II АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦИФРОВЫХ АВТОМАТОВ

ТЕМА 4. *ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ*

Двоичные числа могут быть представлены в двух формах:

- в форме с **фиксированной точкой**
- в форме с **плавающей точкой.**

ФОРМА С **ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКОЙ**

- **Представление целых чисел без знака.** $1 \le N \le 2^n-1$

разряд:	(n-1)		1	0
	b_{n-1}	. . .	b_1	b_0

• десятичная точка

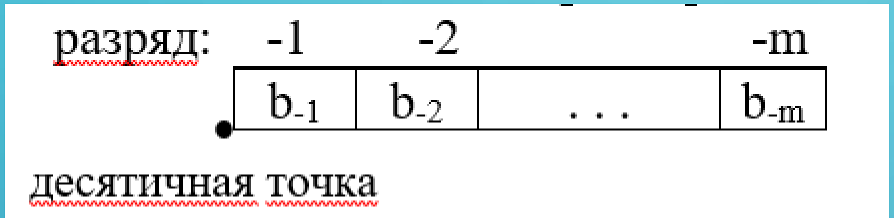
8 бит 1-255

Примеры:

		128	64	32	16	8	4	2	1	
		7	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	.
	38	0	0	1	0	0	1	1	0	.
max	**255**	1	1	1	1	1	1	1	1	.
min	**1**	0	0	0	0	0	0	0	1	.

Форма с **фиксированной точкой**

- **<u>Представление дробных (меньше единицы) чисел без знака</u>.**



$2^{-m} \leq N \leq 1\text{-}2^{-m}$.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ СО ЗНАКОМ

- **в прямом коде**
- **в обратном коде**
- **в дополнительном коде**

Знак – старший бит

+ 0 - 1

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ В ПРЯМОМ КОДЕ.

$$N_{cd} = \begin{cases} 0\ b_{n-1}\, b_{n-2} \ldots b_1\, b_0; & N \geq 0 \\ 1\ b_{n-1}\, b_{n-2} \ldots b_1\, b_0; & N < 0 \end{cases}$$

разряд:	n	(n-1)		1	0	
	Sg	b_{n-1}	. . .	b_1	b_0	•

десятичная точка

$-(2^n-1) \leq N_{cd} \leq 2^n-1.$

			64	32	16	8	4	2	1	
		7	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	.
	38	0	0	1	0	0	1	1	0	.
	-38	1	0	1	0	0	1	1	0	.
max	**127**	0	1	1	1	1	1	1	1	.
min	-127	1	1	1	1	1	1	1	1	.
	0+	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0-	1	0	0	0	0	0	0	0	

ДРОБНЫЕ ЧИСЛА СО ЗНАКОМ

Двоичные дробные числа со знаком имеют формат:

0	-1	-2		-m
Sg •	b_{-1}	b_{-2}	. . .	b_{-m}

Значение дробного числа в прямом коде удовлетворяет неравенству:

$$-(1-2^{-m}) \le N_{cd} \le 1-2^{-m}.$$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ В ОБРАТНОМ КОДЕ

$$N_{cc} = \begin{cases} 0\, b_{n-1}\, b_{n-2} \ldots b_1\, b_0\,; & N \geq 0 \\ 1\, \bar{b}_{n-1}\, \bar{b}_{n-2} \ldots \bar{b}_1\, \bar{b}_0\,; & N < 0 \end{cases}$$

			64	32	16	8	4	2	1
		7	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
	38	0	0	1	0	0	1	1	0
	-38	1	1	0	1	1	0	0	1
max	**127**	0	1	1	1	1	1	1	1
min	-127	1	0	0	0	0	0	0	0
	0+	0	0	0	0	0	0	0	0
	0-	1	1	1	1	1	1	1	1

$-(2^n-1) \leq N_{CI} \leq 2^n-1.$

$[-127; +127].$

В случае дробных чисел, диапазон значений задается неравенством:

$-(1-2^{-m}) \leq N_{CI} \leq 1-2^{-m}.$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ В ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ КОДЕ

$$N_{cc} = \begin{cases} 0\, b_{n-1}\, b_{n-2} \ldots b_1\, b_0\, ; & N \geq 0 \\ 1\, \bar{b}_{n-1}\, \bar{b}_{n-2} \ldots \bar{b}_1\, (\bar{b}_0 + 1)\, ; & N < 0 \end{cases}$$

			64	32	16	8	4	2	1
		7	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
	38	0	0	1	0	0	1	1	0
	-38	1	1	0	1	1	0	0	1
									1
		1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
max	**127**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
	-127	1	0	0	0	0	0	0	1
min	**-128**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
	0+	0	0	0	0	0	0	0	0
	0-	0	0	0	0	0	0	0	0

$-2^n \leq N_{CC} \leq 2^n-1.$

[-128; +127]

$-1 \leq N_{CC} \leq 1-2^{-m}.$

ПРИМЕРЫ

- Определите значение числа, представленного в 8 битах (n = 7) для разных форматов

7	6	5	4	3	2	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1

Целое число без знака

7	6	5	4	3	2	1	0	
1	0	0	1	0	0	1	1	.
128+			16+			2+	1=147	

Дробное число без знака

	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
.	1	0	0	1	0	0	1	1
	$2^{-1}+$			$2^{-4}+$			$2^{-7}+$	$2^{-8}=$
=	0,5+			0,0625+		0,0078125+	0,00392=	0,57352

- Целое число со знаком в прямом коде

7(Sg)	6	5	4	3	2	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1.

