Mecanica

CINEMATICA PUNCTULUI

CINEMATICA PUNCTULUI

- **Introducere**
- **Noțiuni de bază**
- **Moduri de definire ale mişcării**
- **Viteza punctului**
- **Probleme rezolvate**

Introducere

Toate corpurile fizice (corpurile rigide, lichidele și gazele, moleculele și particulele elementare) sunt formate din **substanță**.

Particulele elementare, cât și corpurile macroscopice, sunt compuse din componente mai mici, care interacționează prin intermediul **câmpurilor**.

Substanța și câmpul constituie realitatea obiectivă și reprezintă **lumea materială**, care ne înconjoară.

Aristotel (384–322 î.Hr.) – introducerea termenului „Mecanica” – truc, mașină

Arhimede (287 – 212 î.Hr.) – părintele mecanicii ca știință (pârghia, forța Arhimede, centrul de greutate...)

Galileo Galilei (1564–1642) – principiile inerției și conceptele actuale despre mișcare

N. Copernic (1473–1543) –Sistemul heliocentric

I. Kepler (1571 – 1630) – legile mișcării planetelor. Aceste legi au servit premise pentru formulare legii atracției universale de către **I. Newton**.

R. Descartes (1596–1650) – ideea de conservare a mișcării mecanice (un prim pas spre legile conservării mărimilor mecance și a energiei)

•**C. Huygeens** (1629–1695) – a generalizat conceptul de accelerație în cazul mișcării curbilinii. A propus descompunerea în componenta normală și tangențială a accelerației.

•**I. Newton** (1643–1727) – „ ***Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica”*** **(1687).**

A totalizat realizările predecesorilor săi și a formulat trei legi fundamentale ale mecanicii, definind calea de dezvoltare a acestei științe. A formulat legea atracței universale, a definit principiul *inerției*.

G. Leibnitz (1646 – 1716) – contemporan a lui Newton. Calculul elementelor infinitezimale. Propune ideea de „forță vie”, caracteristică corpurilor în mișcare, proporțională cu *produsul dintre masa corpului și patratul vitezei sale*.

L. Euler (1707 – 1783) – bazele dinamicii rigidelor și hidromecanicii. Mișcare corpurilor cu un punct fix. Teorema despre variația momentului cantității de mișcare. A formulat bazele teoretice pentru construcția corăbiilor, turbinelor, stabilitatea barelor rigide...

J.L.Lagrange (1736 – 1813) – dinamica analitică. Principiul deplasărilor virtuale.

M. Ostrogradskii (1801 – 1861), **W. Hamilton** (1805 – 1865), **C.Jacobi** (1804 – 1851), **K.F.Gauss** (1777 – 1855).

Mecanica este știința despre cele mai simple forme ale mișcării substanței și câmpului, care în forma finală se rezumă la deplasările corpurilor fizice dintr-o poziție în alta.
Mecanica teoretică este știința care studiază legile generale care descriu mișcarea mecanică și interacțiunile mecanice.
Mecanica cuantică - mișcare microparticulelor
Mecanica relativistă – mișcarea particulelor la viteze mari, comparabile cu viteza luminii
Mișcarea mecanică se numește schimbarea în timp a poziției relative a corpurilor materiale în timp (sau variația poziției relative a părților componente ale aceluiaș corp)

Mecanica teoretică se împarte în trei compartimente:

- **Statica – Partea mecanicii teoretice în care se studiază influența forțelor asupra stării de mișcare a corpurilor materiale. Include studiul stării lor de echilibru în raport cu un reper considerat fix.**
- **Cinematica-Partea componentă a mecanicii care studiază relațiile dintre parametrii geometrici și cei care caracterizează mișcările corpurilor în spațiu și timp, fără a lua în considerație pricinile mișcărilor.**
- **Dinamica-Studiază mișcarea corpurilor materiale, în raport cu un reper inerțial, sub acțiunea forțelor. În baza acestei părți a mecanicii stă un sistem de axiome sau legi, care într-o formă strictă constată relațiile dintre pricinile și urmările în starea de mișcare mecanică a corpurilor materiale.**

INTRODUCERE

- **Mecanica teoretică** studiază legile generale ale mişcării corpurilor solide în raport cu alte corpuri, considerate sisteme fizice de referință (repere).
- În mecanica clasică spaţiul se consideră continuu, izotrop, omogen şi euclidian tridimensional (propritățile căruia nu depind de mişcarea corpurilor). Poziția fiecărui punt se determină univoc prin 3 coordonate.
- **Timpul** se consideră unidimensional, absolut şi infinit.
- **Sistem de referință** – ansamblul format din corpul de referință, sistemul de coordonate şi timp.

Modelele principale ale mecanicii:

1) **Punct material -** corp fără dimensiuni cu o masă finită.
2) **Sistem material -** mulțime finită de puncte materiale care acționează reciproc.
3) **Corp rigid** – un volum finit umplut continuu cu materie în care distanțele dintre oricare două puncte nu se modifică în procesul mişcării şi interacțiunii.
4) **Sistem mecanic** – un număr finit de rigide, legate între ele.

INTRODUCERE

- **Cinematica** este o parte componentă a mecanicii, care studiază relațiile dintre parametrii geometrici și cei care caracterizează mișcările corpurilor în spațiu și în timp, fără a lua în considerație cauzele mișcărilor.
- Sistemele de referință în cinematică, în majoritatea cazurilor, pot fi considerate fixe.

Compartimentele principale ale cinematicii sunt:

1) **Cinematica punctului**
2) **Cinematica corpului rigid**
3) **Mișcarea compusă a unui punct material**
4) **Mișcarea compusă a unui corp rigid**

CINEMATICA PUNCTULUI

- **Cinematica punctului** studiază mișcarea punctului și este problema de bază pentru studierea mișcării sistemului de puncte materiale și a corpului solid.
- Prin **punct material** vom înțelege corpul dimensiunile căruia pot fi neglijate în condițiile respective.
- Metoda de descriere a punctului presupune cunoașterea poziției punctului în orice moment de timp (legea mișcării punctului).
- În caz general diferite puncte ale corpului în mișcare efectuează diferite mișcări.

De exemplu, la rostogolirea unei roți pe o șină rectilinie centrul roții se mișcă pe o linie dreaptă, iar punctele de pe obada roții se mișcă după cicloide. De aceea înainte de studierea mișcării corpului trebuie să studiem mișcarea punctului.

- Linia curbă continuă pe care o descrie punctul în mișcarea sa se numește **traiectoria punctului.**
- Dacă traiectoria punctului este o linie dreaptă, mișcarea punctului se numește **rectilinie**.
- Dacă traiectoria punctului este o linie curbă atunci mișcarea se numește **curbilinie**.

