

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ МОЛДОВЫ
Кафедра АВТОМАТИКА и ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Методическое пособие
для лабораторных работ
по дисциплине "Исследование операций"
для студентов специальности ТІ
(для дневного и заочного обучения).

Утверждено
Методической комиссией
факультета вычислительной техники,
информатики и микроэлектроники

Введение

Исследование операций - это наука, занимающаяся разработкой и практическим применением методов эффективного (оптимального) управления организационными системами.

Целью исследования операций (ИСО) является количественное обоснование применяемых решений по управлению организациями.

Целью курса ИСО является изучение математических методов, применяемых при обосновании решений в различных областях целенаправленной человеческой деятельности.

Задача изучения курса ИСО состоит в получении студентами знаний по применению математических методов обоснования управленческих решений в системах организационного типа.

В результате изучения курса, студент должен знать:

- методы математического программирования (линейного, нелинейного, дискретного, динамического);
- методы решения транспортной задачи и ряда других оптимизационных задач.

Перечень дисциплин, усвоение которых студентами необходимо для изучения курса ИСО:

- высшая математика (дифференциальное и интегральное исчисление; теория матриц; линейная и векторная алгебра; теория множеств);
- вероятностные методы;
- анализ и построение алгоритмов;
- численные методы;
- программирование (алгоритмические языки).

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

- Задание и номер варианта.
- Математическую модель задачи ЛП.
- Алгоритм метода и его применение для решения задачи.
- Описание реализации алгоритма.
- Результаты работы программы (скриншоты).
- Ответы на контрольные вопросы.
- Листинг программ.

Лабораторная работа №1

Тема: Решение задач линейного программирования (ЛП) графическим методом.

Цель работы:

- изучить возможность использования среды Excel для решения задач ЛП;
- рассмотреть графический метод решения задач линейного программирования;
- реализовать графический метод решения задач линейного программирования на ЭВМ.

Теоретическая часть

Общая постановка задачи линейного программирования

В общем виде задача ЛП формулируется следующим образом:

Найти решение $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, которое доставляет линейной функции цели экстремальное значение:

$$W = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \max (\min) \quad (1)$$

при системе ограничений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i a_{ij} x_i = b_j, \text{ где } i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m_1}, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i a_{ij} x_i \leq b_j, \text{ где } i = \overline{1, n}, j = \overline{m_1+1, m_2}, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i a_{ij} x_i \geq b_j, \text{ где } i = \overline{1, n}, j = \overline{m_2+1, m}, \end{array} \right. \quad (4)$$

и условиях:

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n}, r, r \leq n \quad (5)$$

Опр. Если все ограничения задачи ЛП заданы в виде строгих равенств и на все переменные наложены условия не отрицательности, то данная форма называется **канонической**.

Опр. Вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий ограничениям (2)÷(4) задачи ЛП, называется ее **решением** или **планом**.

Опр. Множество $R(X)$ всех векторов X , для которых выполняются условия (2)÷(4), (5), называется допустимым множеством решений (в этом случае X называется **допустимым решением** или **допустимым планом**).

Опр. Решение X_0 называется **оптимальным**, если для него выполняется условие

$$W(X_0) \geq W(X),$$

т.е. для всех $X \in R(X)$;

или иначе: оптимальным называется то из допустимых решений, которое обращает в максимум целевую функцию W (в этом случае X_0 называется **оптимальным решением** или **оптимальным планом**).

Задача ЛП может быть записана в матричной или векторной форме. Пусть задача ЛП задана в виде:

$$W = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \max (\min) \quad (6)$$

ограничения имеют вид:

$$(7) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_i \geq 0, \overline{i=1, n} \end{cases} \quad (8)$$

В матричной форме задача (6)-(8) запишется в следующей форме:

$$\begin{aligned} W &= C^T X \rightarrow \max (\min); \\ AX &\leq B; \\ X &\geq 0, \end{aligned}$$

где C^T -вектор строка $= \{c_1, \dots, c_n\}$ -коэффициенты целевой функции W ,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad - \quad \text{вектор столбец переменных,}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad - \quad \text{вектор столбец свободных членов размерности } m.$$

$$W = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \max (\min)$$

$$W = C^T X = |c_1, \dots, c_n| \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$AX \leq B \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

При векторной форме записи ограничение (7) запишется следующим образом:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n \leq B,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Графический метод решения задачи ЛП

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи ЛП и применяется для решения задач двумерного пространства. Задачи трехмерного пространства решаются очень редко, так как построение их решения неудобно и лишено наглядности. Рассмотрим метод на примере двумерной задачи.

Найти решение $X = (x_1, x_2)$, удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 21 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_2 \leq 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \quad (10)$$

при котором значение целевой функции

$$W(X) = 3x_1 + 2x_2 \quad (11)$$

достигает максимума.

Построим на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат $X_1 O X_2$ область допустимых решений задачи.

Первым неравенством (9) определяются две области на плоскости (рисунок 1). Одна из них — это область возможных планов задачи, другая — область, где этих планов нет. Границей между ними будет прямая, которую построим, заменив неравенство равенством $3X_1+2X_2=21$. По знаку первого неравенства находим область решения задачи. Аналогично, заменив неравенства равенствами, строим прямые II, III и по знакам неравенств определяем область решений задачи. Неравенства $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$ означают, что область решения будет расположена справа от оси ординат и над осью абсцисс. Таким образом, заштрихованная на рисунке 1 область OABCD будет областью допустимых решений, определенной ограничениями задачи. Крайние точки полученной выпуклой многогранной области будут соответствовать допустимым базисным решениям задачи (9) — (11). Значение целевой функции $W(X)=3X_1+2X_2$ можно определить в любой точке $X = (x_1, x_2)$ области допустимых решений. Прямая линия, перпендикулярная вектору $N = (3,2)$, будет геометрическим местом точек $X = (x_1, x_2)$, в которых целевая функция принимает одинаковые фиксированные значения. Так, в точке $X' = (3,2)$ и в любой точке прямой, перпендикулярной вектору N и проходящей через точку X' значением функции будет $W= 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2= 13$. Вектор N показывает направление параллельного перемещения прямой $X'X''$, соответствующее увеличению целевой функции.

