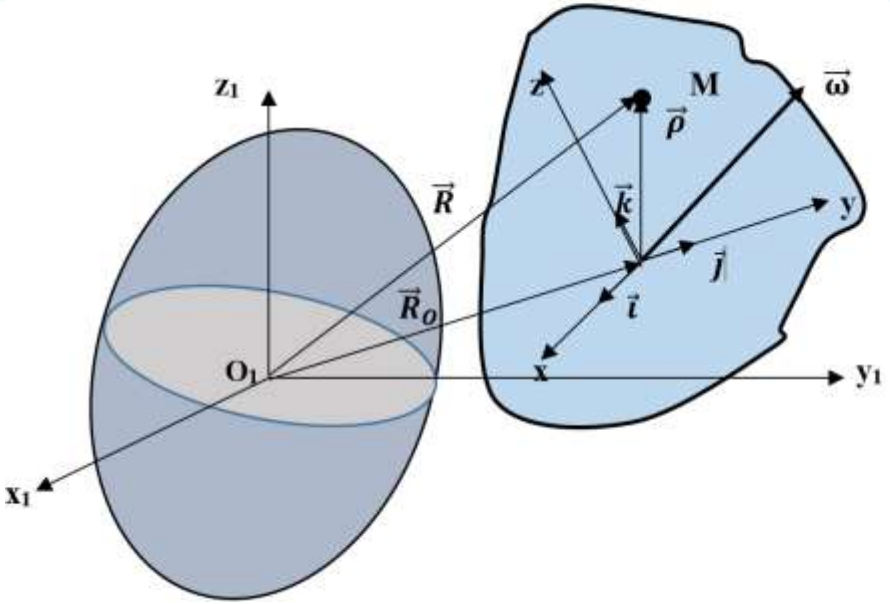
$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{R}}}{dt}$ -viteza absolută

$\vec{\boldsymbol{v}}_O = \frac{d\vec{\boldsymbol{R}}_O}{dt}$ - viteza absolută a originii O.

$\vec{\boldsymbol{v}}^r = \frac{\tilde{d}}{dt}\overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}$ - viteza relativă a punctului M

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}_O + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{\rho}} + \vec{\boldsymbol{v}}^r . \tag{10}$$

Viteza unui punct al sistemului de coordonate mobil cu care în momentul dat coincide punctul M ce face mișcare compusă este egală cu suma primilor doi termini din (10) și după definiție este viteza de transport a punctului M.



TEOREMA COMPUNERII VITEZELOR

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{v}^r. \qquad (10)$$

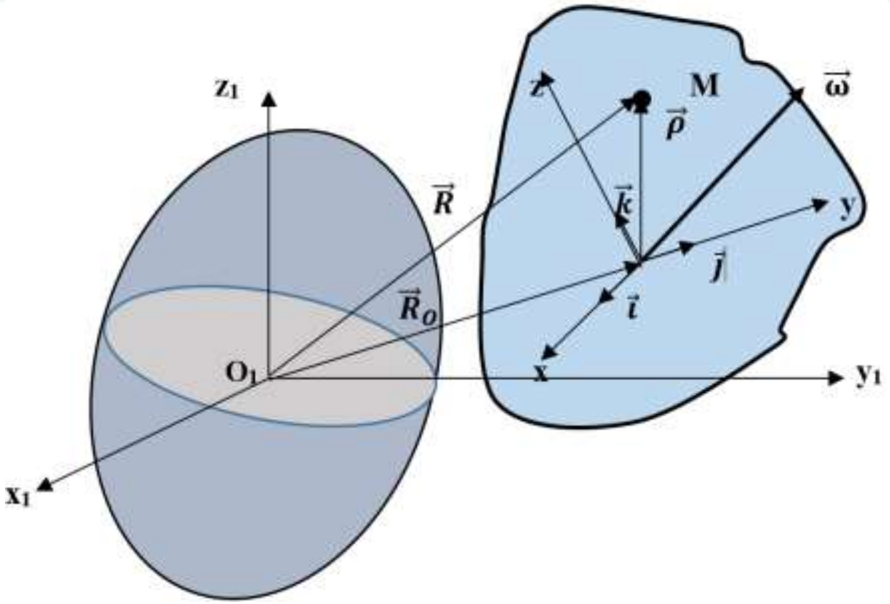
Deci viteza de transport a punctului M

$$\vec{v}^e = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \qquad (11)$$

Prin urmare,

$$\vec{v} = \vec{v}^e + \vec{v}^r, \qquad (12)$$

- *Viteza absolută este egală cu suma vectorială a vitezei de transport și vitezei relative.*



Teoremă:

Teorema compunerii accelerațiilor (teorema lui Coriolis).

accelerația absolută a unui punct în mișcarea compusă este egală cu suma vectorială a accelerației de transport, accelerației relative și accelerației lui Coriolis.

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{v}^r \,. (10)}$$

Demonstrare

Pentru a determina accelerația absolută a unui punct, de exemplu M, vom deriva (derivata totală) după timp expresia (10)

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt}} = \boxed{\frac{d\vec{v}_O}{dt}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} + \frac{d\vec{v}^r}{dt} \,. \qquad (13)$$

vom nota:

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ - accelerația absolută

$\vec{a}_O = \frac{d\vec{v}_O}{dt}$ - accelerația de transport

TEOREMA COMPUNERII ACCELERAȚIILOR
Teorema Coriolis

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \boxed{\frac{d\vec{\omega}}{dt}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \boxed{\frac{d\vec{\rho}}{dt}} + \boxed{\frac{d\vec{v}^r}{dt}} . \quad (13)$$

$$\boxed{\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\tilde{d}}{dt}\vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{R} \quad (5)}$$

Deoarece vectorii $\vec{\rho}$ și $\vec{v}^r$ sînt definiți în sistemul de coordonate mobil, atunci la calcularea derivatelor totale de la acești vectori aplicăm formula (5)

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}}{dt}\vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. = \vec{v}^r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \quad (14)$$

$$\frac{d\vec{v}^r}{dt} = \boxed{\frac{\tilde{d}}{dt}\vec{v}^r} + \vec{\omega} \times \vec{v}^r = \boxed{\vec{a}^r} + \vec{\omega} \times \vec{v}^r , \quad (15)$$

unde $\frac{\tilde{d}}{dt}\vec{v}^r$ este derivata relativă de la vectorul vitezei relative, prin urmare, reprezintă accelerația relativă $\vec{a}^r$, adică accelerația punctului M în raport cu sistemul de coordonate mobil

$$\vec{a}^r = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k} . \quad (16)$$

Ținând cont că $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ - accelerația unghiulară a sist. de coord. mobil.

$$\vec{a} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{v}^r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) + \vec{a}^r + \vec{\omega} \times \vec{v}^r =$$

$$= \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{a}^r + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}^r). \quad (17)$$

TEOREMA COMPUNERII ACCELERAȚIILOR
Teorema Coriolis

$$\vec{a} = \vec{a}_O + \vec{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \vec{\boldsymbol{\rho}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{\rho}} + \vec{a}^r + 2(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}^{\mathbf{r}}). \qquad (17)$$

- primii trei termeni din (17) reprezintă accelerația de transport a punctului M

$$\vec{a}^e = \vec{a}_O + \vec{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \vec{\boldsymbol{\rho}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{\rho}}\ . \qquad (18)$$

- termenul patru reprezintă accelerația relativă a punctului M în raport cu sistemul mobil
- termenul $2(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}^{\mathbf{r}})$ se numește accelerația lui Coriolis și se notează $\vec{a}^C$.

