Тема 2. Минимизация булевых функций

Запись функции в форме СДНФ не единственно возможная и, как правило, не самая короткая. Построенная по СДНФ логическая схема также часто оказывается не самой экономичной. Как правило, они избыточны и поддаются *минимизации*. Наиболее очевидным способом минимизации СДНФ является выполнение преобразований с помощью основных аксиом и теорем булевой алгебры (см. табл. 1.2). Целью преобразований является такая группировка членов минимизируемого выражения, которая позволяет сократить число конъюнкций исходной формулы и число входящих в них аргументов.

Целью минимизации логической функции является нахождение минимальной дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ). Какого-либо правила группировки, гарантированно приводящего СДНФ к ее минимальной форме, не существует. Приходится пробовать различные варианты и сравнивать результаты. Процедуру поиска заметно облегчают специально разработанные методы минимизации. Наиболее известными являются метод диаграмм Карно и метод Квайна-МакКласки.

Метод диаграмм Карно.

Диаграмма Карно представляет собой графическое представление таблицы истинности.

$f(x_1,x_2,x_3) = \Sigma\ (1,3,4,6)$

	x1	x2	x3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

x3 \ x1x2	00	01	11	10
0	000	010	110	100
1	001	011	111	101

x3 \ x1x2	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

x3 \ x1x2	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1		

Метод позволяет быстро получать минимальные ДНФ булевой функции f небольшого числа переменных. В основе метода лежит задание булевых функций диаграммами некоторого специального вида, получившими название диаграмм Карно. Для диаграмм Карно характерно следующее:

1) каждой клетке диаграммы соответствует свой набор;
2) соседние наборы расположены рядом в строке либо в столбце.

Соседними наборами называются наборы, отличающиеся одной компонентой. Столбцы, расположенные по краям диаграммы, тоже считаются соседними. Если соседние клетки диаграммы Карно соответствуют единичным наборам минимизируемой функции, то их можно склеивать, с целью упрощения элементарных конъюнкций (произведений). Общее правило склеивания на диаграммах Карно можно сформулировать следующим образом:

1. Склеиванию подлежат прямоугольные конфигурации, заполненные единицами и содержащие число клеток, являющееся степенью 2. *Получающееся новое элементарное произведение определяется как произведение переменных,* ***не меняющих своего значения*** *на всех склеиваемых наборах.*
2. Число m оставшихся переменных в элементарном произведении

определяется легко:

$$m = n - \log_2 M,$$

где n — число переменных функции; M — число склеиваемых наборов (клеток).

3. Минимизация булевой функции заключается в нахождении минимального покрытия всех единиц диаграммы Карно блоками из единиц (указанной конфигурации), расположенных в соседних клетках диаграммы. При этом всегда считается, что левый край диаграммы Карно примыкает к ее правому краю, а верхний край диаграммы примыкает к нижнему ее краю.
4. После получения минимального покрытия всех единиц диаграммы Карно, минимальная ДНФ булевой функции записывается как дизъюнкция элементарных конъюнкций, соответствующих выделенным блокам единиц в диаграмме.

Пример . 1. $f(x_1,x_2,x_3) = \Sigma\,(1,3,4,6)$

	x1	x2	x3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

x3 \ x1x2	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1		

$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_3$
0 ~~0~~1	1 ~~1~~0
0 ~~1~~1	1 ~~0~~0
$\bar{x}_1 \quad x_3$	$x_1 \quad \bar{x}_3$

$$F = \bar{x}_1 x_3 + x_1 \overline{x_3}$$

Пример 2 . Найти минимальную ДНФ булевой функции

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma\,(3, 7, 8, 9, 12, 13, 15)$

	x1	x2	x3	x4	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	0000	0100	1100	1000
01	0001	0101	1101	1001
11	0011	0111	1111	1011
10	0010	0110	1110	1010

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

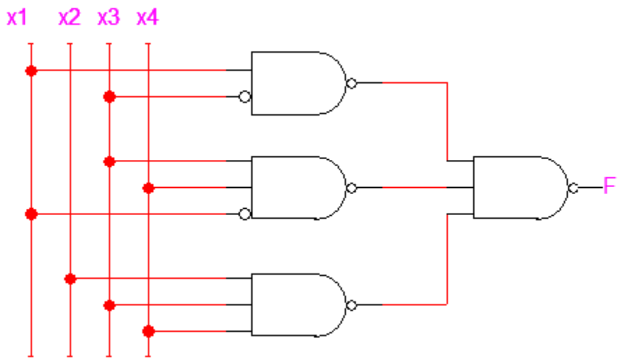
	x1	x2	x3	x4	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00			1	1
01			1	1
11	1	1	1	
10				

$$F = x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4$$

Реализация логической функции на элементах И-НЕ

$$F = x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = \overline{\overline{x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4}} = \overline{\overline{x_1\bar{x}_3} \cdot \overline{\bar{x}_1 x_3 x_4} \cdot \overline{x_2 x_3 x_4}}$$