MODURI DE DEFINIRE A MIȘCĂRII

- Mișcarea unui punct față de sistemul de referință ales se consideră definită, dacă se știe procedeul cu ajutorul căruia poate fi determinată poziția punctului în orice moment de timp.

În cinematică se folosesc trei moduri de definire a mișcării:

1) **Modul vectorial**
2) **Modul de definire a mișcării prin coordonate**
3) **Modul natural**

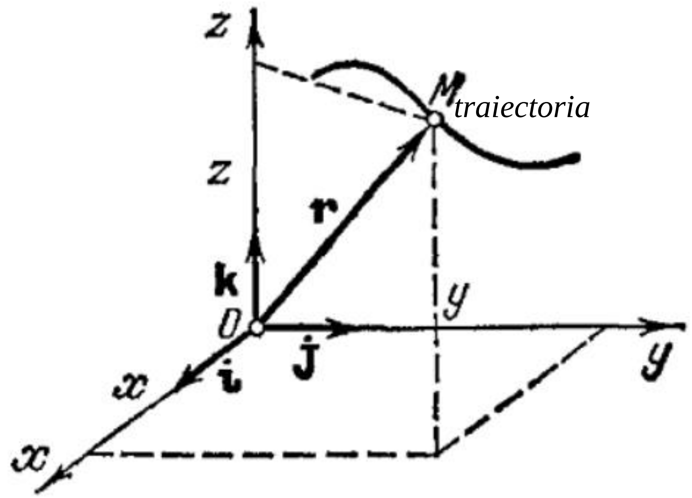


Fig. 1

➢ Modul vectorial

Poziția unui punct în spațiu va fi pe deplin determinată, dacă vectorul de poziție a lui $\vec{r}$, trasat dintr-un centru oarecare dat, este cunoscut ca funcție de timp, adică

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{1}$$

MODURI DE DEFINIRE A MIȘCĂRII

Determinarea mișcării prin coordonate

Considerînd mișcarea în sistemul de coordonate carteziene rectangulare, metoda menționată constă în definirea coordonatelor x, y, z ale punctului M ca funcții cunoscute de timp:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \qquad (2)$$

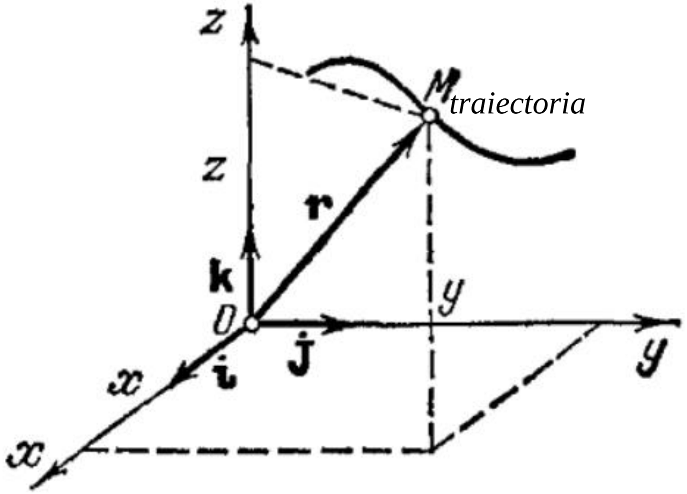


Fig. 1

- Ecuațiile de mișcare ale punctului (2) reprezintă concomitent și ecuația traiectoriei în formă parametrică, paramerul fiind timpul t.
- Dacă este necesar să determinăm ecuația traiectoriei în coordonate, atunci trebuie să eliminăm într-un oarecare mod timpul t din aceste ecuații.

EXEMPLU

Problema 1. Mișcarea unui punct în planul *xOy* este definită cu ajutorul ecuațiilor

$$x = at, \quad y = bt^2 + c \qquad (a > 0, b > 0, c > 0) \qquad (3)$$

și mișcarea începe în momentul $t = 0$. Să se determine ecuația traiectoriei în coordonate.

Rezolvare:

- Din prima ecuație rezultă că $t = \frac{x}{a}$.
- Deci, ecuația traiectoriei punctului va fi $y = \frac{b}{a^2}x^2 + c$ - ecuația parabolei. Însă nu întreaga parabolă va fi traiectorie, dar numai partea ei reprezentată în Fig. 2 prin linie continuă.
- Aceasta rezultă din faptul că de la momentul inițial $t = 0$ (cînd $x = 0, y = c$) coordonata *x* va crește (timpul *t* este pozitiv și neîntrerupt crește).
- Direcția mișcării punctului pe traiectorie se determină din ecuația (3) și este indicată în Fig. 2 printr-o săgeată.

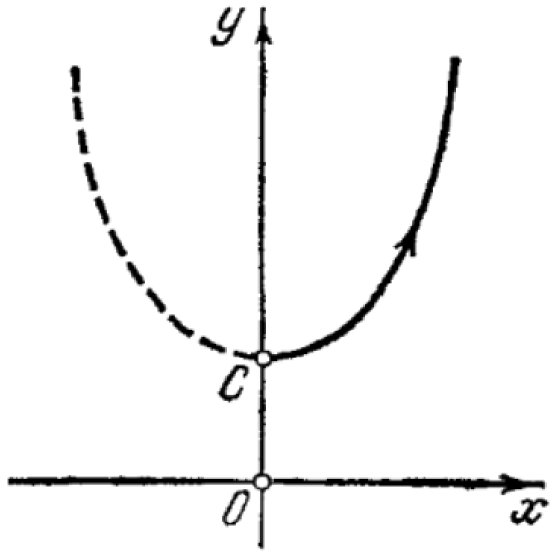


Fig. 2

EXEMPLU

Problema 2. Mişcarea unui punct în planul *xOy* este definită de ecuaţiile:

$$x = a\cos\omega t\,, \quad y = b\sin\omega t. \tag{4}$$

Să se afle ecuaţia traiectoriei în coordonate.

Rezolvare:

Ecuațiile $\frac{x}{a} = \cos\omega t$ și $\frac{y}{b} = \sin\omega t$

trebuie ridicate la patrat și adunate. Atunci obținem ecuația traiectoriei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Ea reprezintă o elipsă (Fig. 3).
- Din ecuațiile (4) rezultă că mișcarea își ia începutul în punctul A cu coordonatele $x = a,\ y = 0$ și are loc în direcția indicată de săgeată (se presupune că mișcarea începe în momentul $t = 0$).