Definitiv expresia (17) va lua forma

$$\vec{a} = \vec{a}^e + \vec{a}^r + \vec{a}^C. \qquad (19)$$

Prin urmare, teorema lui Coriolis este demonstrată.

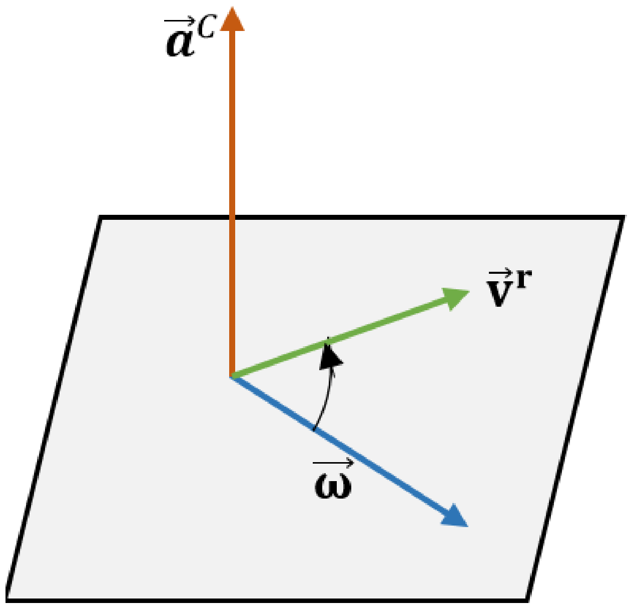
La aplicarea formulei (19) este util de ținut cont de faptul că viteza și accelerația relativă se determină după metodele din cinematica punctului, iar viteza și accelerația de transport a punctului se determină după metodele cinematicii corpului rigid.

Vom analiza detaliat la accelerația lui Coriolis.

$\vec{a}^C = 2(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}^{\mathbf{r}})$. (20)

Modulul acestei accelerații este egal cu

$a^C = 2\,\omega v^r \sin(\vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{v}^r)$. (21)



Direcția accelerației Coriolis

Direcția accelerației lui Coriolis se determină, folosind definiția produsului vectorial, conform căreia

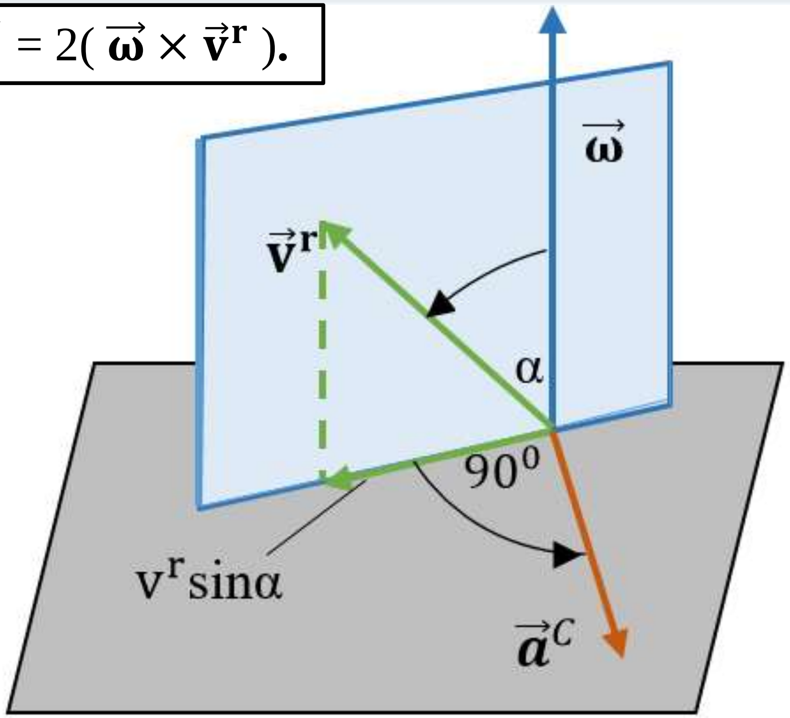
vectorul $\vec{a}^C$ este un vector perpendicular pe planul ce conține vectorii $\vec{\omega}$ și $\vec{v}^r$ și este orientat în acel sens ca din vîrful vectorului să vedem rotația cea mai scurtă de la $\vec{\omega}$ spre $\vec{v}^r$ contrar rotației acelor de ceasornic

$\vec{a}^C = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}^r)$.

Direcția accelerației Coriolis

Adesea accelerația lui Coriolis se determină mai simplu, aplicînd **regula lui Jukovski** conform căreia

proiecția vitezei relative $\vec{v}^r$ pe planul perpendicular la vectorul vitezei unghiulare $\vec{\omega}$ a sistemului de coordonate mobil, egală cu $v^r \sin\alpha$ (α - unghiul dintre vectorii $\vec{\omega}$ și $\vec{v}^r$) se înmulțește cu 2ω, apoi se rotește cu 90^0 în jurul lui $\vec{\omega}$ în direcția rotației. Vectorul, care după mărime este egal cu $2\,\omega v^r \sin\alpha$ și are direcția determinată va fi accelerația lui Coriolis.



Accelerația lui Coriolis este egală cu zero în trei cazuri:

a) sistemul de coordonate mobil face o mișcare de translație $\omega = 0$;

b) viteza relativă este egală cu zero $v^r = 0$;

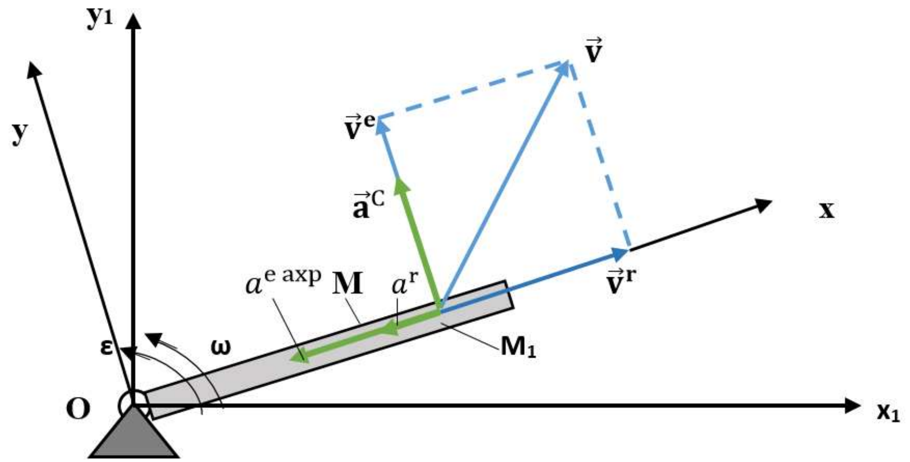
c) viteza unghiulară a sistemului mobil $\vec{\omega}$ este paralelă cu viteza relativă $\vec{v}^r$.

Problema 1

O țeavă rectilinie face o mișcare de rotație în jurul unei axe fixe ce trece prin capătul ei și perpendicular pe ea cu o viteză unghulară constantă, egală cu 2 rad/s. În țavă se mișcă un cursor după legea OM = s = 40 sin(πt/4) cm. Pentru momentul de timp t = t_1 =1s să se determine viteza absolută și accelerația absolută a cursorului.

Rezolvare.

