ТЕМА 2. МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Существуют несколько методов минимизации:

- аналитический метод (для логических функций с небольшим количеством переменных)

- метод диаграммы Карно (4-6 переменных)

- Алгоритмический метод Квайна - Мак-Класки (до 20 переменных)

- эвристические методы (очень большое количество переменных)

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

В методе используются аксиомы и теоремы булевой алгебры (склеивание, поглощение).

$$F = x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + x_1 x_4$$

$$F = x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + x_1 x_4 =$$

$$= x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_4 + x_1 x_4 = x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_4$$

ДИАГРАММА КАРНО

$f(x_1,x_2,x_3) = \Sigma\ (1,3,4,6)$

	x1	x2	x3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

x3 \ x1x2	00	01	11	10
0	000	010	110	100
1	001	011	111	101

x3 \ x1x2	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

x3 \ x1x2	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1		

Для диаграмм Карно характерно следующее:

1) каждой клетке диаграммы соответствует свой набор;

2) соседние наборы расположены рядом в строке либо в столбце.

Соседними наборами называются наборы, отличающиеся одной компонентой. Столбцы, расположенные по краям диаграммы, тоже считаются соседними.

Общее правило склеивания на диаграммах Карно можно сформулировать следующим образом:

Склеиванию подлежат прямоугольные конфигурации, заполненные единицами и содержащие число клеток, являющееся степенью 2. *Получающееся новое элементарное произведение определяется как произведение переменных,* ***не меняющих своего значения*** *на всех склеиваемых наборах.*

Число m оставшихся переменных в элементарном произведении определяется из выражения:

$$m = n - \log_2 M,$$

где n — число переменных функции; M — число склеиваемых наборов (клеток).

Минимизация булевой функции заключается в нахождении минимального покрытия всех единиц (нулей) диаграммы Карно блоками из единиц (нулей).

$\bar{x}_1$ $\bar{x}_3$

ПРИМЕР1 МДФ

- 1. $f(x_1,x_2,x_3) = \Sigma\,(1,3,4,6)$

	x1	x2	x3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

x3 \ x1x2	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1		

$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_3$
0 $\cancel{0}$ 1	1 $\cancel{1}$ 0
0 $\cancel{1}$ 1	1 $\cancel{0}$ 0
$\bar{x}_1$ x_3	x_1 $\bar{x}_3$

$$F = \bar{x}_1 x_3 + x_1 \overline{x_3}$$

ПРИМЕР 2 НАЙТИ МИНИМАЛЬНУЮ ДНФ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma\,(3, 7, 8, 9, 12, 13, 15)$

	x1	x2	x3	x4	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	0000	0100	1100	1000
01	0001	0101	1101	1001
11	0011	0111	1111	1011
10	0010	0110	1110	1010

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

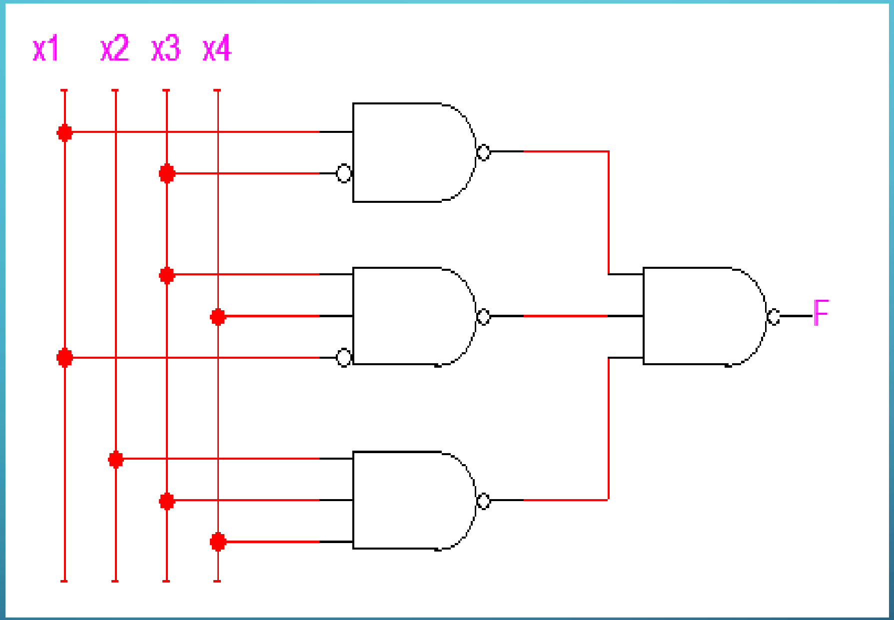
x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00			1	1
01			1	1
11	1	1	1	
10				