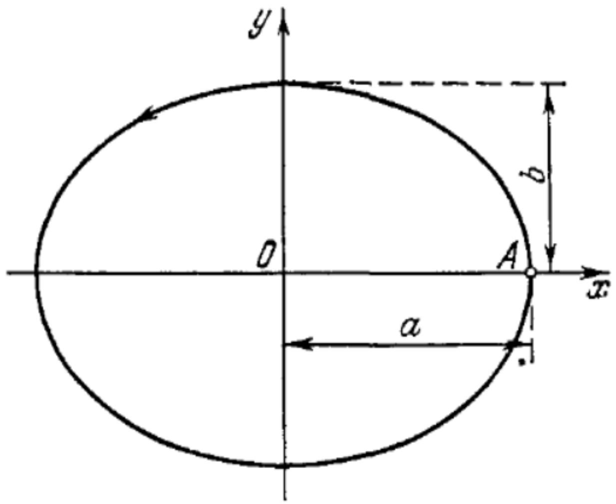


Fig. 3

MODURI DE DEFINIRE A MIȘCĂRII

Modul natural

- În modul natural de definire a mișcării se indică ***traiectoria punctului și legea lui de mișcare pe această traiectorie.***

- Fie un punct se mișcă față de sistemul de referință ales după traiectoria dată (Fig. 4) definită de ecuațiile

$$f_1(x, y, z) = 0, \; f_2(x, y, z) = 0. \tag{5}$$

- Fie M_0 un oarecare punct fixat de pe traiectorie. Alegînd sensul pozitiv de măsurare a arcului pe traiectorie, vom determina poziția punctului M în orice moment de timp, dacă vom cunoaște legea de mișcare

$$s = s(t) \tag{6}$$

Linia curbă construită în planul (t, s) care exprimă dependența $s = s(t)$ se numește ***graficul mișcării***.

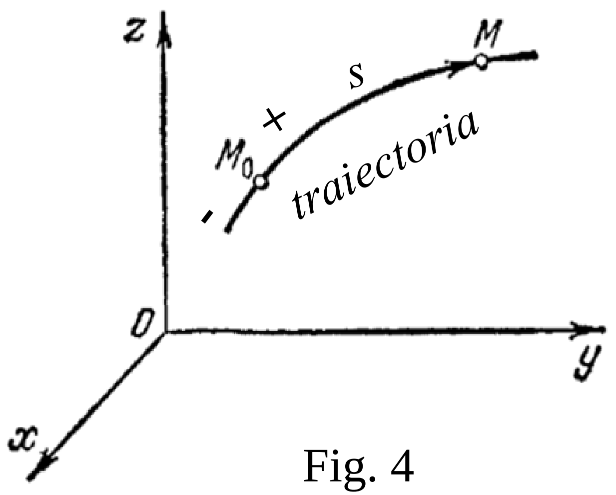


Fig. 4

MODURI DE DEFINIRE A MIȘCĂRII

- Dacă mișcarea are loc în direcția creșterii arcului, atunci diferențiala arcului

$$ds = \dot{s}(t)\, dt$$

va fi pozitivă.

- Dacă însă mișcarea are loc în direcția descreșterii arcului, diferențiala arcului va fi negativă.

(În mecanică derivata după timp se notează cu punct deasupra funcției, deci $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$.)

Menționăm că drumul s' parcurs de punct totdeauna va crește și, prin urmare, este pozitiv, adică

$$ds' = |ds|.$$

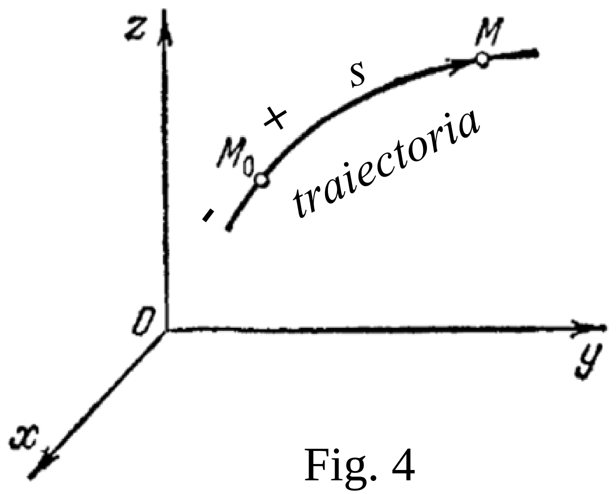


Fig. 4

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

EXEMPLU

Problema 3. Legea mișcării unui punct pe traiectorie are forma:

$$s = -t^2 + 4t + 3$$

(t – în secunde, s – în metri). Construiți și analizați graficul mișcării

Rezolvare:

- Graficul mișcării va fi curba reprezentată în fig. 5.
- Din acest grafic rezultă că arcul *s* crește pînă la valoarea *s* = 7 *m* pentru *t* = 2 *sec* după care începe să descrească.
- Mersul graficului mișcării în domeniul valorilor negative ale lui *s* caracterizează mărirea valorii absolute a arcului la mișcarea punctului de la originea M_0 în direcția contrară măsurării pozitive a arcului.
- În fig. 5 este reprezentată și curba $s'(t)$, care determină graficul funcției $s_1'(t) + 3$, unde $s_1'(t)$ este drumul parcurs de punct. Pînă la *t* = 2 *sec* curba s' și curba *s* coincid, pentru *t* 2 curba $s'(t)$ este arătată punctat.

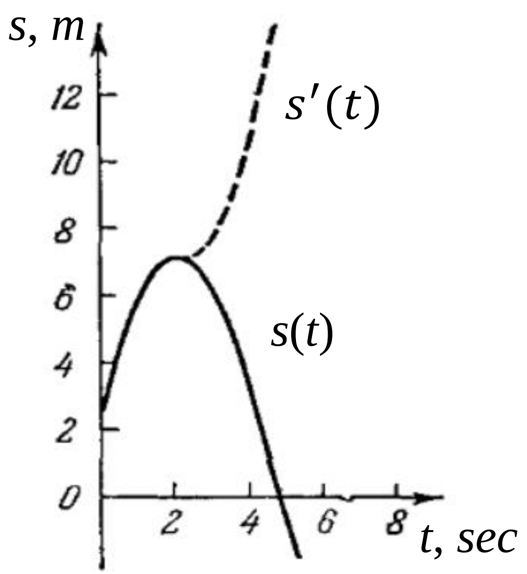


Fig. 5

LEGĂTURA DINTRE MODURILE DE DEFINIRE

Toate modurile de definire considerate sînt interdependente.

Legătura dintre modul de definire vectorial și cel al coordonatelor este dat de formula:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{7}$$

unde $\vec{i}$, $\vec{j}$ și $\vec{k}$ sînt versorii axelor x, y, z.