Considerăm două sisteme de coordonate, sistemul fix Ox_1y_1 și sistemul mobil Oxy rigid legat cu țeava



Mișcarea punctului M în raport cu sistemul Oxy și deci față de țeavă este **mișcarea relativă** și prezintă o mișcare rectilinie definită prin metoda naturală.

Atunci conform metodei naturale:

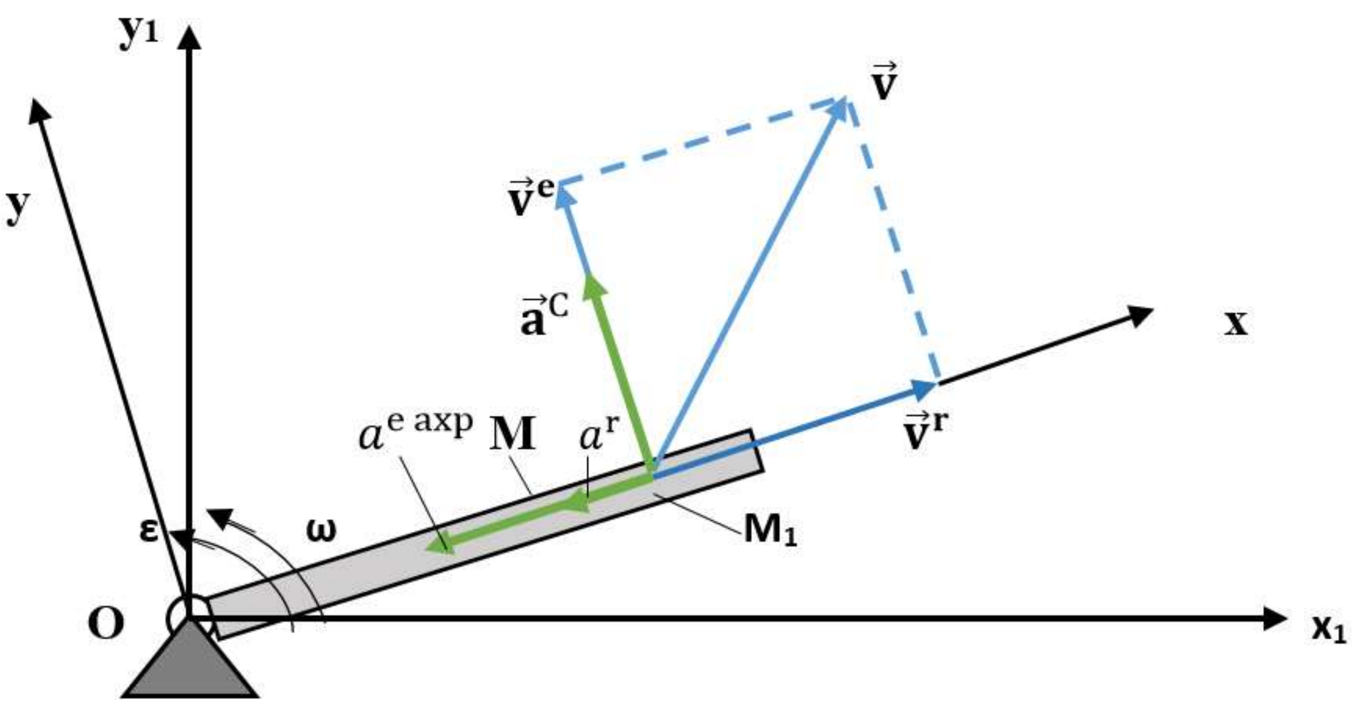
$$v^r = \frac{ds}{dt} = 40\cdot(\pi/4)\cos(\pi t/4) = 31{,}4\cos(\pi t/4),$$

$$a^r = \frac{dv^r}{dt} = -31.4\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi t}{4}$$

Pentru momentul de timp t = t_1 = 1s găsim

$v^r = 31{,}4\cdot\sqrt{2}/2 = 22{,}14$ cm/s , $a^r = -31{,}4\cdot 3{,}14\cdot\sqrt{2}/8 = -17{,}38\ \mathrm{cm}/s^2$

EXEMPLU



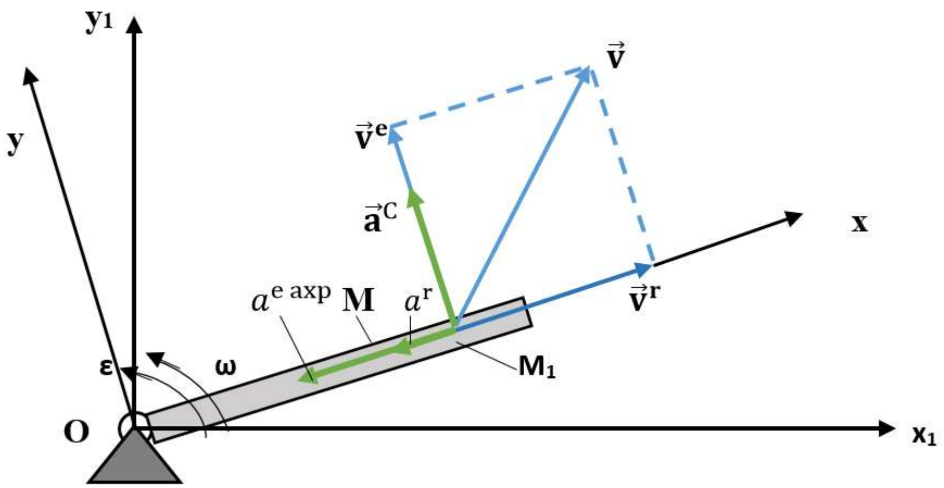
$v^r = 31{,}4 \cdot \sqrt{2}\,/2 = 22{,}14$ cm/s ,
$a^r = -\ 31{,}4 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{2}/8 = -17{,}38$ cm/s^2

- Deoarece $v^r > 0$, atunci s crește și deci este orientat astfel cum e arătat pe desen.

- Deoarece $a^r < 0$, atunci viteza relativă discrește și deci accelerația relativă este orientată în sens opus vectorului v^r.

EXEMPLU

Mişcarea de transport este mişcarea de rotație a țevii.
Viteza de transport și accelerația de transport depinde de poziția punctului M în sistemul mobil.



- Găsim poziția lui în momentul $t = t_1 = 1s$
  $OM_1 = OM\,(t = t_1) = 40 \cdot \sin(\pi/4) = 28.2cm.$
- **viteza de transport** este egală cu
  $v^e = \omega_1 . OM_1$; $\omega_1 = \omega = 2$ rad./s. Atunci $v^e = 2 \cdot 28.2 = 56.4cm/s$