Максимального значения целевая функция достигает в крайней точке С многогранника, являющегося областью допустимых решений задачи. Координаты точки С будут оптимальным решением задачи $X_{\text{опт}} = (X_{\text{опт}1}, X_{\text{опт}2})$ и могут быть найдены при решении уравнений методом Крамера:

$$\begin{aligned} 3X_1 + X_2 &= 21 \\ 2X_1 + 3X_2 &= 30. \end{aligned}$$

Вычислим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 21 & 1 \\ 30 & 3 \end{vmatrix} = 33, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 \\ 2 & 30 \end{vmatrix} = 48,$$

$$X_1 = \frac{33}{7} = 4 \frac{5}{7}, \quad X_2 = \frac{48}{7} = 6 \frac{6}{7}.$$

$$W_{\text{max}} = 3 \cdot 4 \frac{5}{7} + 2 \cdot 6 \frac{6}{7} = 27 \frac{6}{7}.$$

$$\text{Следовательно, } X_{\text{опт}} = \left(4 \frac{5}{7}, 6 \frac{6}{7}\right), \quad W_{\text{max}} = 27 \frac{6}{7}.$$

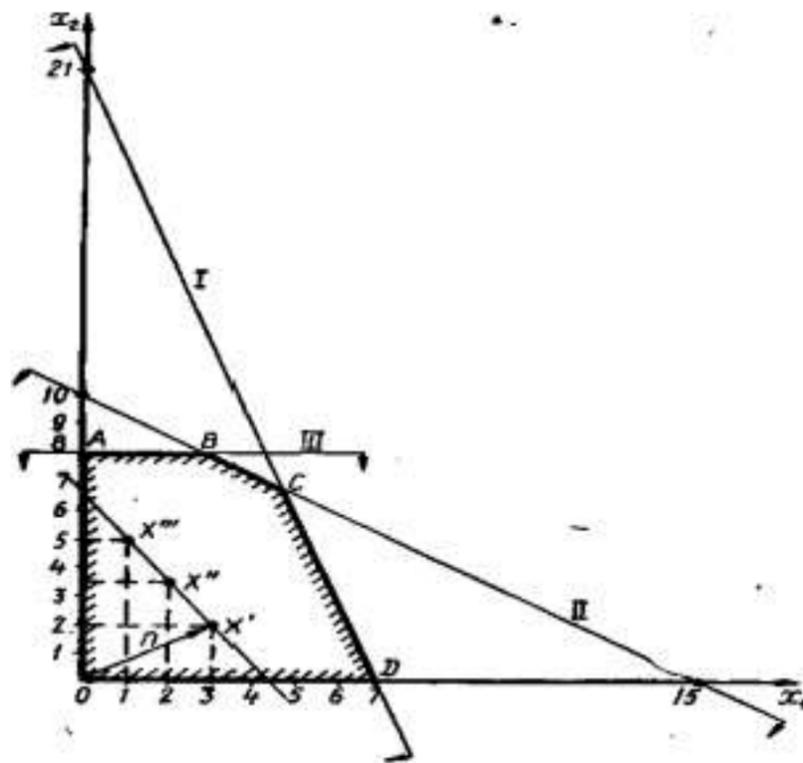


Рисунок 1

Область допустимых решений системы может быть:

- пустой, если система ограничений несовместна;
- одной точкой;
- выпуклым многогранником;
- неограниченной выпуклой многогранной областью.

Для вариантов, представленных на рисунках ограниченной областью допустимых решений, могут встретиться два случая:

- максимум целевой функции достигается в единственной точке;
- максимальное значение целевой функции иметь место в любой точке отрезка границы области допустимых значений.

В случае, когда область допустимых решений является неограниченной, могут встретиться варианты:

- целевая функция имеет экстремум;
- функция не ограничена сверху и снизу, т. е. $W_{\max} = \infty$, $W_{\min} = -\infty$

Варианты задач к лабораторной работе

№ 1

$$W=2X_1+X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 3X_1 - 2X_2 \leq 12 \\ -X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ 2X_1 + 3X_2 \geq 5 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 2

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 12 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 3

$$W=-2X_1+3X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 24 \\ X_1 + 2X_2 \leq 22 \\ X_1 - X_2 \geq 10 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 4

$$W=7X_1 - 2X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 5X_1 - 2X_2 \leq 3 \\ X_1 + X_2 \geq 1 \\ 2X_1 + X_2 \leq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 5

$$W=2X_1+7X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 12X_1+13X_2 \geq 17 \\ 3X_1+X_2 \leq 5 \\ X_1+4X_2 \leq 6 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 6

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 6 \\ 3X_1 + 10X_2 \leq 30 \\ X_1 + 11X_2 \geq 22 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 7