Modulul lui $\vec{r}$ se determină din formula:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{8}$$

iar direcția se determină prin cosinusurile directoare

$$\cos(x, \vec{r}) = \frac{x}{r}, \qquad \cos(y, \vec{r}) = \frac{y}{r}, \qquad \cos(z, \vec{r}) = \frac{z}{r}. \tag{9}$$

LEGĂTURA DINTRE MODURILE DE DEFINIRE

Să examinăm și **trecerea de la metoda coordonatelor la modul natural.**

- Fie mișcarea este definită de ecuațiile (2) ($x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$).
- Excludem din aceste ecuații timpul *t* și obținem ecuația traiectoriei (5)

($f_1(x, y, z) = 0,\ f_2(x, y, z) = 0$).

- Să determinăm acum legea de mișcare $s = s(t)$.

Diferențiala arcului poate fi calculată după formula (Fig. 6): $ds = \pm\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$,

unde dx, dy, dz sînt diferențialele coordonatelor punctului
$dx = \dot{x}(t)\,dt,\quad dy = \dot{y}(t)\,dt,\quad dz = \dot{z}(t)\,dt.$

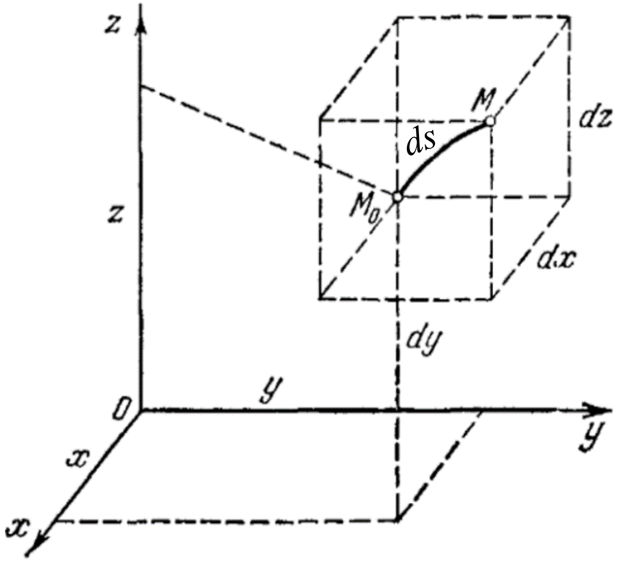


Fig. 6

Formula pentru ds poate fi transcrisă sub forma: $ds = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt.$

Integrînd această expresie în intervalul de timp de la $t = 0$ pînă la un moment arbitrar de timp *t*, obținem legea de mișcare

$$s = \pm\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ dt.$$

Semnul „+” sau „-” din fața integralei se ia în dependență de alegerea direcției pozitive de mișcare a arcului; dacă mișcarea începe în direcția pozitivă a arcului trebuie să luăm semnul „+”, în caz contrar - semnul „-”.

VITEZA PUNCTULUI

Să trecem acum la determinarea noțiunii de viteză a punctului și la metodele de determinare a ei.

- Fie în momentul t poziția punctului este determinată de vectorul de poziție $\vec{r}(t)$, iar în momentul $t + \Delta t$ – de vectorul de poziție $\vec{r}(t + \Delta t\ )$. Vectorul

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t\ ) - \vec{r}(t)$$

îl vom numi vectorul deplasării punctului în timpul Δt (fig. 7).

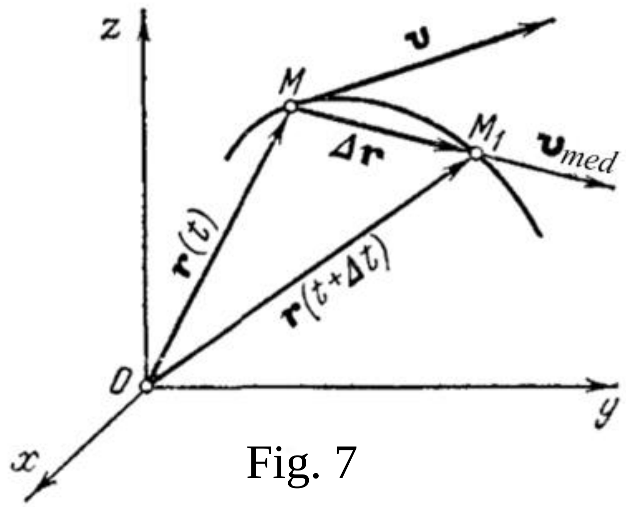


Fig. 7

Raportul dintre vectorul $\Delta\vec{r}$ și intervalul de timp Δt se numește ***viteza medie în intervalul de timp*** $\boldsymbol{\Delta t}$.

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Se numește viteză în momentul dat *limita raportului dintre vectorul deplasării punctului și intervalul de timp, în care a avut loc această deplasare, cînd acest interval de timp tinde către zero*, adică

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \qquad (10) \qquad [v]_{SI} = \frac{m}{s}.$$

Din definiția aceasta se vede că *viteza unui punct este egală cu derivata vectorului lui de poziție în raport cu timpul*. În Fig. 7 sunt indicate viteza medie $\vec{v}_{med}$ și viteza $\vec{v}$ a punctului *M*. Viteza punctului, $\vec{v}$, este un vector orientat de-a lungul tangenței la traiectoria punctului în direcția mișcării punctului.

VITEZA PUNCTULUI

➢ Viteza punctului în cazul mișcării lui definite prin coordonate

- Fie mișcarea unui punct definită într-un sistem de coordonate carteziene fix, adică fie date coordonatele punctului ca funcții de timp

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t).$$

Conform expresiei (7) avem

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Întrucît versorii $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ ai sitemului ales de coordonate sînt constanți, atunci pe baza formulei (10) obținem

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

În fig. 8 este arătată descompunerea vectorului viteză în componente după axele de coordonate *Oxyz*.

