II АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦИФРОВЫХ АВТОМАТОВ

Тема 3 *Системы счисления и коды*

Цифровые устройства выполняют операции над числами представленными в некоторой системе счисления.

Под системой счисления понимается совокупность правил представления чисел посредством ограниченного количества символов. Используемые для представления чисел символы называются цифрами.

Системы счисления могут быть позиционными и непозиционными. Система счисления является позиционной если вес (значение) каждой цифры определяется позицией соответствующей цифры в представлении числа. Конкретным примером позиционной системы счисления является используемая нами десятичная система счисления. В десятичной системе счисления 392≠923, так как вес цифр 2, 3 и 9 различен в представлении указанных чисел. Например, вес цифры 9 определяется как $9{\cdot}10^1$ для числа 392 и как $9{\cdot}10^2$ для числа 923.

В случае непозиционных систем счисления, вес каждой цифры не зависит от позиции занимаемой в представлении числа. Классическим примером непозиционной системы счисления является римская система счисления. Значение некоторого числа представленного римскими цифрами определяется посредством арифметических операций сложения и вычитания. Например, VI=V+I=6, в то же время IV=V-I=4. Непозиционные системы счисления имеют ограниченное применение и практически используются для нумерации. С другой стороны, позиционные системы счисления используются в самых разнообразных областях человеческой деятельности, в том числе в цифровых системах.

Количество цифр используемых для написания чисел в некоторой системе счисления определяет основание соответствующей системы. В системе счисления с основанием q, некоторое число N записывается посредством ряда цифр:

$$N_{(q)}=b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_i\ldots b_1b_0\,\mathbf{.}\,b_{-1}b_{-2}\ldots b_{-m}\,, \tag{2.1}$$

где десятичная точка разделяет целую часть от дробной части числа N. Цифра b_i представляет *i*-й разряд числа N. Для вычисления значения числа N следует прибегнуть к равенству

$$N_{(q)}=b_{n-1}{\cdot}q^{n-1}+b_{n-2}{\cdot}q^{n-2}+\ \ldots\ +b_1{\cdot}q^1+b_0{\cdot}q^0+b_{-1}{\cdot}q^{-1}+b_{-2}{\cdot}q^{-2}+\ldots+b_{-m}{\cdot}q^{-m},$$

или

$$N_{(q)}=\sum_{i=-m}^{n-1} b_i\cdot q^i \tag{2.2}$$

Например, число 392**.**46 в десятичной системе счисления может быть записано в следующем виде:

$$392\mathbf{.}46_{(10)}=3{\cdot}10^2+9{\cdot}10^1+2{\cdot}10^0+4{\cdot}10^{-1}+6{\cdot}10^{-2}.$$

Далее представим системы счисления используемые в области цифровых систем.

- Двоичная система счисления. Эта система использует для представления чисел только две цифры - 0 и 1, то есть $b_i \in \{0,1\}$. Число N в двоичной системе записывается согласно формуле (2.2) следующим образом :

$$N_{(2)}=b_{n-1}\cdot 2^{n-1}+b_{n-2}\cdot 2^{n-2}+\cdots+b_1\cdot 2^1+b_0\cdot 2^0+b_{-1}\cdot 2^{-1}+b_{-2}\cdot 2^{-2}+\cdots+b_{-m}\cdot 2^{-m}. \qquad (2.3)$$

Пусть задано двоичное число 101010.11. Тогда, согласно формуле (2.3), имеем:

$$101010.11_{(2)}=1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0+1\cdot 2^{-1}+1\cdot 2^{-2}=42.75_{(10)}. \qquad (2.4)$$

Следовательно, любое двоичное число может быть записано в десятичной системе счисления представив двоичное число в виде (2.3) и выполнив требуемые арифметические операции согласно (2.4).

Для преобразования десятичного числа в двоичную систему счисления следует выделить целую и дробную части десятичного числа. Затем приступают к раздельному преобразованию целой и дробной частей. Алгоритм преобразования целого числа из десятичной системы в двоичную сводится к выполнению следующей последовательности операций :

1. Десятичное число делится на два; при этом получается целое частное и остаток от деления;
2. Если полученое частное отличается от нуля, вернуться к шагу 1; при этом частное используется как делимое;
3. Если частное от деления равно нулю, все полученные остатки используются для представления двоичного числа, причем запись остатков в виде двоичного числа будет производиться в порядке обратном их получению.