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 10 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 15 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 8

$$W=3X_1+4X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 6X_1 + 2X_2 \leq 175 \\ X_1 + X_2 \leq 30 \\ X_1 + 4X_2 \geq 84 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 9

$$W=2X_1+3X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 10 \\ -2X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 10

$$W=X_1+X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 \leq 16 \\ -4X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ X_1 + 3X_2 \geq 9 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 11

$$W=4X_1+X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 \leq 12 \\ X_1+3X_2 \leq 18 \\ 2X_1+5X_2 \geq 10 \\ X_1, X_2, \geq 0 \end{cases}$$

№ 12

$$W=2X_1+3X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 \leq 16 \\ 3X_1+2X_2 \leq 18 \\ -X_1+3X_2 \geq 24 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 18

$$W=8X_1+7X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1-2X_2 \leq 12 \\ 4X_1+X_2 \leq 16 \\ 5X_1+5X_2 \geq 25 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 19

$$W=2X_1+3X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 \leq 16 \\ 3X_1+2X_2 \leq 18 \\ -X_1+3X_2 \geq 10 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 13

$$W=-2X_1+X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 2X_1 +2X_2 \geq 10 \\ 3X_1 +X_2 \geq 15 \\ X_1 \leq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 14

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1+X_2 \leq 4 \\ 3X_1+X_2 \geq 4 \\ X_1+5X_2 \geq 4 \\ 0 \leq X_1 \leq 3 \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 15

$$W=2X_1-X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 \geq -3 \\ 6X_1+7X_2 \leq 42 \\ 3X_1 - 2X_2 \leq 6 \\ X_1, X_2, \geq 0 \end{cases}$$

№ 16

$$W=7X_1 - X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} X_1+X_2 \geq 3 \\ 5X_1+X_2 \leq 5 \\ X_1+5X_2 \geq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 17

$$W=7X_1+X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 +X_2 \leq 14 \\ 3X_1 - 5X_2 \leq 15 \\ 5X_1 +3X_2 \geq 21 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 20

$$W=2X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 3X_1 -2X_2 \geq -6 \\ X_1+X_2 \geq 6 \\ 0 \leq X_1 \leq 9 \\ 0 \leq X_2 \leq 6 \end{cases}$$

№ 21

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 5X_1 - 2X_2 \leq 4 \\ X_1 - 2X_2 \geq -4 \\ X_1 + X_2 \geq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 22

$$W=2X_1-4X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 8X_1 - 5X_2 \leq 16 \\ X_1 + 3X_2 \geq 2 \\ 2X_1 + 7X_2 \leq 9 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 23

$$W=X_1+X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 3X_1 + X_2 \geq 8 \\ X_1 + 2X_2 \geq 6 \\ X_1 - X_2 \leq 3 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 24

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} -3X_1 + 2X_2 \leq 9 \\ 3X_1 + 4X_2 \leq 27 \\ 2X_1 + X_2 \geq 14 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 25

$$W=7X_1-2X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \geq 1 \\ -3X_1 + X_2 \leq 3 \\ 2X_1 + X_2 \leq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№26

$$W=X_1+X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 14 \\ -5X_1 + 3X_2 \leq 15 \\ 4X_1 + 6X_2 \geq 24 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 27

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 10 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 16 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 28

$$W=X_1+X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 \leq 16 \\ -4X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ X_1 + 3X_2 \geq 6 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№29

$$W=-2X_1+X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 3X_1 - 2X_2 \leq 12 \\ -X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ 2X_1 + 3X_2 \geq 6 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 30

$$W=7X_1-2X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 5X_1 - 2X_2 \leq 10 \\ X_1 + X_2 \geq 1 \\ -3X_1 + X_2 \leq 3 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 31

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 8 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 16 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 32

$$W=3X_1+4X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 6X_1 + 2X_2 \leq 18 \\ X_1 + X_2 \leq 3 \\ X_1 + 4X_2 \geq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 33

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 6 \\ 3X_1 + 10X_2 \leq 30 \\ X_1 + 4X_2 \geq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 34

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 10 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 12 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 35

$$W=3X_1+4X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 6X_1 + 2X_2 \leq 18 \\ X_1 + X_2 \leq 3 \\ X_1 + 4X_2 \geq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 36

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 10 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1. Что называется решением или планом задачи ЛП?
2. Допустимое множество решений.
3. Оптимальное решение задачи ЛП.
4. Алгоритм графического метода решения задач ЛП.
5. Примеры областей допустимых решений задачи ЛП.

Лабораторная работа №2

Тема: Решение задач линейного программирования табличным симплексным методом и методом искусственных переменных.

Цель работы:

- изучить алгоритм табличного симплекс-метода;
- изучить алгоритм метода искусственных переменных;
- реализовать изученные алгоритмы либо в среде Excel, либо в какой-либо другой программной среде.

Теоретическая часть

Переход к каноническому виду

Расширенная форма задачи ЛП

Пусть задача ЛП задана в общем виде:

$$W = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \max (\min)$$

при системе ограничений:

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i = b_j, \text{ где } i=\overline{1, n}, j=\overline{1, m_1}, \\ \sum_i a_{ij} x_i \leq b_j, \text{ где } i=\overline{1, n}, j=\overline{m_1+1, m_2}, & (*) \\ \sum_i a_{ij} x_i \geq b_j, \text{ где } i=\overline{1, n}, j=\overline{m_2+1, m}, & (**) \end{cases}$$

и условиях:

$$x_k \geq 0, k=\overline{1, r}, r \leq n.$$

Перейдем к каноническому виду:

- 1) При переходе от ограничений неравенств к равенствам вводят дополнительно неотрицательные переменные, количество которых равно числу неравенств x_{n+q} , где $q=\overline{m_1+1, m}$, которые прибавляются к левым частям ограничений (*) и вычитаются из левых частей ограничений (**). В целевую функцию дополнительные переменные входят с нулевыми коэффициентами. В таком виде задача ЛП называется **расширенной**.
- 2) Если в постановке задачи на некоторые переменные не наложены условия неотрицательности, то их представляют в виде разности неотрицательных переменных.