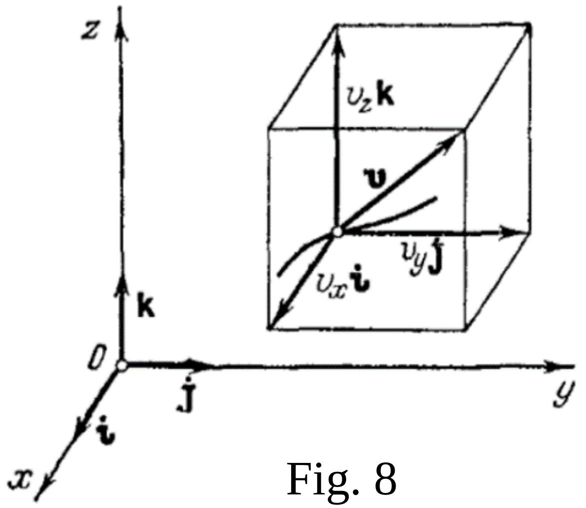


Fig. 8

VITEZA PUNCTULUI

Așadar, proiecțiile vitezei pe axele de coordonate v_x, v_y, v_z vor fi

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt},$$

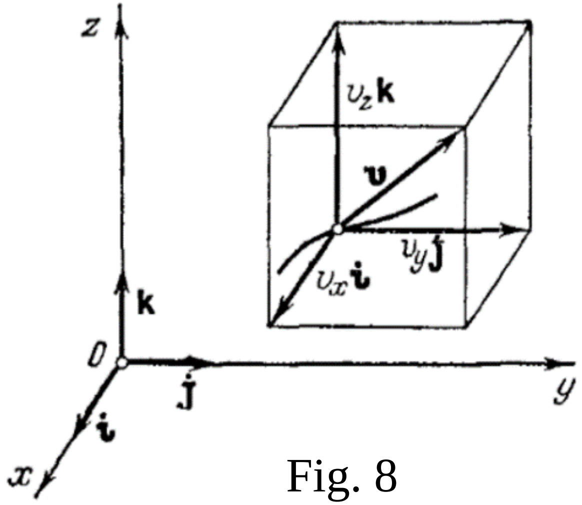


Fig. 8

adică *proiecția vitezei punctului pe axa de coordonate este egală cu prima derivată în raport cu timpul de la coordonata respectivă a acestei axe.*

Deoarece am convenit să notăm derivata în raport cu punctul printr-un punct deasupra funcției, formulele obținute le putem transcrie sub forma:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}. \tag{11}$$

- Modulul vitezei se determină prin formula

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \tag{12}$$

VITEZA PUNCTULUI

iar direcția vitezei – prin cosinusurile directoare

$$\cos(x, \vec{v}) = \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}},$$
$$\cos(y, \vec{v}) = \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}, \qquad (13)$$
$$\cos(z, \vec{v}) = \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}.$$

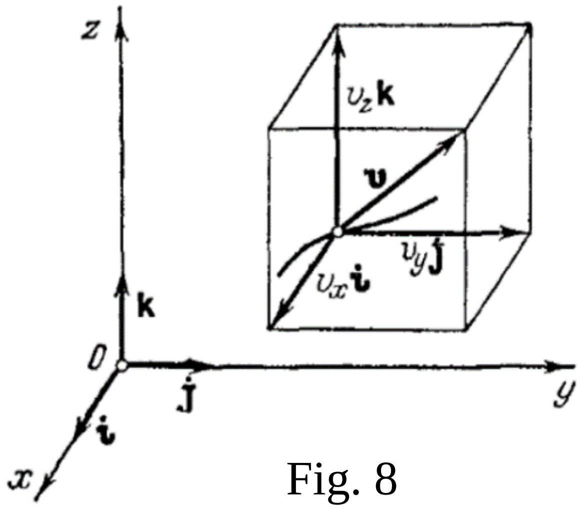


Fig. 8

Dacă modulul vitezei nu se schimbă cu timpul, mișcarea punctului se numește ***uniformă*.**

➢ **Determinarea vitezei prin metoda naturală de definire a mișcării**

- În metoda naturală de definire a mișcării unui punct, se cunoaște traiectoria acestuia și ecuația mișcării $s = s(t)$.

Fiecărei valoare a coordonatei curbilinii s îi corespunde raza sa vectoare $\vec{r}$, care în acest caz poate fi considerată ca o funcție complexă

$$\vec{r} = \vec{r}(s(t)).$$

VITEZA PUNCTULUI

Luînd derivata în raport cu timpul de la raza vectoare, obținem viteza:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}.$$

- Analizăm vectorul $\frac{d\vec{r}}{ds}$.
- În intervalul de timp Δt punctul se va deplasa pe curbă din poziția M în poziția M_1.
- Arcul $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta s > 0$, dacă mișcarea are loc în direcția pozitivă a măsurării arcului (fig. 9, a) și $\Delta s < 0$, dacă mișcarea are loc în direcție opusă (fig. 9, b).
- Cînd $\Delta s \to 0$, adică cînd $M_1 \to M$, raportul dintre arcul și coarda care îl subîntinde este egal în modul cu unu, adică

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \; 0} \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right| = 1,$$

iar poziția de limită a secantei MM_1 coincide cu direcția tangentei la curba în punctul M.

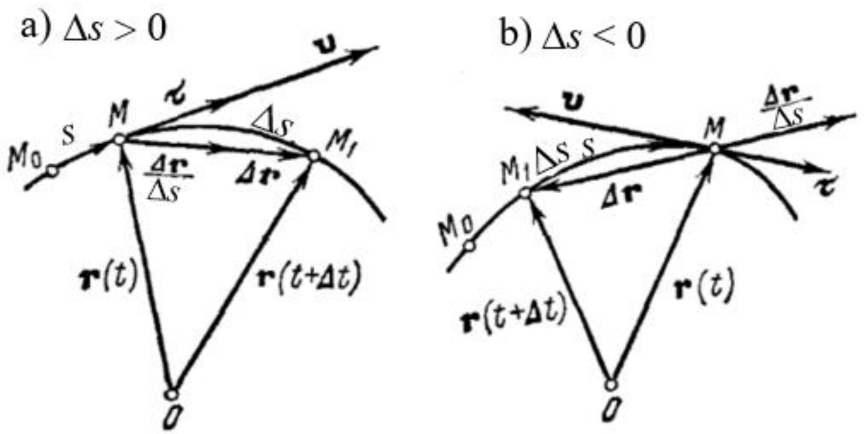


Fig. 9

VITEZA PUNCTULUI

Atunci vectorul $$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau},$$

$\vec{\tau}$ - fiind vector unitate al tangentei orientat în direcția pozitivă a măsurării arcului.

- Într-adevăr, dacă Δs 0, atunci vectorul $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ este îndreptat în direcția lui $\Delta\vec{r}$ (fig. 9, a), iar dacă $\Delta s < 0$, atunci vectorul $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ este orientat în direcție opusă lui $\Delta\vec{r}$ (fig. 9, b).
- În ambele cazuri acest vector, prin urmare, și limita lui $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \vec{\tau}$ sînt orientate în direcția creșterii arcului s (în fig. 9 direcția pozitivă de măsurare a arcului s este aleasă spre dreapta de la originea măsurării M_0).