C=11 λ
***T**d*=2 τ

Пример . Найти минимальную КНФ булевой функции

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma\,(3, 7, 8, 9, 12, 13, 15)$$

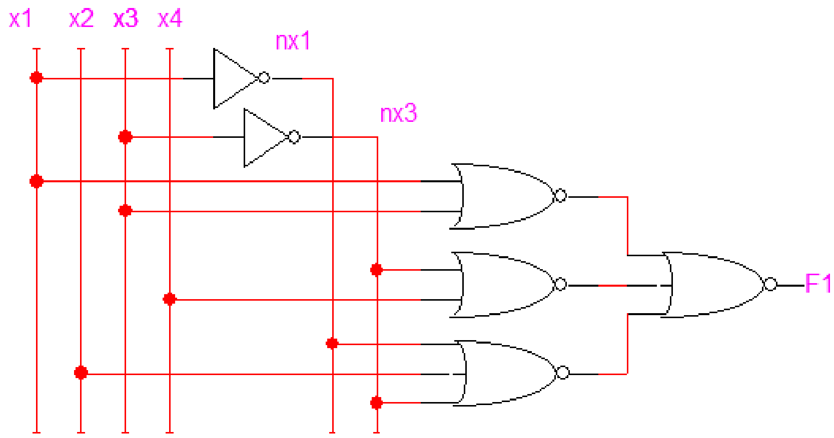
x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	0	0		
01	0	0		
11				0
10	0	0	0	0

$$F = (x_1 + x_3)\cdot(\bar{x}_3 + x_4)\cdot(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)$$

Реализация логической функции на элементах ИЛИ-НЕ

$$F=(x_1+x_3)\cdot(\bar{x}_3+x_4)\cdot(\bar{x}_1+x_2+\bar{x}_3)=\overline{\overline{(x_1+x_3)\cdot(\bar{x}_3+x_4)\cdot(\bar{x}_1+x_2+\bar{x}_3)}}=$$

$$=\overline{\overline{(x_1+x_3)}+\overline{(\bar{x}_3+x_4)}+\overline{(\bar{x}_1+x_2+\bar{x}_3)}}$$



C=12 λ
T_d=3 τ

Диаграммы Карно для неполностью определенных функций

Неполностью определенные функции - это те функции, которые в определенных точках диапазона определения могут принимать значение 0 или значение 1.

Существуют 2 две возможности:

- входные комбинации, для которых функция имеет индифферентные (неопределенные) значения;
- комбинации переменных, которые не могут возникнуть физически; В этих ситуациях необходимо изучить вероятность возникновения комбинаций в результате ложного маневра или в результате неисправности; Во избежание сбоев в работе устанавливаются такие значения функции в соответствующих местах, чтобы не нарушать нормальную работу схемы.

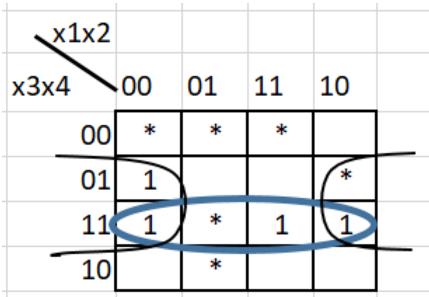
Неуказанные значения, а также соответствующие места на диаграмме Карно называются «безразличными», «произвольными» или «избыточными». Они отмечены знаком «*» и будут рассматриваться во время минимизации как имеющие значение 1 или 0, в зависимости от ситуации, чтобы получить наилучшую возможную минимизацию.

Для оптимальной минимизации одни безразличные значения можно считать равными 1, а другие - 0.

Группа, состоящая только из безразличных значений, не имеет смысла.