$- \quad 2^4 + \quad 2^1 + \quad 2^0 = - \; 16+2+1 = - 19$

- Целое число со знаком в обратном коде

7(Sg)	6	5	4	3	2	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1.

$N_{CI}=1.0010011$

$N_{CD}=1.1101100= -(2^6+2^5+2^3+2^2) = - (64+32+8 +4)= -108$

Целое число со знаком в дополнительном коде

7(Sg)	6	5	4	3	2	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1.

$N_{CC}=1.0010011$

1	1	1	0	1	1	0	0
							1
1	1	1	0	1	1	0	1

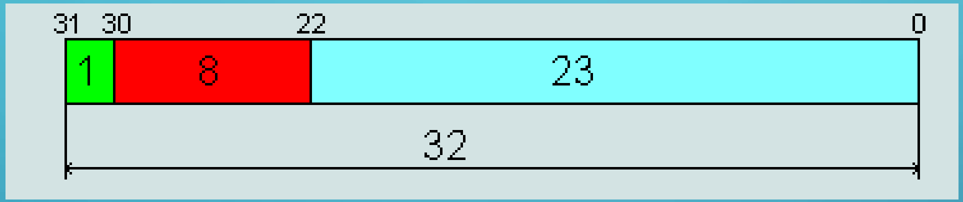
$N_{CD}=$

$= \; - \quad 2^6+ \quad 2^5+ \quad 2^3+ \quad 2^2 + \quad 2^0 = - (64+32+8 +4+1)= -109$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ С ПЛАВАЮЩЕЙ ТОЧКОЙ

$N = m_N 2^{e_N}$, где m_N и e_N соответствуют мантиссе и порядку двоичного числа N.

В соответствии с существующими соглашениями мантисса двоичного числа, представленного в форме с плавающей точкой должна удовлетворять неравенству $\frac{1}{2} \le |m_N| < 1$.



В этом стандартном формате мантисса m_N представлена в прямом коде, причем цифра знака Sg_m находится в старшем разряде. Порядок e_N представляется в дополнительном коде. Таким образом, порядок может принимать значения в интервале $-128 \le e_N \le 127$. Минимальное значение числа в вышеуказанном формате равно

$$|N_{min}| = (0.100...0) \cdot 2^{-128} = 2^{-1} \cdot 2^{-128} = 2^{-129},$$

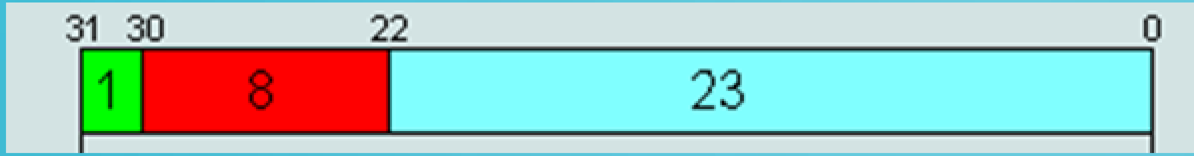
а максимальное

$$|N_{max}| = (0.111...1) \cdot 2^{127} = (1 - 2^{-23}) \cdot 2^{127} \approx 2^{127}.$$

СТАНДАРТ IEEE 754-1985

- как представлять нормализованные положительные и отрицательные числа с плавающей точкой
- как представлять денормализованные положительные и отрицательные числа с плавающей точкой
- как представлять нулевые числа
- как представлять специальную величину бесконечность (Infinity)
- как представлять специальную величину "Не число" (NaN или NaNs)
- четыре режима округления
- **IEEE 754-1985 определяет четыре формата представления чисел с плавающей запятой:**
- с одинарной точностью (single-precision) 32 бита
- с двойной точностью (double-precision) 64 бита
- с одинарной расширенной точностью (single-extended precision) >=43 бит (редко используемый)
- с двойной расширенной точностью (double-extended precision) >= 79 бит (обычно используют 80 бит)

ОПИСАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В 32 БИТНЫЙ ФОРМАТ IEEE 754:



- **Число может быть + или - . Поэтому отводится 1 бит для обозначения знака числа: 0-положительное, 1-отрицательное.**
- **Для определения знака экспоненты, чтобы не вводить ещё один бит знака, добавляют смещение к экспоненте в половину байта +127 (0111 1111).**
- **Оставшиеся 23 бита отводят для мантиссы.**
  Но, у нормализованной двоичной мантиссы первый бит всегда равен 1, так как число лежит в диапазоне 1<=M<2.
  Нет смыла, записывать единицу в отведенные 23 бита, поэтому в отведенные 23 бита записывают остаток от мантиссы.
-

Пример.

Преобразовать 639.6875

$$639.6875 = 1001111111.1011_2$$

$$= 1.0011111111011 \times 2^9$$

$s = 0$

$e = 9 + 127 = 136 = 10001000$

$f = 0011111111011$

Знак	Порядок								Мантисса																						
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	8								23																						

Пример.
Преобразовать

1 01111100 11000000000000000000000

1. Знак=1
2. Порядок $01111100_2=124_{10}$ 124-127=-3 e=-3
3. Мантисса 1,110000……..=1,75

$= (-1.75 * 2^{-3}) = -0.21875.$