Например, для задачи (*), (**) вводим:

$$x_k = x_k^1 - x_k^2, k > r$$

$$x_k^1, x_k^2 \geq 0$$

и теперь получили канонический вид.

Метод симплекс-таблиц

Рассмотрим задачу ЛП с системой ограничений в каноническом виде:

$$\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i = b_j, \quad j = \overline{1, m}$$

Опр. Если при неотрицательности правых частей каждое ограничение системы ограничений-равенств имеет переменную, входящую в левую часть, с коэффициентом тождественно равным 1, а во все остальные уравнения с коэффициентом равным 0, то говорят, что система представлена в **предпочтительном виде**.

Пример симплекс-таблицы, когда A_1, A_2, \dots, A_m – единичный базис.

Таблица

C			C ₁	C ₂	C ₃	...	C _i	C _e	C _n
	X	B	A ₁	A ₂	A ₃	...	A _i	...	A _n
C ₁	X ₁	b ₁	a ₁₁	a ₁₂	a ₁₃		a _{1i}		a _{1n}
C ₂	X ₂	b ₂	a ₂₁	a ₂₂	a ₂₃		a _{2i}		a _{2n}
...									
C _j	X _j	b _j	a _{j1}	a _{j2}	a _{j3}		a _{ji}	a _{je}	a _{jn}
C _r		b _r					a _{ri}	a _{re}	
C _m	X _m	b _m	a _{m1}	a _{m2}	a _{m3}		a _{mi}		a _{mn}
	W	b ₀	Q ₁ = a ₀₁	Q ₂ = a ₀₂	Q ₃ = a ₀₃		Q _i = a _{0i}		Q _n = a _{0n}

В первой строке и первом столбце записываются значения коэффициентов целевой функции c_i ; $i = \overline{1, n}$.

В столбце **X** записывают базисные переменные x_j ; $j = \overline{1, m}$. Их значения определяются столбцом **B** свободных коэффициентов b_i , т.е. $x_j^* = b_j$, $j \in I_0$.

В столбцах A_1, A_2, \dots, A_n записывают значения с коэффициентом a_{jr} , $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$.

Последняя строка называется индексной. В ней записывают: в столбце **X** обозначение целевой функции:

$$W = \sum_{j \in I} c_j x_j,$$

а также оценки векторов $\theta_i = a_{0i}$.

Алгоритм метода симплекс-таблиц

1. Рассчитывают и заполняют начальную таблицу (с дополнительным единичным базисом), включая индексную строку.
2. В качестве направляющего столбца выбирают столбец A_i для которого $\theta_i = a_{0i} = \min\{\theta_e | \theta_e < 0\}$, $e = \overline{1, n}$, $e \notin I_0$ (т.е. вектор A_i вводится в базис).
3. Направляющая строка A_j выбирается из условия: $b_j/a_{ji} = \min\{b_r/a_{ri} | a_{ri} > 0\}$, $j \in I_0$, $i \notin I_0$ (перебираем строки i -го столбца).

4. Делают один шаг симплекс преобразования с направляющим элементом a_{ji} .

Для элементов направляющей строки:

$$a_{je}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{je}^{(k)} / a_{ji}^{(k)}; & \overline{e=1, n} \quad e \neq i, \\ 1, & \text{если } e=i, \end{cases} \quad (1)$$

$$b_j^{(k+1)} = b_j^{(k)} / a_{ji}^{(k)}.$$

Для элементов направляющего столбца:

$$a_{ri}^{(k+1)} = \begin{cases} 0; & r \neq j; \quad r \in \overline{1, m}, \\ 1; & r = j; \quad r \in \overline{1, m}. \end{cases} \quad (2)$$

Для остальных элементов:

$$\begin{aligned} a_{re}^{(k+1)} &= a_{re}^{(k)} - (a_{je}^{(k)} / a_{ji}^{(k)}) a_{ri}^{(k)}; & \text{где } e \neq i, \quad r \neq j, \\ b_r^{(k+1)} &= b_r^{(k)} - (b_j^{(k)} / a_{ji}^{(k)}) a_{ri}^{(k)}; & \text{где } r \neq j. \end{aligned} \quad (3)$$

Элементы индексной строки новой таблицы вычисляются по формулам:

$$W^{(k+1)} = b_0^{(k+1)} = b_0^{(k)} - b_j^{(k)} a_{0i}^{(k)} / a_{ji}^{(k)}, \quad (4)$$

$$\theta_e^{(k+1)} = a_{0e}^{(k+1)} = a_{0e}^{(k)} - a_{je}^{(k)} a_{0i}^{(k)} / a_{ji}^{(k)}, \quad e = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Правильность вычислений контролируют по формулам непосредственного счета

$$W^{(k+1)} = b_0^{(k+1)} = \sum_{j \in I} c_j b_j^{(k+1)}. \quad (6)$$

Эта формула только для контроля:

$$\theta_e^{(k+1)} = a_{0e}^{(k+1)} = \sum_{j \in I} c_j a_{je}^{(k+1)} - c_e. \quad (7)$$

Примечание:

Т.к. базисные вектора образуют единичную матрицу, то:

$$\alpha_{jc} = a_j$$

В столбце **X** заменяют x_j на x_i . А в столбце **C** заменяют c_j на c_i .