Поясним представленный алгоритм. Пусть задано десятичное число 264. Преобразование этого числа в двоичную систему счисления выполняется следующим образом :

264 : 2 = 132	остаток 0
132 : 2 = 66	остаток 0
66 : 2 = 33	остаток 0
33 : 2 = 16	остаток 1
16 : 2 = 8	остаток 0
8 : 2 = 4	остаток 0
4 : 2 = 2	остаток 0
2 : 2 = 1	остаток 0
1 : 2 = 0	остаток 1

Значит, $264_{(10)}=100001000_{(2)}$. Проверить правильность преобразования можно обратившись к формулам (2.3), (2.4):

$$100001000_{(2)}=1\cdot 2^8+1\cdot 2^3=264_{(10)}.$$

Преобразование десятичной дроби в двоичную систему счисления выполняется следующим образом :

1. Дробное число умножается на два;
2. Полученная в результате умножения на два целая часть отделяется от дробной части;
3. Полученная на шаге 2 дробная часть рассматривается как множимое и выполняется переход к шагу 1. Последовательное умножение на два завершается когда дробная часть оказывается нулевой либо когда получено количество двоичных цифр

удовлетворяющее требуемой (заданой) точности. Двоичное представление числа будет состоять из цифр, которые представляют целые части полученные на шаге два, причем запись этих цифр производится в том порядке в каком они были получены.

Приведем конкретный пример. Пусть задана десятичная дробь 0.53125.

$0.53125 \cdot 2 = \mathbf{1}.06250$	целая часть 1
$0.06250 \cdot 2 = \mathbf{0}.12500$	целая часть 0
$0.12500 \cdot 2 = \mathbf{0}.25000$	целая часть 0
$0.25000 \cdot 2 = \mathbf{0}.50000$	целая часть 0
$0.50000 \cdot 2 = \mathbf{1}.00000$	целая часть 1

Таким образом, $0.53125_{(10)} = 0.10001_{(2)}$. Проверим правильность результата :

$$0.10001_{(2)} = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} = 0.53125_{(10)}.$$

- Восьмеричная система счисления. Восьмеричная система это система счисления с основанием q=8 и использует цифры от 0 до 7, то есть $b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. Преобразование из двоичной системы в восьмеричную и обратно выполняется просто, так как основание восьмеричной системы есть степень числа два - $q=8=2^3$. Правило преобразования двоичного числа в восьмеричное число следующее :

1. Двоичные цифры слева и справа от десятичной точки группируются по три, образуя триады;
2. Каждая триада заменяется восьмеричной цифрой в соответствии со следующей таблицей эквивалентности:

Таблица 3.1.

Восьмеричная цифра	Двоичная триада
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Пусть задано двоичное число 11010111.1010111. Для преобразования в восьмеричную систему счисления двоичное число разбиваем на триады, которые затем заменяем на соответствующие восьмеричные цифры согласно табл. 3.1:

011	010	111 .	101	011	100
3	2	7 .	5	3	4

Следовательно, $11010111.1010111_{(2)} = 327.534_{(8)}$. В приведенном примере крайние слева и справа триады были образованы добавлением незначащих нулей.

Преобразование восьмеричного числа в двоичную систему счисления выполняется в обратном порядке и состоит в замене восьмеричных цифр двоичными триадами согласно табл.2.1. Пусть задано восьмеричное число $N_{(8)} = 610.213$. Преобразование имеет вид:

6	1	0.	2	1	3
110	001	000.	010	001	011

Значит, $610.213_{(8)}=110001000.010001011_{(2)}$.

Для преобразования десятичного числа в восьмеричную систему следует использовать алгоритм преобразования десятичных чисел в двоичные с оговоркой что в операциях деления и умножения цифру 2 нужно заменить на цифру 8. Приведем пример преобразования десятичного числа в восьмеричное число. Пусть задано десятичное число 431.625. Преобразование выполняется раздельно для целой части исходного числа

431 : 8 = 53 остаток 7
53 : 8 = 6 остаток 5
6 : 8 = 0 остаток 6

и для дробной части

0.625·8=5.000 целая часть 5

Итак, $431.625_{(10)}=657.5_{(8)}$.