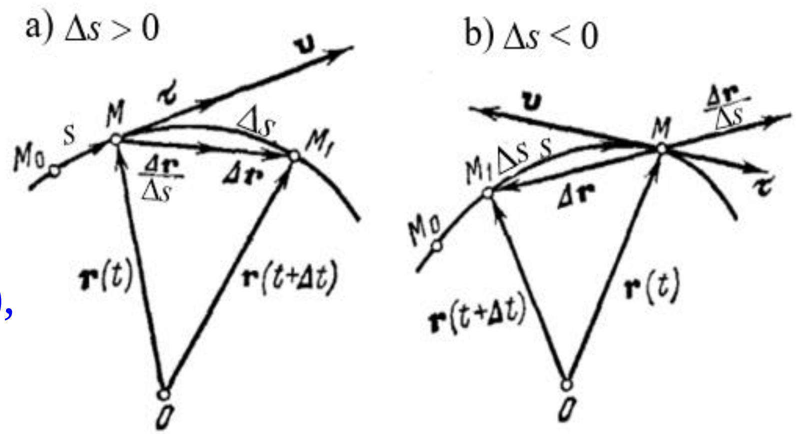


Fig. 9

Luînd în considerație că
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s},$$

avem
$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\tau}\ . \qquad (14)$$

VITEZA PUNCTULUI

Notînd $v_\tau = \frac{ds}{dt}$, obținem

$$\vec{v} = v_\tau \cdot \vec{\tau}\,. \qquad (15)$$

unde v_τ este proiecția vectorului viteză pe linia tangentă, care se numește ***valoare algebrică a vitezei.***

Din formula (15) rezultă că

1) Viteza este întotdeauna orientată tangent la traiectorie în direcția de deplasare.
2) Viteza după modul este egală cu $\mathrm{v} = |\mathrm{v}_\tau| = |\dot{\mathrm{s}}|$.
3) Semnul proiecției v_τ indică direcția vitezei. Dacă $\mathrm{v}_\tau = \mathrm{v}$, atunci mișcarea are loc în direcția pozitivă a măsurării arcului iar dacă $\mathrm{v}_\tau = -\mathrm{v}$, atunci mișcarea are loc în direcția contrară.

Întrucît drumul parcurs de punct totdeauna este pozitiv, atunci elementul de drum

$$ds' = |ds|$$

și, prin urmare, modulul vitezei poate fi determinat după formula

$$v = \left|\frac{ds}{dt}\right| = \frac{ds'}{dt}.$$

ACCELERAȚIA PUNCTULUI

- Presupunem că în momentul t viteza punctului este egală cu $\vec{v}_1 = \vec{v}(t)$, iar în momentul $t + \quad t$ va fi $\vec{v}_2 = \vec{v}(t + \quad t)$, (fig. 10).

Variația vectorului viteză în intervalul de timp Δt o aflăm ca diferența vectorilor $\vec{v}_2$ și fi $\vec{v}_1$, dacă vectorul fi $\vec{v}_2$ este deplasat paralel în punctul M_1 (Fig. 10).

- Vectorul $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}(t + t) - \vec{v}(t)$

reprezintă creșterea vectorului viteză în intervalul de timp Δt.

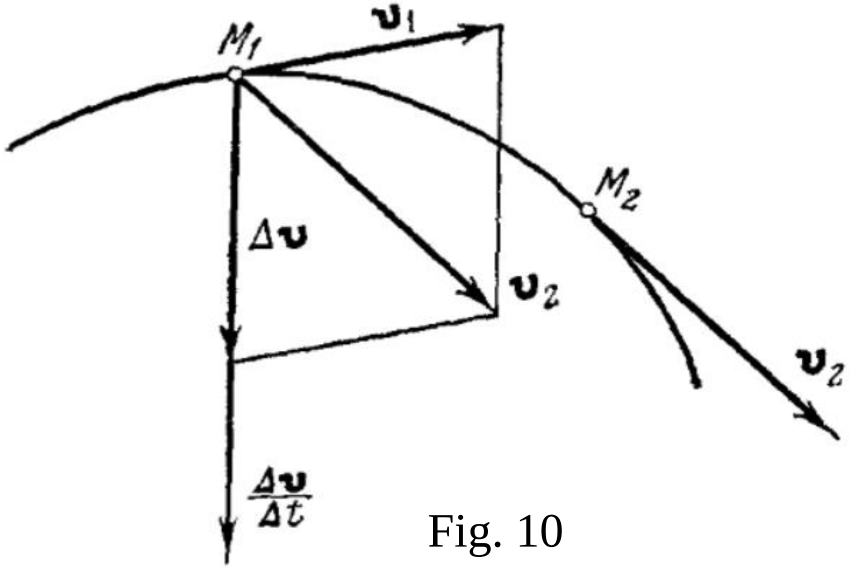


Fig. 10

- Raportul dintre vectorul $\Delta\vec{v}$ și intervalul de timp Δt se numește ***accelerația medie*** a punctului în intervalul Δt:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\Delta\vec{v}}{t}.$$

Se numește accelerația punctului $\vec{a}$ în momentul dat *limita raportului dintre creșterea vitezei $\Delta\vec{v}$ și creșterea timpului Δt în condiția că ultima tinde la zero*, adică

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \qquad (16)$$

ACCELERAȚIA PUNCTULUI

deoarece $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Se poate folosi și o astfel de notație: $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$.

Prin urmare, accelerația unui punct în momentul dat este egală *cu prima derivată în raport cu timpul a vectorului viteză sau cu derivata a doua în raport cu timpul a vectorului de poziție a punctului.*

$[a]_{SI} = m/s^2$.

➢ Determinarea accelerației cînd mișcarea este definită prin coordonate

- Fie mișcarea unui punct definită în sistemul de coordonate rectangular:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t).$$

Deoarece vectorul vitezei punctului se poate reprezenta sub forma:

$$\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}.$$

atunci pe baza (16) vom avea

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}.$$

ACCELERAȚIA PUNCTULUI

Fie a_x, a_y și a_z proiecțiile accelerației pe axele de coordonate *x*, *y*, *z*. Atunci

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}, \qquad (17)$$

adică, proiecția accelerației unui punct pe o oarecare axă de coordonate este egală cu derivata întîi în raport cu timpul a proiecției respective a vitezei punctului.