Метод искусственных переменных

При приведении системы ограничений к предпочтительному виду возможны следующие случаи:

1. Пусть ограничение задачи ЛП имеет вид:

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq b_j, \quad \overline{j=1, m}$$

Добавив к левым частям дополнительную переменную x_{n+j} ; $\overline{j=1, m}$, получим расширенную задачу, эквивалентную исходной и в которой система ограничений имеет предпочтительный вид:

$$\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i + x_{n+j} = b_j, \quad j = \overline{1, m}$$

Это означает, что в начальный единичный базис можно включить вектора $\{A_{n+j}\}$ $J = \overline{1, m}$.

Следовательно, начальный опорный план:

$$X = (0; 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m)$$

← n → ← m →

В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с нулевыми коэффициентами, т.е.

$$C_{n+j} = 0; \quad j = \overline{1, m}$$

2. Пусть ограничения задачи ЛП имеют вид:

$$\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \geq b_j, \quad b_j \geq 0$$

Вычтем из левых частей дополнительные переменные $x_{n+j} \geq 0$, получим расширенную задачу, эквивалентную исходной. Но теперь в ней система ограничений не имеет предпочтительного вида, так как дополнительные переменные входят в левую часть с коэффициентом = -1

$$\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i - x_{n+j} = b_j, \quad j = \overline{1, m}$$

По тому плану начальный план недопустим

$$X_H = (0; 0, \dots, 0, -b_1, -b_2, \dots, -b_m)$$

← n → ← m →

В этом случае вводят так называемый искусственный базис. К левым частям системы ограничений типа равенств, не имеющих предпочтительного вида, добавляют искусственные переменные.

В целевую функцию искусственные переменные вводят с коэффициентом +M при решении задачи на min и с коэффициентом -M при решении задачи на max, где M-большое положительное число

$$M \gg C_i \quad i = \overline{1, n}$$

Полученная задача называется M-задачей и соответствует исходной. Она всегда имеет предпочтительный вид.

Теорема. Если в оптимальном плане M-задачи

$$X_{\text{opt } M} = (x_{01}; x_{02}, \dots, x_{0n}, x_{0n+1}, \dots, x_{0n+m})$$

← n → ← m →

все искусственные переменные $x_{n+j} = 0$, то план $X_{\text{opt}} = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$

оптимален для исходной задачи.

Если же хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля, то система ограничений исходной задачи несовместна.

Искусственные переменные при использовании симплекс-метода образуют начальное базисное решение. Применяв симплекс-метод, необходимо вывести из базиса все искусственные переменные. Если доказано, что от них нельзя избавиться, то задача, не имеет решения, ее ограничения противоречивы.

Контрольные вопросы

1. Каноническая форма записи ограничений задачи ЛП.
2. Предпочтительный вид представления ограничений задачи ЛП.
3. Какие есть способы нахождения значения целевой функции?
4. Критерий оптимальности в задачах ЛП на \max (\min).
5. Какой метод решения систем линейных уравнений лежит в основе метода симплекс-таблиц?
6. Как определяется вектор для включения в базис, если первоначальный план не является оптимальным?
7. Как определить вектор, подлежащий исключению из базиса? Какой элемент называется направляющим?
8. Какая переменная называется искусственной, когда она вводится и какой коэффициент соответствует целевой функции?
9. Зачем в системе ограничений необходим единичный базис?
10. Когда оптимальный план расширенной задачи является оптимальным планом исходной задачи?
11. Когда исходная задача не совместна и как это определить с помощью решения расширенной задачи?
12. Как определяется вектор, подлежащий включению в базис при использовании искусственного базиса?
13. Что понимается под предпочтительным видом записи уравнений ограничений?

Пример решения задачи ЛП табличным симплекс-методом в среде Excel

Условие задачи

$$W=3X_1+3X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 - 4X_2 \leq 4 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Предпочтительная форма записи задачи ЛП:

$$W=3X_1+3X_2 + 0X_3+ 0X_4 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 - 4X_2 + 1X_3 + 0X_4 = 4 \\ 3X_1 + 2X_2 + 0X_3 + 1X_4 = 6 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Решение задачи табличным симплекс-методом:

Таблица 1

	A	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
1		c			3	3	0	0			
2			X	B	A1	A2	A3	A4			
3		0	X3		4	1	-4	1			
4		0	X4		6	3	2	0			
5		W			0	-3	-3	0			
6											
7		MAX								0	
8		MIN								-3	A1
9											
10											
11		c			3	3	0	0			
12			X	B	A1	A2	A3	A4			
13		0	X3		4	0	-4	1			
14		3	X1		2	1	2/3	0			
15		W			6	0	-1	0			
16											
17		MAX								6	
18		MIN								-1	A2
19											
20											
21		c			3	3	0	0			
22			X	B	A1	A2	A3	A4			
23		0	X3		4	0	0	1			
24		3	X2		3	1 1/2	1	0			
25		W			9	1,5	0	0			
26		MAX								9	
27		MIN								0	A3
28	Оптимальный план	X1	0								
29		X2	3								
30		X3	4								
31		X4	0								

X3 в таблице1 определяется по следующей формуле:

ЕСЛИ(И((F3=1);(F4=0));"X1";ЕСЛИ(И((G3=1);(G4=0));"X2";ЕСЛИ(И((H3=1);(H4=0));"X3";ЕСЛИ(И((I3=1);(I4=0));"X4"))))

Определение коэффициента целевой функции в столбце **C**:

ЕСЛИ(И((F13=1);(F14=0));F11;ЕСЛИ(И((G13=1);(G14=0));G11;ЕСЛИ(И((H13=1);(H14=0));H11;ЕСЛИ(И((I13=1);(I14=0));I11))))