- **Accelerația de transport** este egală cu cu suma vectorială a două componente: accelerația de rotație și accelerația axipetă

$$\vec{a}^e = \vec{a}^{e\,rot} + \vec{a}^{e\,axp}$$

După mărime

$$a^{e\,rot} = \varepsilon \cdot OM_1,\ \ a^{e\,axp} = \omega^2 \cdot OM_1.$$

Deoarece viteza unghiulară a țăvii este constantă, atunci accelerația unghiulară

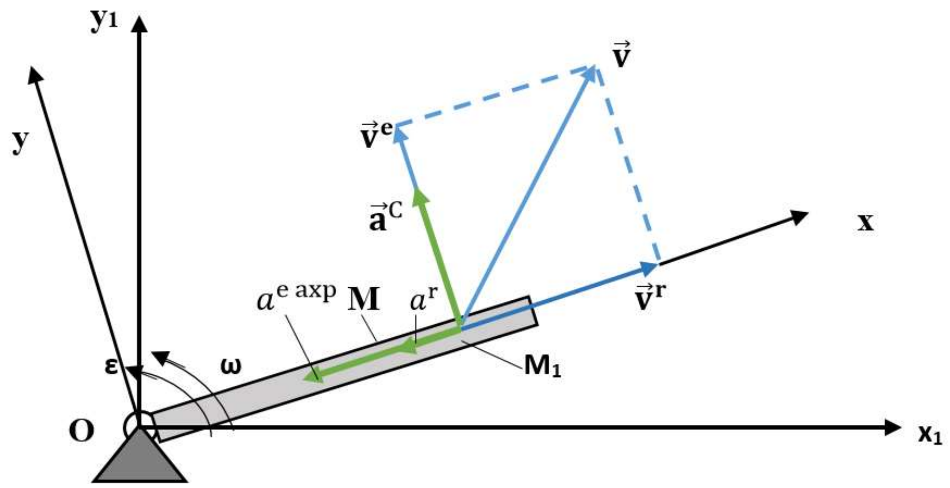
$$\varepsilon = \dot{\omega} = 0, \text{ atunci și } a^{e\,rot} = 0.$$

$a^{e\,axp} = 4 \cdot 28,2 = 112.8\ cm/s^2$ - orientă spre axa de rotație.

Direcția și sensul accelerației Coriolis o determinăm după regula lui Jukovski și este arătată pe desen.

Răspuns:

$$\boxed{\vec{a}^{C} = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}^{r}).}$$



1. **Viteza absolută**, conform teoremei compunerii vitezelor:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}^{\mathbf{e}} + \vec{\mathbf{v}}^{\mathbf{r}}.$$

$$v = \sqrt{(v^{e})^2 + (v^{r})^2} = \sqrt{(56.4)^2 + (22.14)^2} = 60{,}59 \text{ cm/s}$$

2. Accelerația absolută, conform teoremei lui Coriolis:

$$\vec{a} = \vec{a}^{e} + \vec{a}^{r} + \vec{a}^{C} = \vec{a}^{e\,\mathrm{rot}} + \vec{a}^{e\,\mathrm{axp}} + \vec{a}^{r} + \vec{a}^{C}.$$

$$\vec{a}^{e\,\mathrm{rot}} = 0$$

$$a_x = -\,a^{e\,\mathrm{axp}} - a^{r} = -\,112{,}8 - 17{,}38 = -\,130.18 \text{ cm}/s^2$$

$$a_y = a^{C} = 88.56 \text{ cm}/s^2$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-130.18)^2 + (88.56)^2} = 157.45 \text{ cm}/s^2$$

Problema 2

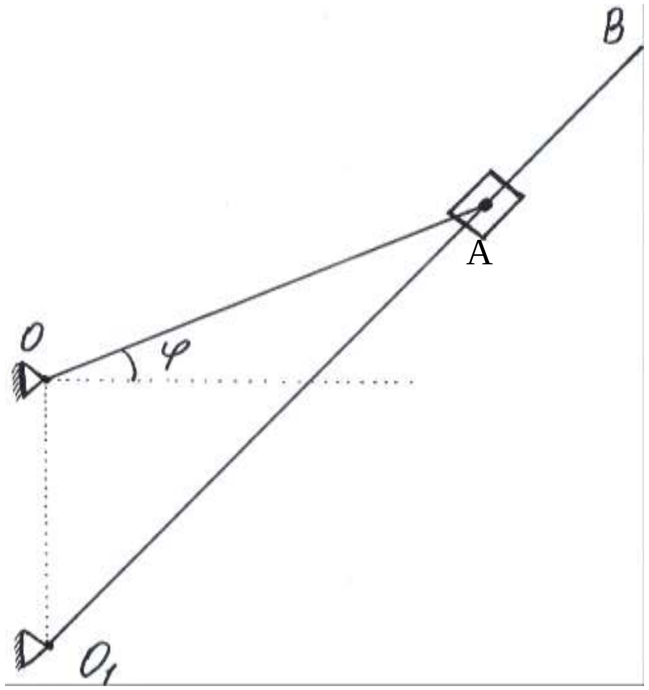
În mecanismul cu culisă manivela OA balansează în jurul axei O conform legii $\varphi = \varphi(t)$, *antrenând în mișcarea de rotație în jurul axei fixe* O_1 *bara* O_1B. *Să se determine în momentul* t_1 *viteza relativă, accelerația relativă, de transport și accelerația Coriolis ale patinei A, dacă* $OA = r = 0.2$ m, $2O_1O = l = 0.3$m, $\varphi(t) = \frac{\pi}{3}\sin(\pi t)$, $t_1 = 2\frac{1}{6}$.

$OA = r = 0.2\ m$

$2O_1O = l = 0.3m$

$\varphi(t) = \frac{\pi}{3}\sin(\pi t)$,

$t_1 = 2\frac{1}{6}\ s$.



EXEMPLU

Rezolvare.

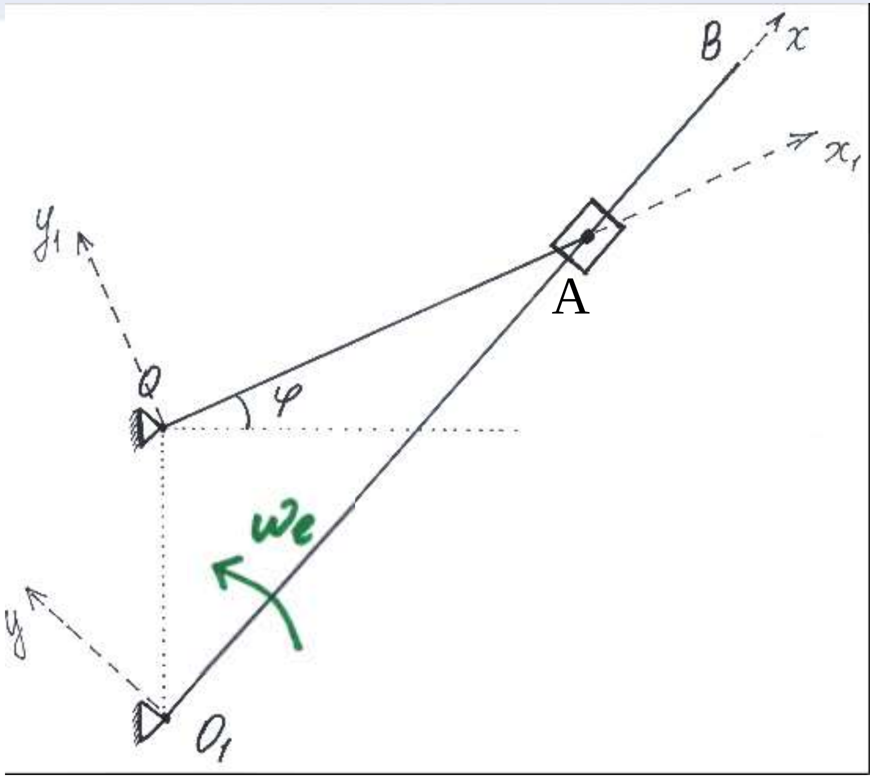
1. Fixăm sistemul de coordonate mobil (xO_1y) legat cu bara O_1B și sistemul de coordonate fix (x_1Oy_1), legat cu bara OA.