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00			1	1
01			1	1
11	1	1	1	
10				

$$F = x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4$$

РЕАЛИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА ЭЛЕМЕНТАХ И-НЕ

$$F = x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = \overline{\overline{x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4}} = \overline{\overline{x_1\bar{x}_3} \cdot \overline{\bar{x}_1 x_3 x_4} \cdot \overline{x_2 x_3 x_4}}$$



C=11 λ
TT_d=2 τ

НАЙТИ МИНИМАЛЬНУЮ КНФ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma\ (3, 7, 8, 9, 12, 13, 15)$

	x1	x2	x3	x4	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

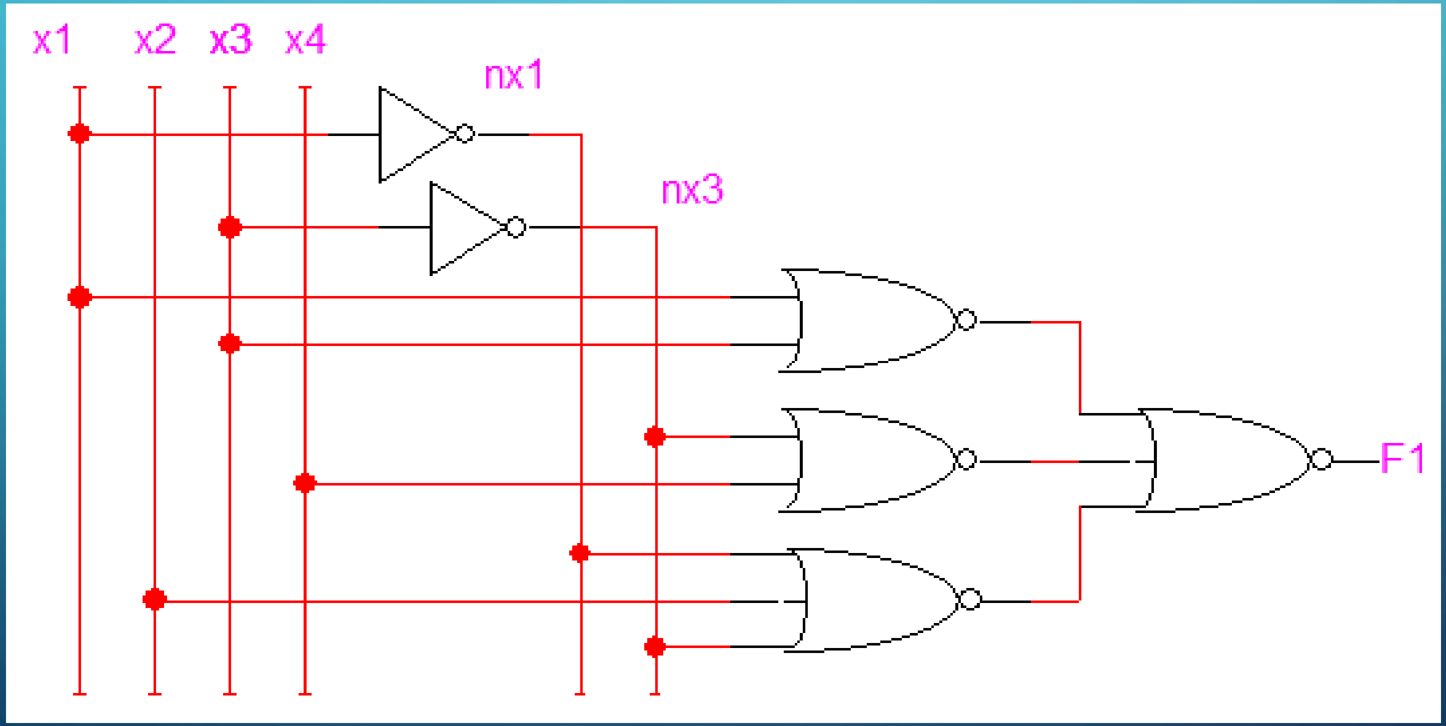
x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	0	0		
01	0	0		
11				0
10	0	0	0	0

$$F = (x_1 + x_3)\cdot(\bar{x}_3 + x_4)\cdot(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)$$

РЕАЛИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА ЭЛЕМЕНТАХ ИЛИ-НЕ

$$F = (x_1 + x_3)\cdot(\bar{x}_3 + x_4)\cdot(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3) = \overline{\overline{(x_1 + x_3)\cdot(\bar{x}_3 + x_4)\cdot(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)}} =$$

$$= \overline{\overline{(x_1 + x_3)} + \overline{(\bar{x}_3 + x_4)} + \overline{(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)}}$$



C=12 λ
T_d=3 τ

ПРИМЕР 3

f(x1,x2,x3,x4) = Σ (0,3,4,5,6,7,8,13,15)

	x1	x2	x3	x4	F
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	1	1		1
01		1	1	
11	1	1	1	
10		1		

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	1	1		1
01		1	1	
11	1	1	1	
10		1		

$$F = \bar{x}_1 x_2 + x_2 x_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_3 x_4$$

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00			0	
01	0			0
11				0
10	0		0	0

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00			0	
01	0			0
11				0
10	0		0	0

$$F = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_4)\cdot(x_2 + x_3 + \bar{x}_4)\cdot(x_2 + \bar{x}_3 + x_4)\cdot(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_4)$$

ПРИМЕР 4

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma\,(0,1,2,8,9,10,11,12,13,14)$$

	x1	x2	x3	x4	F
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	1		1	1
01	1		1	1
11				1
10	1		1	1

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	1		1	1
01	1		1	1
11				1
10	1		1	1

$$F = \bar{x}_2\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2\bar{x}_3$$

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00		0		
01		0		
11	0	0	0	
10		0		

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00		0		
01		0		
11	0	0	0	
10		0		

$$F = (x_1 + \bar{x}_2)\cdot(x_1 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)\cdot(\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)$$

ДИАГРАММЫ КАРНО ДЛЯ НЕПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Неполностью определенные функции - это те функции, которые в определенных точках диапазона определения могут принимать значение 0 или значение 1

- Существуют 2 две возможности:
- - входные комбинации, для которых функция имеет индифферентные (неопределенные) значения;
- - комбинации переменных, которые не могут возникнуть физически; Неуказанные значения, а также соответствующие места на диаграмме Карно называются «безразличными», «произвольными» или «избыточными». Они отмечены знаком * и будут рассматриваться во время минимизации как имеющие значение 1 или 0, в зависимости от ситуации, чтобы получить наилучшую возможную минимизацию.

ПРИМЕР

$f(x1,x2,x3,x4) = \Sigma\,(1,3,11,15) + *(0,4,6,7,9,12)$

	x1	x2	x3	x4	F
0	0	0	0	0	*
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	*
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	*
7	0	1	1	1	*
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	*
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	*
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	*	*	*	
01	1			*
11	1	*	1	1
10		*		

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	*	*	*	
01	1			*
11	1	*	1	1
10		*		

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	*	*	*	
01	1			*
11	1	*	1	1
10		*		

$$F = x_3 x_4 + \bar{x}_2 x_4$$

МИНИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Отдельная минимизация булевых функций не всегда оптимальна, так как можно получить термины, общие для нескольких функций. Эти условия будут реализованы с использованием общих логических элементов, что снизит стоимость схемы.

$$F = \begin{cases} F_1 = \sum(0,2,3,4,7) \\ F_2 = \sum(0,3,4,5,6,7) \end{cases}$$

1. Минимизируется каждая функция в отдельности

x3 \ x1x2	00	01	11	10
0	1	1		1
1		1	1	

x3 \ x1x2	00	01	11	10
0	1	1		1
1		1	1	

$$F_1 = \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_2x_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3$$

x3 \ x1x2	00	01	11	10
0	1		1	1
1		1	1	1

x3 \ x1x2	00	01	11	10
0	1		1	1
1		1	1	1

$$F_2 = x_2x_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1$$

2. Устанавливаются общие термины

$$F_1 = \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_2x_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3 \qquad F_2 = x_2x_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1$$