Pe baza (11) ($v_x = \dot{x},\ \ v_y = \dot{y},\ \ v_z = \dot{z}$) expresiile (17) pot fi transcrise sub forma

$$a_x = \dot{v_x} = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v_y} = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v_z} = \ddot{z}. \qquad (18)$$

Prin urmare, *proiecția accelerației pe o axă oarecare de coordonate este egală cu derivata a doua în raport cu timpul de la coordonata respectivă.*

ACCELERAȚIA PUNCTULUI

- Modulul accelerației se determină prin formula

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \qquad (19)$$

Cunoscînd proiecțiile accelerației și modulul ei, se poate afla ușor cosinusurile directoare ale vectorului accelerație

$$\cos(x, \vec{a}) = \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}},$$

$$\cos(y, \vec{a}) = \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}}, \qquad (20)$$

$$\cos(z, \vec{a}) = \frac{a_z}{a} = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}}.$$

RAZA DE CURBURĂ

Geometria traiectoriei

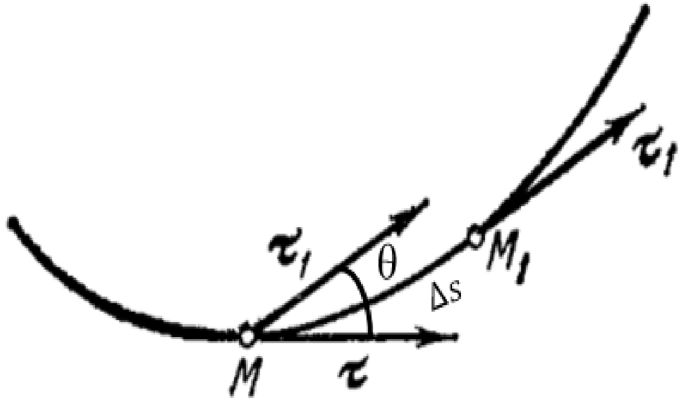


Fig. 11

- Să considerăm o curbă spațială arbitrară (fig. 11).
- Fie în intervalul de timp Δt punctul material se deplasează de-a lungul acestei curbe din punctul M în punctul M_1.
- Valoarea absolută a lungimii arcului $MM_1 = \Delta s$.
- Fie $\vec{\tau}$ vectorul unitar al tangentei într-un punct oarecare al curbei M.
- Acum luăm pe curbă punctul M_1 în apropierea lui M, și notăm vectorul unitar al tangentei în acest punct prin $\vec{\tau}_1$.
- Deplasăm vectorul $\vec{\tau}_1$ paralel cu el însuși în punctul M.
- Unghiul θ dintre vectorii unitari $\vec{\tau}$ și $\vec{\tau}_1$ se numește ***unghi de adiacență.***

RAZA DE CURBURĂ

Limita raportului dintre unghiul de adiacență și valoarea absolută a lungimii arcului $MM_1 = \Delta s$ se numește ***curbura*** curbei în punctul M, adică

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\theta}{|\Delta s|}. \qquad (21)$$

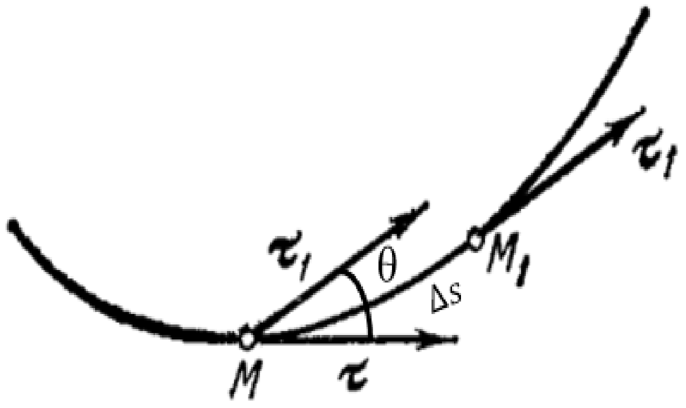


Fig. 11

Mărimea inversă curburii se numește ***raza de curbură*** a curbei în punctul M

$$\rho = \frac{1}{k}. \qquad (22)$$

- Menționăm că curbura liniei drepte este egală cu zero, iar raza ei de curbură este infinit de mare.
- Curbura circumferinței este una și aceeași în toate punctele ei și este egală cu mărimea inversă a razei circumferinței $(k = 1/R)$, raza de curbură este egală cu raza circumferinței $(\rho = R)$.

ACCELERAȚIA PUNCTULUI

➢ Determinarea accelerației în cazul metodei naturale de definire a mișcării

- Obținem expresia pentru accelerație, luînd în considerație că din relația (15), $\vec{v} = v_\tau \cdot \vec{\tau}$. Pe baza relației (16) avem:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_\tau \cdot \vec{\tau}) = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \qquad (23)$$

- Luînd în considerație că $\frac{ds}{dt} = v_\tau$ și că $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n}$, transformăm vectorul $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$.

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{ds} = v_\tau \frac{1}{\rho}\vec{n}.$$

Întrucît $v_\tau^2 = v^2$, obținem, că accelerația este egală cu suma vectorială:

$$\vec{a} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad (24)$$

ACCELERAȚIA PUNCTULUI

- Proiecția accelerației pe direcția $\vec{\tau}$

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} \qquad (25)$$

se numește ***accelerație tangențială.***

- Proiecția accelerației pe normala principală

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad (26)$$

se numește ***accelerație normală.***

Accelerația tangențială caracterizează schimbarea modulului vitezei iar accelerația normală caracterizează schimbarea vitezei după direcție.

Modulul accelerației este egal cu:

$$\vec{a} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (27)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

ACCELERAȚIA PUNCTULUI

- Accelerația tangențială $\vec{a}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}$ este egală cu zero la mișcarea punctului cu viteză constantă după modul și în momentele de timp în care viteza v_τ atinge valori extremale.

- Dacă v_τ și a_τ au același semn, atunci modulul vitezei punctului $v = |v_\tau|$ crește și mișcarea în acest caz se numește ***accelerată***.
- Dacă însă v_τ și a_τ sînt de semne diferite, atunci modulul vitezei punctului $v = |v_\tau|$ descrește și mișcarea va fi ***întîrziată.***
- Cînd $a_\tau = 0$ modulul vitezei rămîne constant și mișcarea este ***uniformă.***

- Accelerația normală este nulă în mișcarea rectilinie ($\rho = \infty$), în punctele de inflexiune ale traiectoriei curbilinii și în momentele cînd viteza punctului este egală cu zero.

ACCELERAȚIA PUNCTULUI

Menționăm că pentru calcularea accelerației tangențiale a_τ se poate folosi egalitatea

$$a_\tau = \vec{\tau} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v_\tau},$$

deoarece $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v_\tau}$.