În raport cu sistemul de referință mobil, patina realizează o mișcare de translație (în lungul barei O_1B) cu viteza $\vec{v}_r$.

În raport cu sistemul de referință fixat, cursorul va efectua mișcare compusă, și viteza se determină din legea compunerii vitezelor:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \qquad (2.1)$$

unde $\vec{v}_e$ este viteza de transport (în cazul dat, sistemul mobil este „transportat”, rotit în jurul punctului O_1 cu viteza unghiulară de transport ω_e.



EXEMPLU

2. Vom determina valorile numerice ale vitezelor:

2.1 **Viteza absolută** este viteza cu care cursorul parcurge circumferința de rază OA (OA = const.)

$$v_a = \omega_1 OA \qquad (2.2)$$

unde ω_1 este viteza unghiulară de transport instantanee (în momentul t_1):

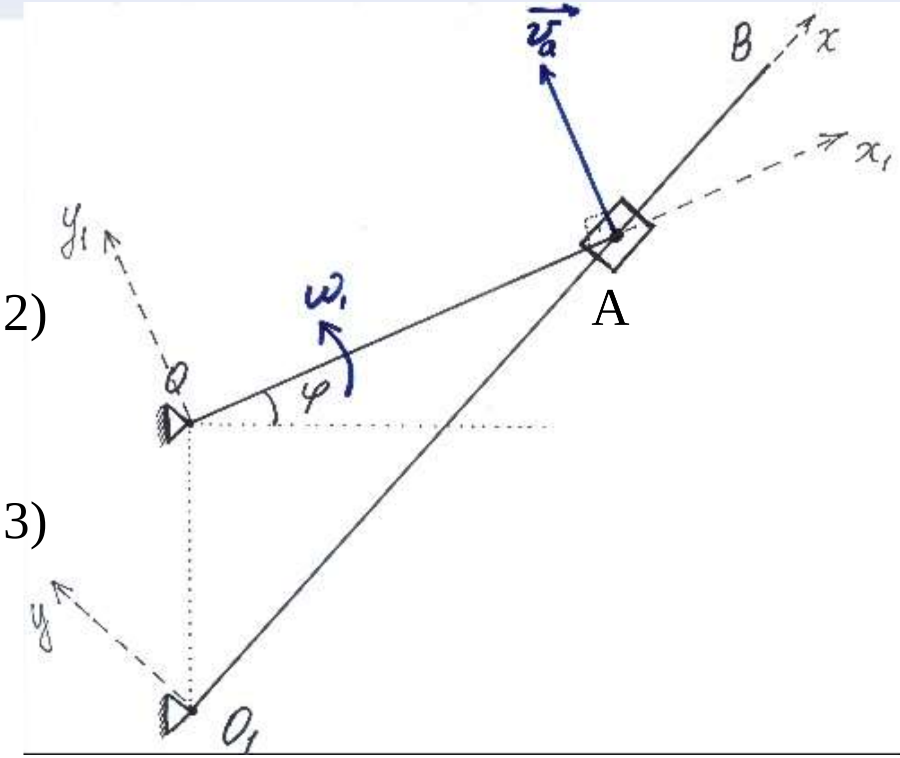
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\pi}{3}\sin(\pi t)\right] = \frac{\pi^2}{3}\cos(\pi t) \qquad (2.3)$$

în momentul de timp $t = t_1 = 2\frac{1}{6}\ s$:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{3}\cos\left(\pi \cdot 2\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi^2}{3}\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{6} m/s \qquad (2.4)$$

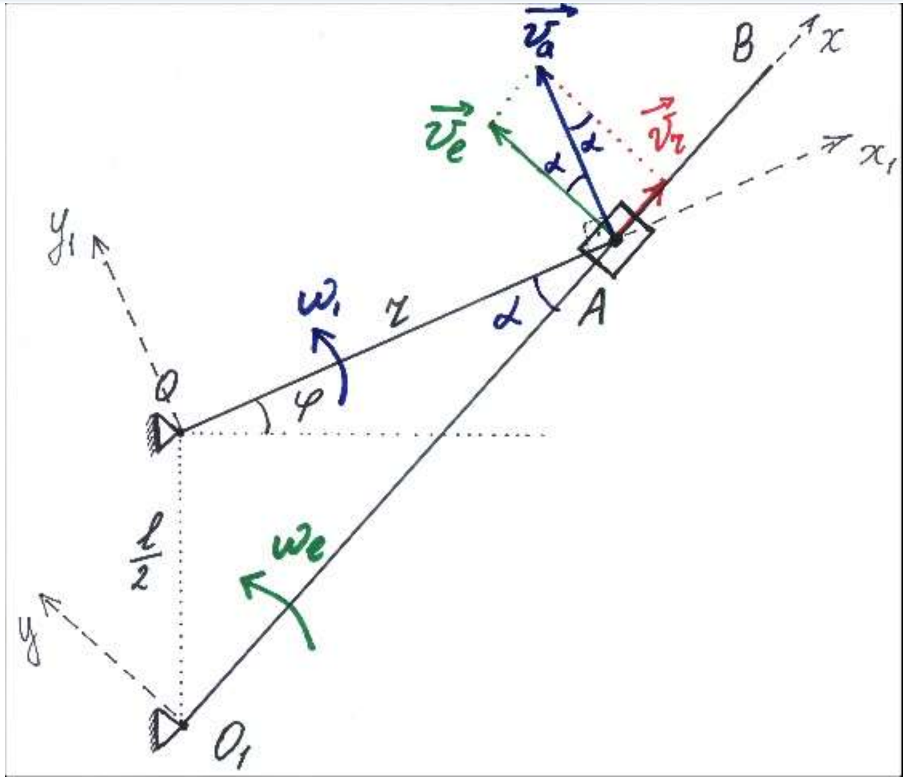
! Dacă $\omega_1 > 0$, pe desen se va indica în direcția creșterii unghiului φ

Atunci (2.2) devine: $v_a = \omega_1 OA = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{6} s^{-1} \cdot 0.2m = \boxed{\frac{0.1\pi^2\sqrt{3}}{3} m/s} \qquad (2.5)$



2.2 Viteza de transport a sistemului mobil va fi:

$$v_e = \omega_e \cdot O_1A \qquad (2.6)$$



Deoarece după definiția (2.1) viteza absolută trebuie să fie egală cu suma vectorială a componentelor de transport și relativă, $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ (2.1)

și ținând cont că viteza de transport tot va fi perpendiculară pe raza de rotație (instantanee) O_1A,

iar viteza relativă poate fi orientată doar în lungul O_1A (patina alunecă pe această bară),

vom reprezenta $\vec{v}_a$ ca rezultanta geometrică a vectorilor $\vec{v}_r$ și $\vec{v}_e$

Astfel, viteza de transport și viteza relativă pot fi exprimate prin viteza absolută, întrucât valoarea acesteia din urmă a fost deja calculată:

$$v_e = v_a \cos\alpha\,,\ \ v_r = v_a \sin\alpha \qquad (2.7)$$

Etapa următoare constă în determinarea unghiului α.