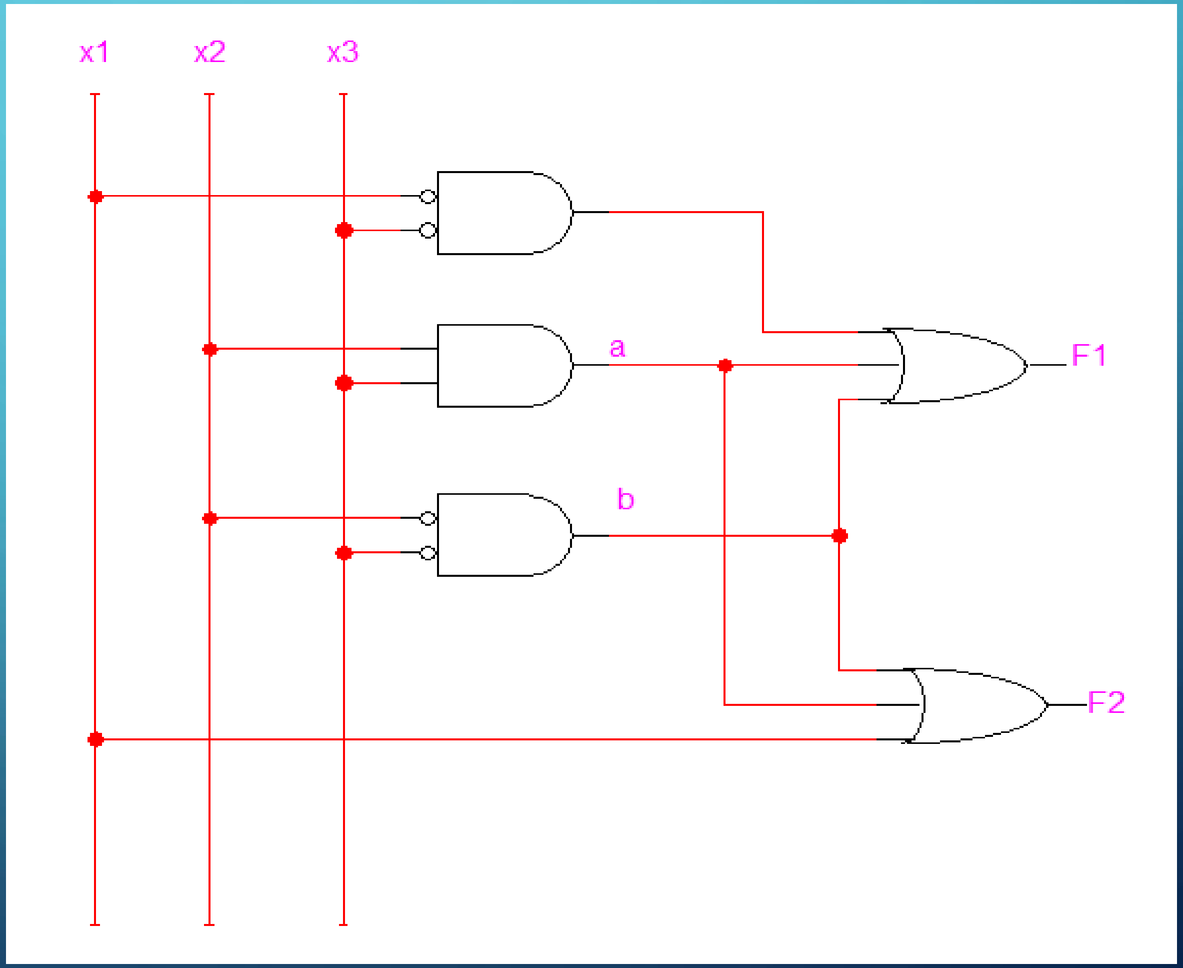
$$a = x_2x_3$$

$$b = \bar{x}_2\bar{x}_3$$

$$F = \begin{cases} F_1 = \bar{x}_1\bar{x}_3 + a + b \\ F_2 = a + b + x_1 \end{cases}$$

3. Реализуется логическая функция без повторения общих терминов.

$$F = \begin{cases} F_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 + a + b \\ F_2 = a + b + x_1 \end{cases}$$



МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИИ 5 ПЕРЕМЕННЫХ

Диаграмма Карно для функции 5-ти переменных

x4x5 \ x1x2x3	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

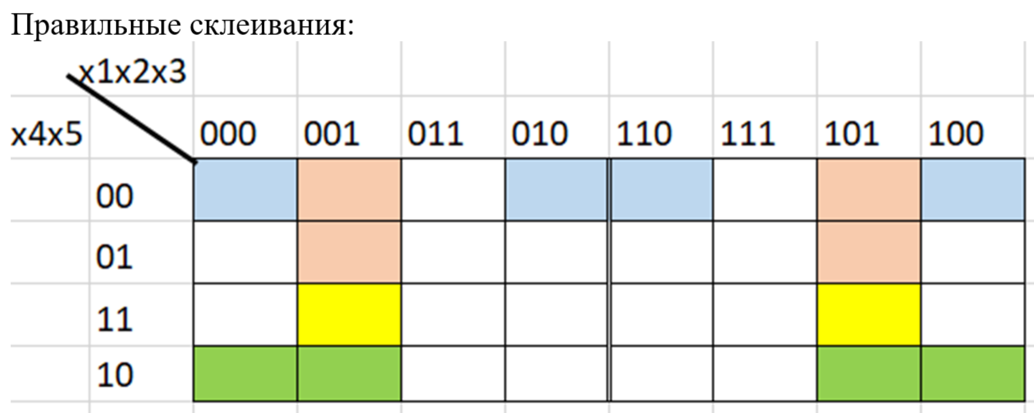
Reguli de minimizare.

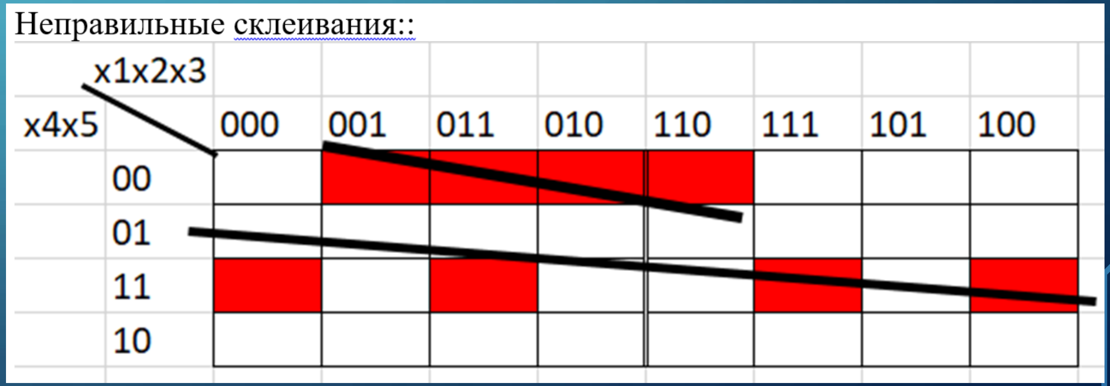
Правила минимизации.

- составляются группы ячеек (субкубов) в которых количество ячеек равно степени двойки.

- могут быть присоединены ячейки, которые не находятся в непосредственной близости, если код Грея ячейки отличается на одну переменную.

- не все группы ячеек в которых количество ячеек равно степени двойкимогут быть склеены. Те, в которых нарушена симметрия не склеиваются.





ПРИМЕР:

$f(x_1,x_2,x_3,x_4, x_5) = \Sigma\ (0,1,2,6,7,8,10,11,13,16,17,18,22,23,24,26,27,29,31)$

Diagrama Karnaugh pentru funcții de 5 variabile

x4x5 \ x1x2x3	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

	x1x2x3		5		1			
x4x5	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1			1	1			1
01	1		1			1		1
3 11		1		1	1	1	1	
10	1	1		1	1		1	1
		6	4				2	

x4x5 \ x1x2x3	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1			1	1			1
01	1		1			1		1
11		1		1	1	1	1	
10	1	1		1	1		1	1

$$F = \bar{x}_3 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_5 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_2 x_3 x_4$$

$F=(x_1,x_2,x_3,x_4, x_5) = \Sigma\ (0,3,6,7,12,14,15,16,19,22,27,28,30)$