Dacă mișcarea punctului este definită prin coordonate, atunci în cazul coordonatelor carteziene

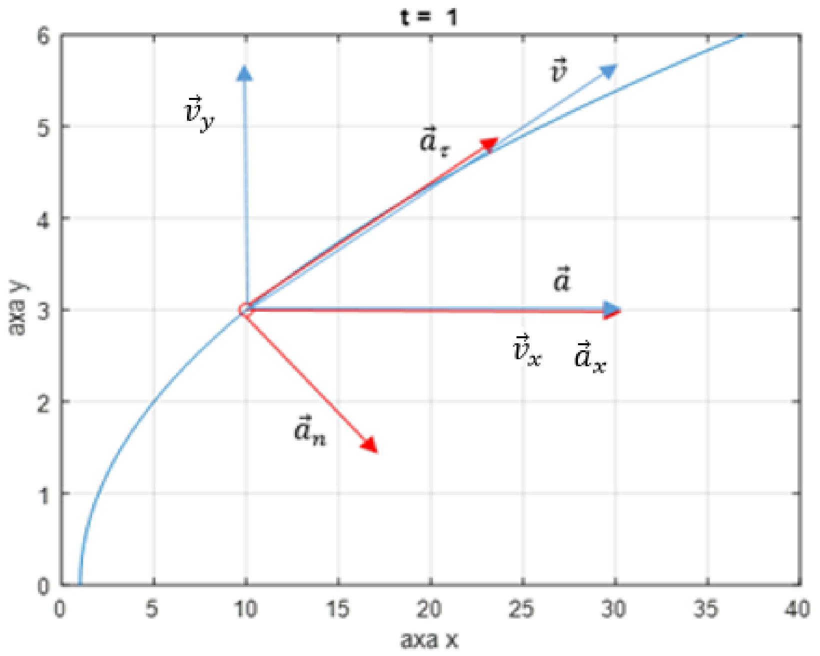
$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

vom avea:

$$a_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{\pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

EXEMPLU

Problema 4. Mișcarea unui punct material M este descrisă de ecuațiile $x = 9t^2 + 1$ și $y = 3t$, unde x și y se măsoară în *cm*, iar timpul *t* în *sec*. De găsit traiectoria mișcării punctului și pentru momentul de timp $t_1 = 1sec$ de găsit viteza, accelerația, accelerația tangențială, accelerația normală și raza de curbură a traiectoriei.



Rezolvare:

Ecuația traiectoriei. Eliminînd timpul *t* din ecuațiile mișcării obținem ecuația traiectoriei

$$x = y^2 + 1$$

Aceasta este ecuația unei parabole.

Coordonatele *x* și *y* pot primi numai următoarele valori

$$1 \leq x \leq +\infty, \quad 0 \leq y \leq +\infty.$$

- Poziția punctului pe traiectorie cînd $t_0 = 0$ *sec*, se găsește din coordonatele sale $x(t_0) = 1\ cm,\ y(t_0) = 0\ cm.$
- Cînd $t_1 = 1$ *sec*, poziția punctului pe traiectorie se găsește din coordonatele: $x(t_1) = 10\ cm,\ y(t_1) = 3\ cm$.

EXEMPLU

Viteza punctului o determinăm din proiecțiile sale cu ajutorul relațiilor:

$v_x = \dot{x} = 18t, \qquad v_y = \dot{y} = 3.$

Cînd $t_1 = 1$ *sec*, $v_x(t_1) = 18\ \frac{cm}{s}, \quad v_y(t_1) = 3\ \frac{cm}{s}.$

Modulul vitezei este egal cu: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 18.25\ \frac{cm}{s}.$

Accelerația punctului, de asemenea o determinăm din proiecțiile sale din relațiile:

$a_x = \dot{v}_x = 18, \quad a_y = \dot{v}_y = 0.$

Cînd $t_1 = 1$ *sec*, $a_x(t_1) = 18\ \frac{cm}{s^2}, \quad a_y(t_1) = 0\ \frac{cm}{s^2}.$

Modulul accelerației este egal cu: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 18\ \frac{cm}{s^2}.$

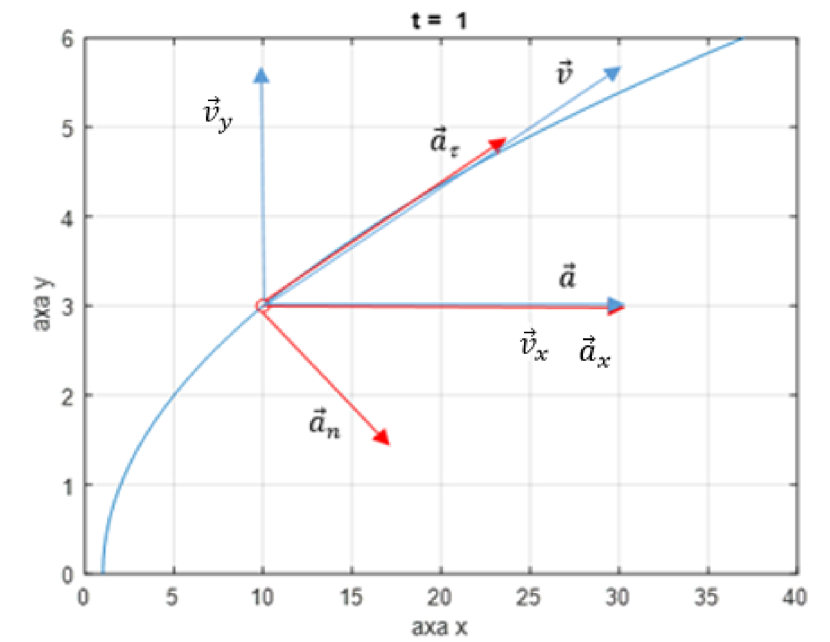
EXEMPLU

Accelerația tangențială o calculăm conform expresiei:

$|a_\tau| = \left|\frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}\right|$. Cînd $t_1 = 1$ *sec*, $|a_\tau| = \left|\frac{18\cdot 18 + 3\cdot 0}{18.25}\right| = 17.75\ \frac{cm}{s^2}$.

Accelerația normală o calculăm ca diferența geometrică dintre accelerația totală și tangențială

$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Cînd $t_1 = 1$ *sec*, $a_n = \sqrt{18^2 - 17.75^2} = 3\ \frac{cm}{s^2}$.



Raza de curbură a traiectoriei o găsim din relația:

$\rho = \frac{v^2}{a_n}$. Cînd $t_1 = 1$ *sec*, $\rho = \frac{333}{3} = 111\,cm$.

Răspuns:

$v = 18.25\ \frac{cm}{s}$, $a = 18\ \frac{cm}{s^2}$, $|a_\tau| = 17.75\ \frac{cm}{s^2}$, $a_n = 3\ \frac{cm}{s^2}$, $\rho = 111\,cm$.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Bibliografie

1. Butenin N. V. I. L. Lunţ, D. R. Merkin Curs de mecanică teoretică. Vol. 1, 2. Chişinău 1993.
2. Caraganciu V. M. Colpajiu, M. Ţopa Mecanica teoretică. Chişinău 1994
3. I. V. Meşcerskii. Culegere de probleme la MT, Chişinău, 1991.
4. Caraganciu V. MT, Compendiu şi probleme, 2008
5. С. М. Тарг Краткий курс теоретической механики. Наука, Москва, 1967
6. V. Szolga. Mecanica teoretică. Vol. 1. Statica, Divers-press, Bucureşti, 1994