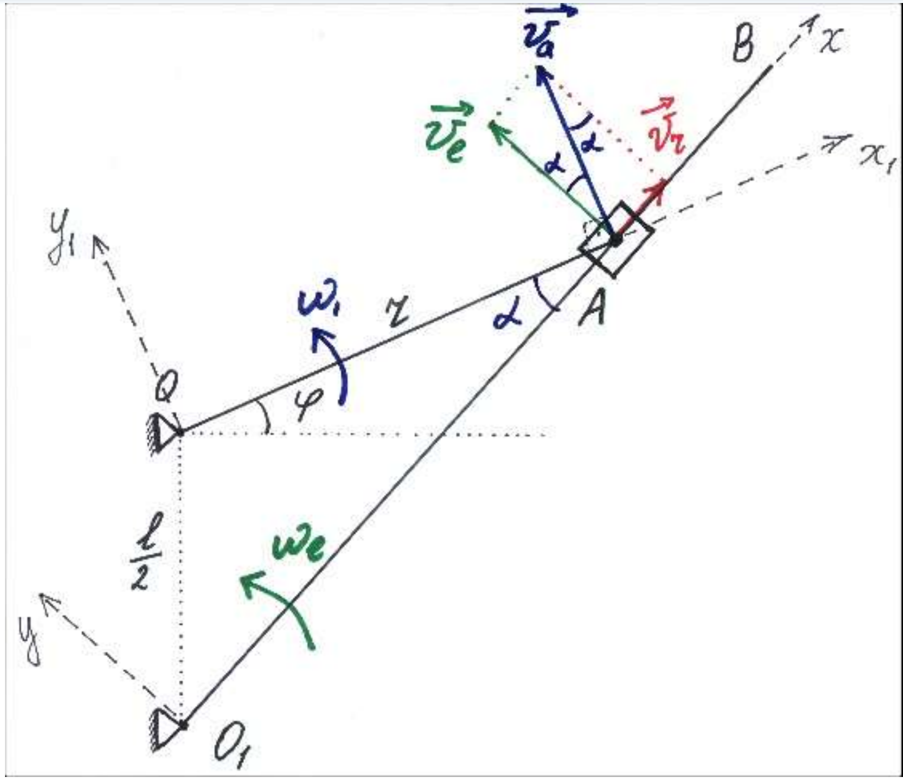
Din desen se observă că în triunghiul OAO_1 cunoaștem două laturi ($OA = r$, $OO_1 = l/2$) și unghiul φ. Pentru determinare unghiului α trebuie să cunoaștem încă o latură. Aplicăm teorema cosinusului:

$$O_1A^2 = OO_1^2 + OA^2 - 2OO_1 \cdot OA\cos(\varphi_1 + 90^0) = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 + 2\frac{l}{2} \cdot r\cos\varphi_1$$

unde φ_1 este unghiul φ în momentul de timp t_1:

$$\varphi_1(t = t_1) = \frac{\pi}{3}\sin\left(\pi \cdot 2\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{3}\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}\ (sau\ 30^0)$$

Atunci $$O_1A = \sqrt{0.15^2 + 0.2^2 + 0.15 \cdot 0.2 \cdot 0.87} \approx 0.3\ m \qquad (2.8)$$



EXEMPLU

Conform teoremei sinusului

$$v_e = v_a \cos\alpha\,,\ \ v_r = v_a \sin\alpha \quad (2.7)$$

$$\frac{O_1A}{\sin(\varphi_1+90^0)} = \frac{l/2}{\sin(\alpha)} = \frac{O_1A}{\sin(\measuredangle OO_1A)} \qquad (2.9)$$

de unde

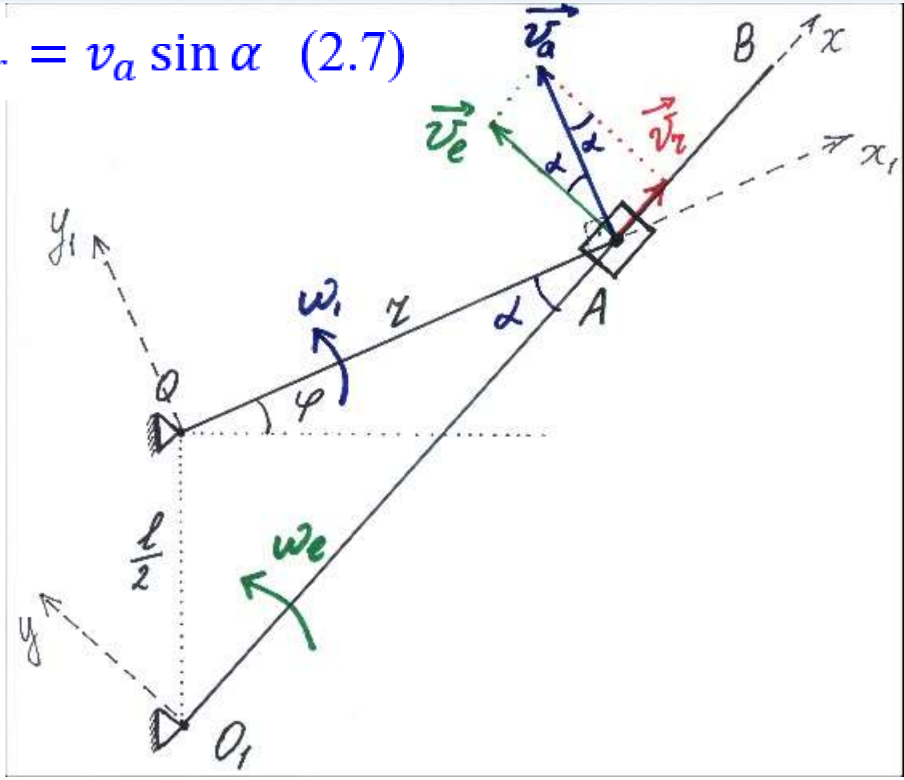
$$\frac{0.3}{\sin(30^0)} = \frac{0.15}{\sin(\alpha)} \Rightarrow \sin(\alpha) = 0.15\cdot 0.5/0.3 = 0.25$$

În (2.7) avem nevoie și de cosinus: $\cos(\alpha) = \sqrt{1-\sin^2(\alpha)} = 0.97$

Revenim la (2.7):

$$v_e = v_a \cos\alpha = \frac{0.1\pi^2\sqrt{3}}{3}\cdot 0.97 = 0.55\,\frac{m}{s}$$

$$v_r = v_a \sin\alpha = \frac{0.1\pi^2\sqrt{3}}{3}\cdot 0.25 = 0.14\,\frac{m}{s}$$



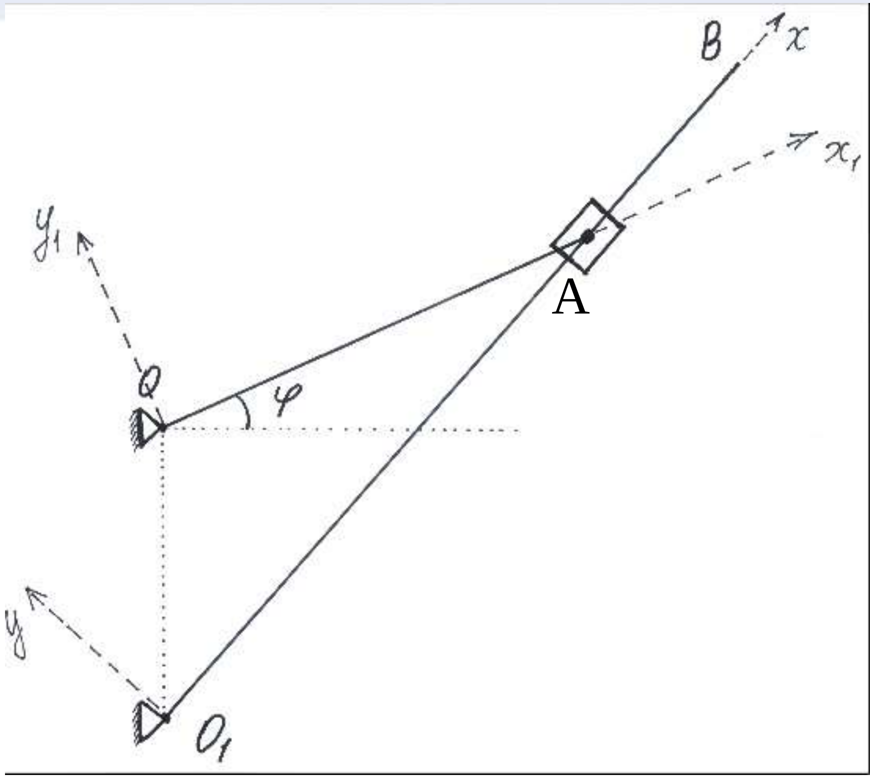
II. Accelerația patinei:

Conform teoremei despre compunerea accelerațiilor:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C \qquad (2.10)$$

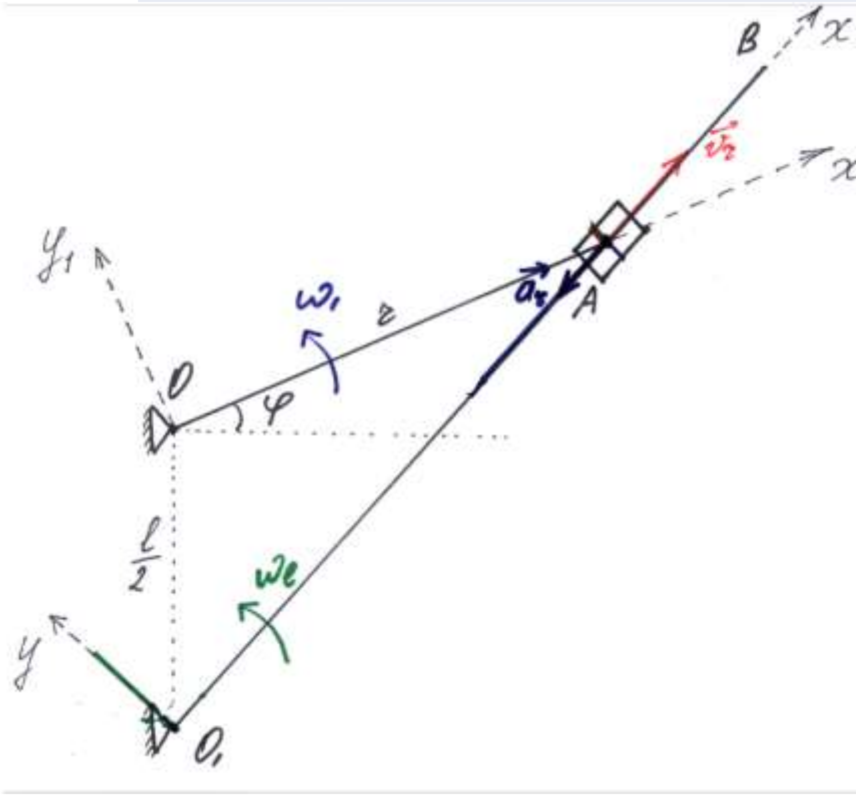
Sistemul de referință mobil realizează o mișcare de rotație, deci accelerația de transport se compune din componenta axipetă și componenta rotațională.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e^{rot} + \vec{a}_e^{ax} + \vec{a}_C \qquad (2.11)$$



EXEMPLU

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e^{rot} + \vec{a}_e^{ax} + \vec{a}_C$$



II. 1 Accelerația relativă

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{d(v_a \sin\alpha)}{dt}$$

! calculele se realizează pentru valorile **instantanee**. În acest context, pentru momentul de timp t_1 unghiul α se consideră constant.

Vom exprima viteza absolută prin expresia generală pentru viteza unghiulară:

$$v_a = \omega \cdot OA = \frac{\pi^2}{3}\cos(\pi t) \cdot r$$

Atunci

$$a_r = \frac{dv_a}{dt}\sin\alpha = \frac{d}{dt}\left[\frac{\pi^2}{3}\cos(\pi t) \cdot r\right]\sin\alpha = -\frac{\pi^3}{3}\sin(\pi t) \cdot 0.2 \cdot 0.25.$$

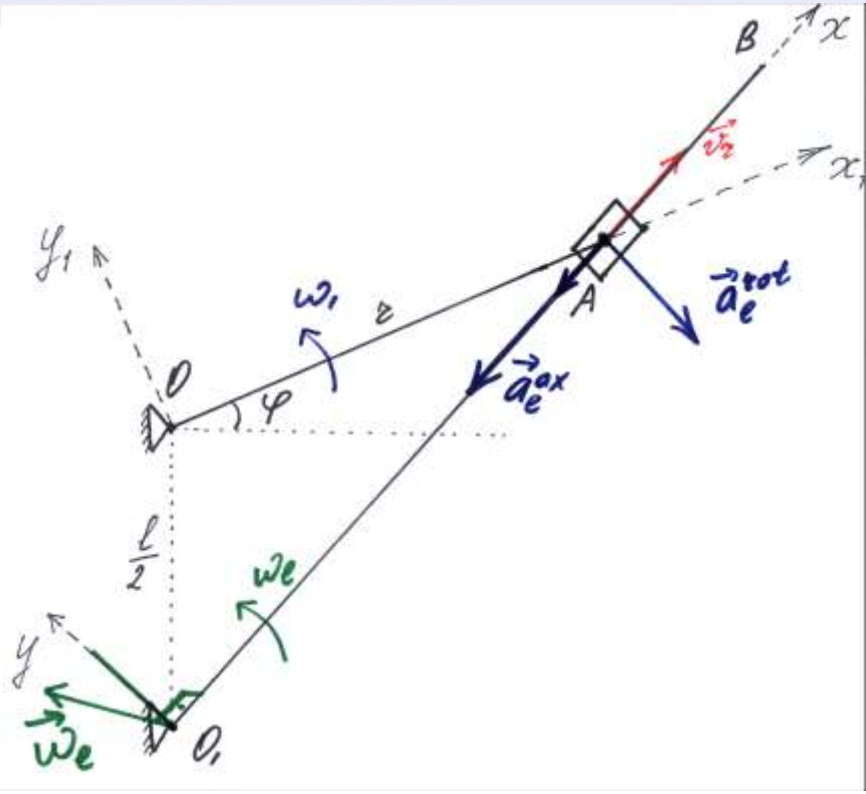
pentru $t = t_1 = 2\frac{1}{6}s$,

$$a_r = -\frac{\pi^3}{3}\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) \cdot 0.2 \cdot 0.25 = -0.26\, m/s^2$$

EXEMPLU

II.2 Accelerația de transport:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e^{rot} + \vec{a}_e^{ax} + \vec{a}_C \quad (2.11)$$



$$a_e^{rot} = \frac{dv_e}{dt} = \frac{d(v_a \cos\alpha)}{dt} = -\frac{\pi^3}{3}\sin(\pi t)\cdot 0.2\cdot 0.97 = -1\ m/s^2$$