Пример .:

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma\,(1,3,11,15)+*(0,4,6,7,9,12)$



$$F = x_3x_4 + \bar{x}_2x_4$$

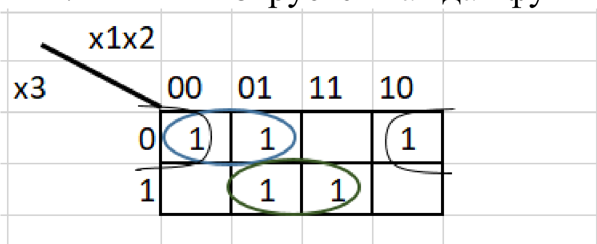
Минимизация систем булевых функций

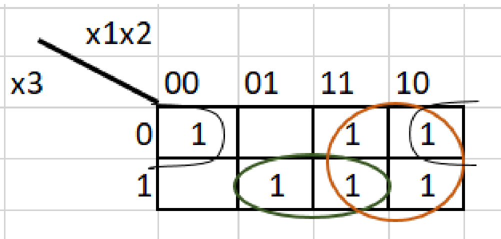
Отдельная минимизация булевых функций не всегда оптимальна, так как можно получить термины, общие для нескольких функций. Эти условия будут реализованы с использованием общих логических элементов, что снизит стоимость схемы**.**

$$F = \begin{cases} F_1 = \sum(0,2,3,4,7) \\ F_2 = \sum(0,3,4,5,6,7) \end{cases}$$

Этары минимизации

1. Минимизируется каждая функция в отдельности





$$F_1 = \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_2x_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3$$

$$F_2 = x_2x_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1$$

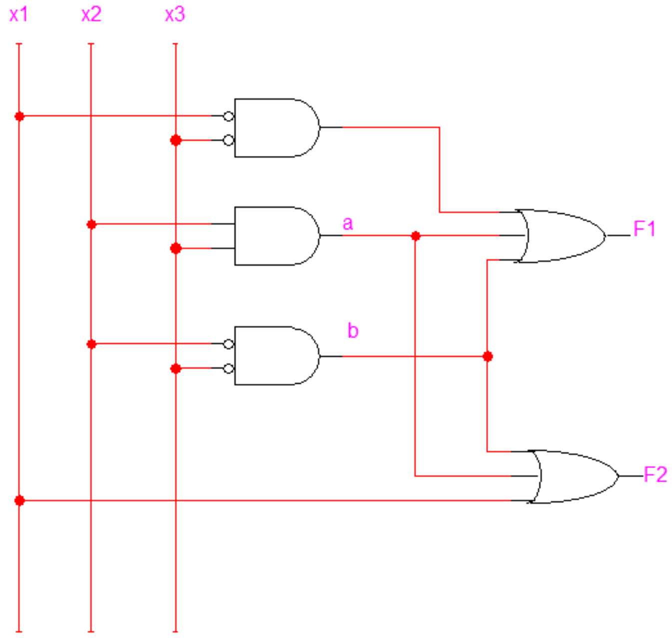
2. Устанавливаются общие термины

$$a = x_2x_3$$

$$b = \bar{x}_2\bar{x}_3$$

$$F = \begin{cases} F_1 = \bar{x}_1\bar{x}_3 + a + b \\ F_2 = a + b + x_1 \end{cases}$$

3. Реализуется логическая функция без повторения общих терминов.



Минимизация функции 5 переменных

Диаграмма Карно для функции 5-ти переменных

	x1x2x3								
x4x5		000	001	011	010	110	111	101	100
	00	0	4	12	8	24	28	20	16
	01	1	5	13	9	25	29	21	17
	11	3	7	15	11	27	31	23	19
	10	2	6	14	10	26	30	22	18

Правила минимизации.

- составляются группы ячеек (субкубов) в которых количество ячеек равно степени двойки.

- могут быть присоединены ячейки, которые не находятся в непосредственной близости, если код Грея ячейки отличается на одну переменную.

- не все группы ячеек в которых количество ячеек равно степени двойки могут быть склеены. Те, в которых нарушена симметрия не склеиваются.

Правильные склеивания:

x4x5 \ x1x2x3	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
11								
10								

Неправильные склеивания::

x4x5 \ x1x2x3	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
11								
10								

Пример:

$f(x_1,x_2,x_3,x_4, x_5) = \Sigma\ (0,1,2,6,7,8,10,11,13,16,17,18,22,23,24,26,27,29,31)$

	x4x5 \ x1x2x3	000	001	011 (5)	010 (1)	110	111	101	100
	00	1			1	1			1
	01	1		1			1		1
3	11		1		1	1	1	1	
	10	1	1		1	1		1	1
			6		4			2	

$$F = \bar{x}_3 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_5 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_2 x_3 x_4$$