Нахождение значения целевой функции на каждой итерации:

СУММ(C13*E13;C14*E14)-E11

Нахождение значения оценки для вектора **A1** в индексной строке:

СУММ(C13*F13;C14*F14)-F11

Варианты задач к лабораторной работе

№ 1

$$W=2X_1+X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 3X_1 - 2X_2 \leq 12 \\ -X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ 2X_1 + 3X_2 \geq 5 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 2

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 12 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 3

$$W=-2X_1+3X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 24 \\ X_1 + 2X_2 \leq 22 \\ X_1 - X_2 \geq 10 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 4

$$W=7X_1 - 2X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 5X_1 - 2X_2 \leq 3 \\ X_1 + X_2 \geq 1 \\ 2X_1 + X_2 \leq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 5

$$W=2X_1+7X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 12X_1+13X_2 \geq 17 \\ 3X_1+X_2 \leq 5 \\ X_1+4X_2 \leq 6 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 6

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 6 \\ 3X_1 + 10X_2 \leq 30 \\ X_1 + 11X_2 \geq 22 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 7

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 10 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 15 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 8

$$W=3X_1+4X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 6X_1 + 2X_2 \leq 175 \\ X_1 + X_2 \leq 30 \\ X_1 + 4X_2 \geq 84 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 9

$$W=2X_1+3X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 10 \\ -2X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 10

$$W=X_1+X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 \leq 16 \\ -4X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ X_1 + 3X_2 \geq 9 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 11

$$W=4X_1+X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 \leq 12 \\ X_1+3X_2 \leq 18 \\ 2X_1+5X_2 \geq 10 \\ X_1, X_2, \geq 0 \end{cases}$$

№ 12

$$W=2X_1+3X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 \leq 16 \\ 3X_1+2X_2 \leq 18 \\ -X_1+3X_2 \geq 24 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 18

$$W=8X_1+7X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 \leq 12 \\ 4X_1 + X_2 \leq 16 \\ 5X_1 + 5X_2 \geq 25 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 19

$$W=2X_1+3X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 \leq 16 \\ 3X_1+2X_2 \leq 18 \\ -X_1+3X_2 \geq 10 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 13

$$W=-2X_1+X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 \geq 10 \\ 3X_1 + X_2 \geq 15 \\ X_1 \leq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 14

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1+X_2 \leq 4 \\ 3X_1+X_2 \geq 4 \\ X_1+5X_2 \geq 4 \\ 0 \leq X_1 \leq 3 \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 15

$$W=2X_1-X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 \geq -3 \\ 6X_1 + 7X_2 \leq 42 \\ 3X_1 - 2X_2 \leq 6 \\ X_1, X_2, \geq 0 \end{cases}$$

№ 16

$$W=7X_1 - X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \geq 3 \\ 5X_1 + X_2 \leq 5 \\ X_1 + 5X_2 \geq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 17

$$W=7X_1+X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 14 \\ 3X_1 - 5X_2 \leq 15 \\ 5X_1 + 3X_2 \geq 21 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 20

$$W=2X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 3X_1 - 2X_2 \geq -6 \\ X_1 + X_2 \geq 6 \\ 0 \leq X_1 \leq 9 \\ 0 \leq X_2 \leq 6 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 21

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 5X_1 - 2X_2 \leq 4 \\ X_1 - 2X_2 \geq -4 \\ X_1 + X_2 \geq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 22

$$W=2X_1-4X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 8X_1 - 5X_2 \leq 16 \\ X_1 + 3X_2 \geq 2 \\ 2X_1 + 7X_2 \leq 9 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 23

$$W=X_1+X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 3X_1 + X_2 \geq 8 \\ X_1 + 2X_2 \geq 6 \\ X_1 - X_2 \leq 3 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 24

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} -3X_1 + 2X_2 \leq 9 \\ 3X_1 + 4X_2 \leq 27 \\ 2X_1 + X_2 \geq 14 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 25

$$W=7X_1-2X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \geq 1 \\ -3X_1 + X_2 \leq 3 \\ 2X_1 + X_2 \leq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№26

$$W=X_1+X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 14 \\ -5X_1 + 3X_2 \leq 15 \\ 4X_1 + 6X_2 \geq 24 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 27

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 10 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 16 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 28

$$W=X_1+X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 \leq 16 \\ -4X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ X_1 + 3X_2 \geq 6 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№29

$$W=-2X_1+X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 3X_1 - 2X_2 \leq 12 \\ -X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ 2X_1 + 3X_2 \geq 6 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 30

$$W=7X_1-2X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 5X_1 - 2X_2 \leq 10 \\ X_1 + X_2 \geq 1 \\ -3X_1 + X_2 \leq 3 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 31

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 8 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 16 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 32

$$W=3X_1+4X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 6X_1 + 2X_2 \leq 18 \\ X_1 + X_2 \leq 3 \\ X_1 + 4X_2 \geq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 33

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 6 \\ 3X_1 + 10X_2 \leq 30 \\ X_1 + 4X_2 \geq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 34

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 10 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 12 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 35

$$W=3X_1+4X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 6X_1 + 2X_2 \leq 18 \\ X_1 + X_2 \leq 3 \\ X_1 + 4X_2 \geq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 36

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 10 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Лабораторная работа №3

Тема: Линейное программирование. Двойственная задача.

Цель работы:

- изучить использование теорем двойственности для нахождения оптимальных решений пары двойственных задач,
- найти оптимальное решение прямой задачи по результатам решения двойственной задачи табличным симплекс-методом.