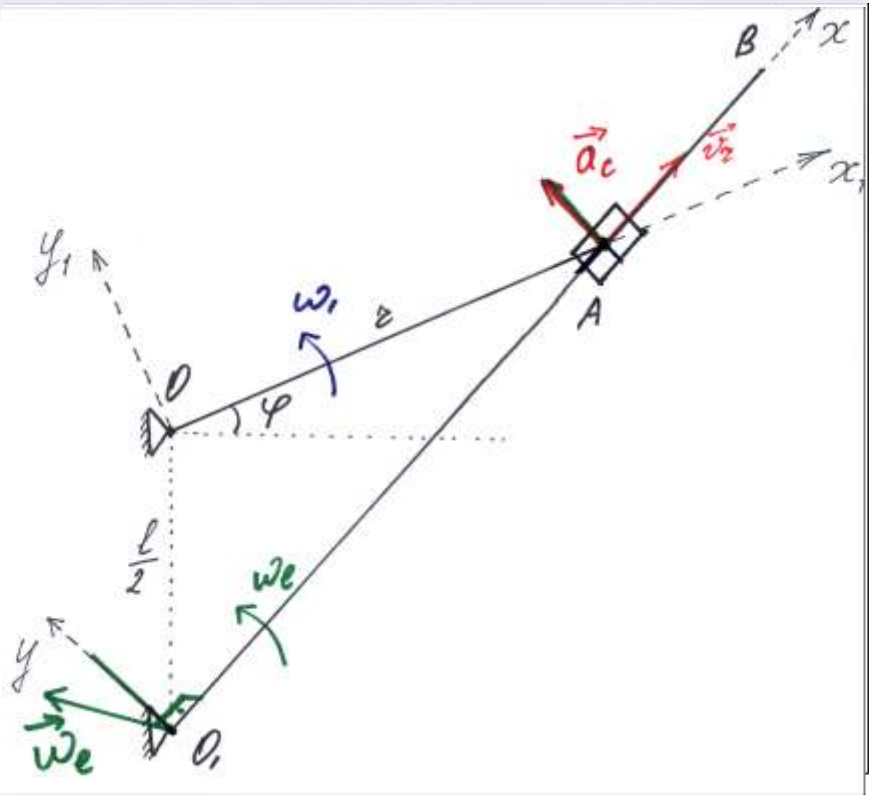
$a_e^{ax} = \omega_e^2 \cdot O_1A.$

Vom determina viteza unghiulară de transport din relația (2.6): $v_r = \omega_e \cdot O_1A$

$\omega_e = \frac{v_r}{O_1A} = \frac{0.55 m/s}{0.3\ m} = 1.83 s^{-1}$ și $a_e^{ax} = 0.67\ m/s^2$

II.3 Accelerația Coriolis:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e^{rot} + \vec{a}_e^{ax} + \vec{a}_C \quad (2.11)$$



$\vec{a}_C = 2[\vec{\omega}_e, \vec{v}_r]$ – reprezentarea vectorială.

În modul:

$$a_C = 2\omega_e v_r \sin(\omega_e, v_r) = 2\omega_e v_r \sin 90^0 = 2 \cdot 1.83\ s^{-1} \cdot 0.14 \frac{m}{s} = 0.51\ m/s^2$$

EXEMPLU

Răspuns:

- Viteza punctului:

$$v_a = \frac{0.1\pi^2\sqrt{3}}{3} m/s$$

$$v_e = 0.55\ m/s$$

$$v_r = 0.14\ m/s$$

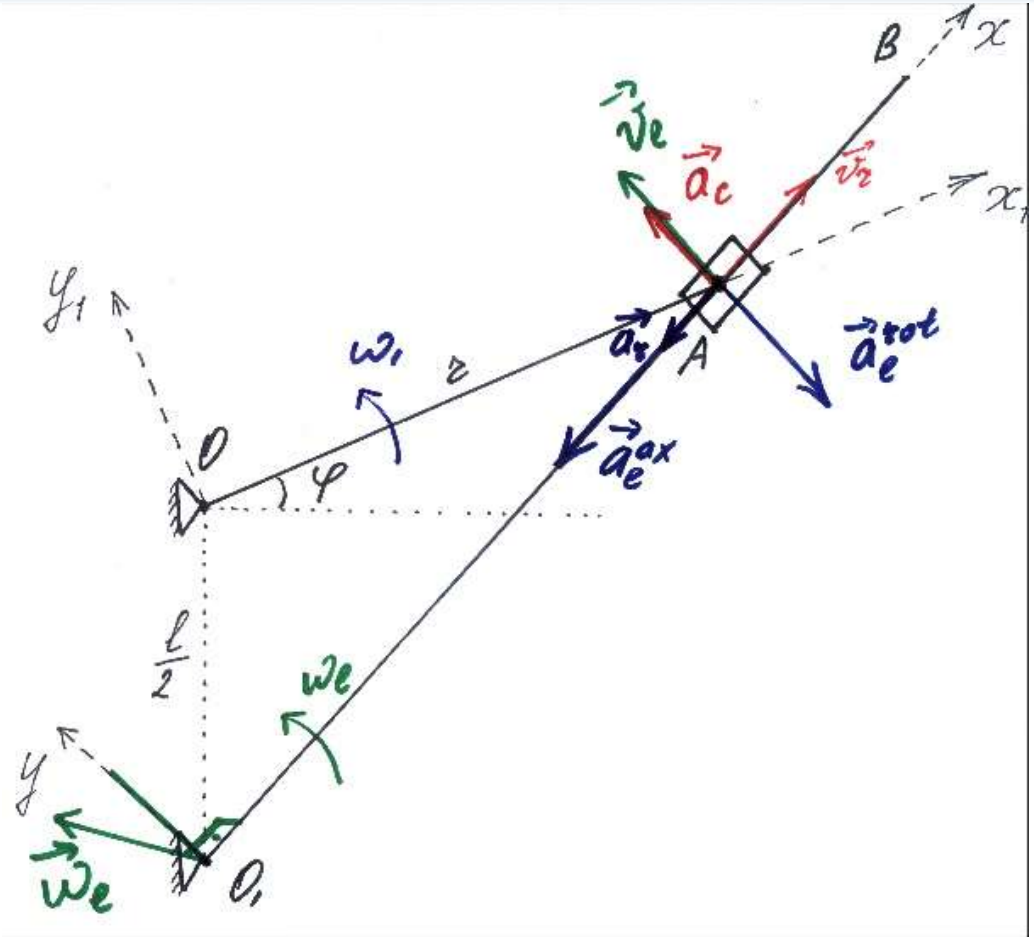
- Accelerația punctului

$$a_r = -0.26\ m/s^2$$

$$a_e^{rot} = -1\ m/s^2$$

$$a_e^{ax} = 0.67\ m/s^2$$

$$a_C = 0.51\ m/s^2$$



Bibliografie

1. Butenin N. V. I. L. Lunţ, D. R. Merkin Curs de mecanică teoretică. Vol. 1, 2. Chişinău 1993.
2. Caraganciu V. M. Colpajiu, M. Ţopa Mecanica teoretică. Chişinău 1994
3. I. V. Meşcerskii. Culegere de probleme la MT, Chişinău, 1991.
4. Caraganciu V. MT, Compendiu şi probleme, 2008
5. С. М. Тарг Краткий курс теоретической механики. Наука, Москва, 1967
6. V. Szolga. Mecanica teoretică. Vol. 1. Statica, Divers-press, Bucureşti, 1994