- Шестнадцатеричная система счисления. Шестнадцатеричная система использует для представления чисел 16 символов: цифры от 0 до 9 и первые шесть букв латинского алфавита. То есть $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$. Преобразование из двоичной системы в шестнадцатеричную и обратно аналогично двоично-восьмеричному преобразованию, так как основание шестнадцатеричной системы есть также степень числа два - $q=16=2^4$. Правило преобразования двоичного числа в восьмеричное число, которое дано выше, справедливо и для двоично-шестнадцатеричного преобразования с уточнением, что двоичные цифры группируются по 4, образуя тетрады, каждая из которых заменяется определенной шестнадцатеричной цифрой. В табл.3.2 дается соответствие между шестнадцатеричными и двоичными цифрами. Сохраняется также правило преобразования восьмеричного

Таблица 3.2

Десятичное число	Шестнадцатеричная цифра	Двоичная тетрада	Десятичное число	Шестнадцатеричная цифра	Двоичная тетрада
0	0	0000	8	8	1000
1	1	0001	9	9	1001
2	2	0010	10	A	1010
3	3	0011	11	B	1011
4	4	0100	12	C	1100
5	5	0101	13	D	1101
6	6	0110	14	E	1110
7	7	0111	15	F	1111

числа в двоичное с уточнением, что при преобразовании шестнадцатеричного числа в двоичное каждая шестнадцатеричная цифра заменяется определенной двоичной тетрадой согласно табл.3.2.

Для преобразования десятичного числа в шестнадцатеричную систему следует использовать алгоритм преобразования десятичных чисел в двоичные с оговоркой что в операциях деления и умножения цифру 2 нужно заменить на цифру 16. Конечный результат будет записываться с учетом соответствия цифр, которое дано в табл. 3.2. Приведем пример преобразования десятичного числа в шестнадцатеричное число. Пусть задано десятичное число 3257:

3257 : 16 = 203	остаток 9 ↑
203 : 16 = 12	остаток 11
12 : 16 = 0	остаток 12

Заменяя десятичные остатки шестнадцатеричными цифрами получаем:

$$3257_{(10)}=CB9_{(16)}.$$

Рассмотрим теперь преобразование десятичного числа 0.640625 :

0.640625·16=10.25	целая часть 10 ↓
0.25·16=4.00	целая часть 4

Следовательно, $0.640625_{(10)}=0.A4_{(16)}$.

- Двоично-десятичные коды. Кроме рассмотренных выше систем счисления, вычислительные устройства оперируют и с другими представлениями чисел. Примером в этом плане могут служить двоично-десятичные коды (BCD). В таблице 3.3 приводится соответствие между десятичными цифрами и их эквивалентами в двух широко используемых двоично-десятичных кодах - 8421 и “8421”+3 (код с “избытком” 3).

Таблица 3.3.

Десятичная цифра	Код 8421	Код “8421”+3	Десятичная цифра	Код 8421	Код “8421”+3
0	0000	0011	5	0101	1000
1	0001	0100	6	0110	1001
2	0010	0101	7	0111	1010
3	0011	0110	8	1000	1011
4	0100	0111	9	1001	1100

Замечаем, что каждой десятичной цифре ставится в соответствие конкретное двоичное слово, длина которого равна четырем битам. Эта длина вытекает из необходимости закодировать 10 десятичных цифр посредством двоичных цифр. Так как число 10 находится в интервале между 2^3 и 2^4, двоичное слово должно быть по меньшей мере длиной в 4 бита. Поясним как записываются десятичные числа в двоично-десятичном представлении (коде):

3	5	8.	1	9	6	число N в 10-ом виде
0011	0101	1000.	0001	1001	0110	число N в коде 8421
0101	0111	1100.	0110	0011	1010	число M в коде “8421”+3
2	4	9.	3	0	7	число M в 10-ом виде

В таблице 3.4 приводятся некоторые двоично-десятичные коды.

Таблица 3.4.

	Взвешенные			**Невзвешенные**	
		самодополняемые			
	8421(BCD)	2421	86(-1)(-4)	Gray	2 из 5
0	0000	0000	0 0 0 0	0000	000**11**
1	0001	0001	0 1 1 1	0001	00**101**
2	0010	0010	0 1 0 1	0011	00**11**0
3	0011	0011	1 0 1 1	0010	0**1**00**1**
4	0100	0100	1 0 0 1	0110	0**1**0**1**0
5	0101	1011	0 1 1 0	0111	0**11**00
6	0110	1100	0 1 0 0	0101	**1**000**1**
7	0111	1101	1 0 1 0	0100	**1**00**1**0
8	1000	1110	1 0 0 0	1100	**1**0**1**00
9	1001	1111	1 1 1 1	1101	**11**000

- Другие коды. Двумя другими кодами, практически используемыми в цифровых системах, являются код ASCII и код Грея. Код ASCII кодирует прописные и строчные буквы латинского алфавита, десятичные цифры от 0 до 9, специальные и управляющие символы. Код Грея характеризуется тем, что при переходе от одного двоичного кодового слова к следующему изменяется всего одна двоичная цифра. Например, в случае 2-разрядных двоичных кодовых слов имеют место переходы 00-01-11-10-00, а в случае 3-разрядных двоичных кодовых слов 000-001-011-010-110-111-101-100-000.