Виды математических моделей двойственных задач

Виды модели делятся на две группы:

I. Симметричная пара двойственных задач (система ограничений задается в виде неравенств и на переменные наложено условие не отрицательности):

Прямая	Двойственная
1. $W=C^T X \rightarrow \max$ $AX \leq B$ $X \geq 0$	$F=B^T Y \rightarrow \min$ $A^T Y \geq C$ $Y \geq 0$
2. $W=C^T X \rightarrow \min$ $AX \geq B$ $X \geq 0$	$F=B^T Y \rightarrow \max$ $A^T Y \leq C$ $Y \geq 0$

II. Несимметричная пара двойственных задач (система ограничений прямой задачи задана равенствами; а в двойственной задаче неравенствами, причем в двойственной переменные могут быть меньше нуля (<0)).

Прямая	Двойственная
1. $W=C^T X \rightarrow \max$ $AX = B$ $X \geq 0$	$F=B^T Y \rightarrow \min$ $A^T Y \geq C$
2. $W=C^T X \rightarrow \min$ $AX = B$ $X \geq 0$	$F=B^T Y \rightarrow \max$ $A^T Y \leq C$

Примечание:

Всякую симметричную пару двойственных задач можно представить в виде несимметричной.

По первой основной теореме двойственности между оптимальными решениями прямой и двойственных задач и элементами индексных строк симплекс-таблиц, соответствующих этим решениям, существует взаимосвязь.

Если прямая задача решается на **max**, то справедливо следующее соотношение:

$$Y_{0j} = \theta_{n+j}^{\Pi}; \quad j = \overline{1, m}$$

$$X_{0i} = -\theta_{m+i}^{\text{Д}}; \quad i = \overline{1, n}$$

Если прямая задача решается на **min**, то справедливы следующие условия:

$$Y_{0j} = -\theta_{n+j}^{\Pi}; \quad j = \overline{1, m}$$

$$X_{0i} = \theta_{m+i}^{\text{Д}}; \quad i = \overline{1, n}$$

Здесь n -количество переменных прямой задачи, m -количество ее ограничений, $-\theta_{n+j}^{\Pi}$, $\theta_{m+i}^{\text{Д}}$ –соответствующие элементы индексных строк прямой (Π) и двойственной (Д) задач.

Контрольные вопросы

1. Запишите возможные виды математических моделей.
2. Как найти оптимальное решение двойственной задачи по оптимальному решению прямой задачи в симплекс-таблице и наоборот?
3. Когда двойственная задача не имеет оптимального решения?
4. Какое существует взаимно однозначное соответствие между переменными исходной задачи и ограничениями двойственной.

Варианты задач к лабораторной работе

№ 1

$$W=2X_1+X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 3X_1 - 2X_2 \leq 12 \\ -X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ 2X_1 + 3X_2 \geq 5 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 2

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 12 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 3

$$W=-2X_1+3X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 24 \\ X_1 + 2X_2 \leq 22 \\ X_1 - X_2 \geq 10 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 4

$$W=7X_1 - 2X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 5X_1 - 2X_2 \leq 3 \\ X_1 + X_2 \geq 1 \\ 2X_1 + X_2 \leq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 5

$$W=2X_1+7X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 12X_1+13X_2 \geq 17 \\ 3X_1+X_2 \leq 5 \\ X_1+4X_2 \leq 6 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 6

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 6 \\ 3X_1 + 10X_2 \leq 30 \\ X_1 + 11X_2 \geq 22 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 7

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 10 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 15 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 8

$$W=3X_1+4X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 6X_1 + 2X_2 \leq 175 \\ X_1 + X_2 \leq 30 \\ X_1 + 4X_2 \geq 84 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 9

$$W=2X_1+3X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 10 \\ -2X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 10

$$W=X_1+X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 \leq 16 \\ -4X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ X_1 + 3X_2 \geq 9 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 11

$$W=4X_1+X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 \leq 12 \\ X_1+3X_2 \leq 18 \\ 2X_1+5X_2 \geq 10 \\ X_1, X_2, \geq 0 \end{cases}$$

№ 12

$$W=2X_1+3X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 \leq 16 \\ 3X_1+2X_2 \leq 18 \\ -X_1+3X_2 \geq 24 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 18

$$W=8X_1+7X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 \leq 12 \\ 4X_1 + X_2 \leq 16 \\ 5X_1 + 5X_2 \geq 25 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 19

$$W=2X_1+3X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 \leq 16 \\ 3X_1+2X_2 \leq 18 \\ -X_1+3X_2 \geq 10 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 13

$$W=-2X_1+X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 \geq 10 \\ 3X_1 + X_2 \geq 15 \\ X_1 \leq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 14

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 4 \\ 3X_1 + X_2 \geq 4 \\ X_1 + 5X_2 \geq 4 \\ 0 \leq X_1 \leq 3 \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 15

$$W=2X_1-X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 \geq -3 \\ 6X_1 + 7X_2 \leq 42 \\ 3X_1 - 2X_2 \leq 6 \\ X_1, X_2, \geq 0 \end{cases}$$

№ 16

$$W=7X_1 - X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \geq 3 \\ 5X_1 + X_2 \leq 5 \\ X_1 + 5X_2 \geq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 17

$$W=7X_1+X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 14 \\ 3X_1 - 5X_2 \leq 15 \\ 5X_1 + 3X_2 \geq 21 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 20

$$W=2X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 3X_1 - 2X_2 \geq -6 \\ X_1 + X_2 \geq 6 \\ 0 \leq X_1 \leq 9 \\ 0 \leq X_2 \leq 6 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 21

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 5X_1 - 2X_2 \leq 4 \\ X_1 - 2X_2 \geq -4 \\ X_1 + X_2 \geq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 22

$$W=2X_1-4X_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{cases} 8X_1 - 5X_2 \leq 16 \\ X_1 + 3X_2 \geq 2 \\ 2X_1 + 7X_2 \leq 9 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 23

$$\begin{aligned} W &= X_1 + X_2 \rightarrow \text{MIN} \\ \begin{cases} 3X_1 + X_2 \geq 8 \\ X_1 + 2X_2 \geq 6 \\ X_1 - X_2 \leq 3 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

№ 24

$$\begin{aligned} W &= X_1 + 2X_2 \rightarrow \text{MAX} \\ \begin{cases} -3X_1 + 2X_2 \leq 9 \\ 3X_1 + 4X_2 \leq 27 \\ 2X_1 + X_2 \geq 14 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

№ 25

$$\begin{aligned} W &= 7X_1 - 2X_2 \rightarrow \text{MIN} \\ \begin{cases} X_1 + X_2 \geq 1 \\ -3X_1 + X_2 \leq 3 \\ 2X_1 + X_2 \leq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

№ 26

$$\begin{aligned} W &= X_1 + X_2 \rightarrow \text{MAX} \\ \begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 14 \\ -5X_1 + 3X_2 \leq 15 \\ 4X_1 + 6X_2 \geq 24 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

№ 27

$$\begin{aligned} W &= X_1 + 2X_2 \rightarrow \text{MAX} \\ \begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 10 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 16 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

№ 28

$$\begin{aligned} W &= X_1 + X_2 \rightarrow \text{MIN} \\ \begin{cases} 2X_1 + 4X_2 \leq 16 \\ -4X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ X_1 + 3X_2 \geq 6 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

№ 29

$$\begin{aligned} W &= -2X_1 + X_2 \rightarrow \text{MIN} \\ \begin{cases} 3X_1 - 2X_2 \leq 12 \\ -X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ 2X_1 + 3X_2 \geq 6 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

№ 30

$$\begin{aligned} W &= 7X_1 - 2X_2 \rightarrow \text{MIN} \\ \begin{cases} 5X_1 - 2X_2 \leq 10 \\ X_1 + X_2 \geq 1 \\ -3X_1 + X_2 \leq 3 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

№ 31

$$\begin{aligned} W &= X_1 + 2X_2 \rightarrow \text{MAX} \\ \begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 8 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 16 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

№ 32

$$\begin{aligned} W &= 3X_1 + 4X_2 \rightarrow \text{MAX} \\ \begin{cases} 6X_1 + 2X_2 \leq 18 \\ X_1 + X_2 \leq 3 \\ X_1 + 4X_2 \geq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

№ 33

$$\begin{aligned} W &= X_1 + 2X_2 \rightarrow \text{MAX} \\ \begin{cases} X_1 + X_2 \leq 6 \\ 3X_1 + 10X_2 \leq 30 \\ X_1 + 4X_2 \geq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

№ 34

$$\begin{aligned} W &= X_1 + 2X_2 \rightarrow \text{MAX} \\ \begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 10 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 12 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

№ 35

$$W=3X_1+4X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 6X_1 + 2X_2 \leq 18 \\ X_1 + X_2 \leq 3 \\ X_1 + 4X_2 \geq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

№ 36

$$W=X_1+2X_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{cases} 4X_1 - 2X_2 \leq 10 \\ -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Лабораторная работа №4

Тема: Транспортная задача.

Цель работы:

- изучить и сравнить методы нахождения начального опорного плана (метод северо-западного угла и метод минимального элемента),
- реализовать алгоритмы обоих методов.

Постановка транспортной задачи по критерию стоимости

Пусть имеются пункты-поставщики:

$$A_j; \quad j=\overline{1,m}$$

располагающие некоторым однородным продуктом объемом по a_j единиц, и пункты потребители

$$B_i; \quad i=\overline{1,n}$$

с объемом потребления по b_i единиц.

Задана матрица $C=\{C_{ji}\}$ - матрица тарифов или транспортных издержек, где C_{ji} - стоимость перевозки единицы продукции от j поставщика i -му потребителю.

Возникает задача определения плана перевозок

$$X=\{x_{ji}\},$$

(где x_{ji} -количество единиц продукции, поставляемой из пункта A_j в B_i)

такого, что запросы всех потребителей будут полностью удовлетворены, т.е. весь продукт от поставщиков вывезен и суммарные транспортные издержки будут \min .

Условия этой задачи удобно представить в виде таблицы 2.

Таблица 2.

		Объем потребления					
		b_1	b_2	b_i	b_n
Объем производства	a_1	C_{11}	C_{12}	C_{1i}	C_{1n}
	x_{11}	x_{12}	x_{1i}	x_{1n}	
	a_2	C_{21}	C_{2i}	C_{2n}
	x_{21}	x_{2i}	x_{2n}	
	
	a_j	C_{j1}	C_{ji}	C_{jn}
	x_{j1}	x_{ji}	x_{jn}	
.....		
a_m	C_{m1}	C_{mi}	C_{mn}	
x_{m1}	x_{mi}	x_{mn}		

Построим математическую модель задачи.

Функция цели – минимизация суммарных затрат на перевозку продукции:

$$W = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_{ji} x_{ji} \rightarrow \min \quad (1)$$

Ограничения:

- 1) на запасы продукции у поставщиков, которые по условию задачи должны быть полностью вывезены:

$$\sum_{i=1}^n x_{ji} = a_j, j = \overline{1, m} \quad (2)$$

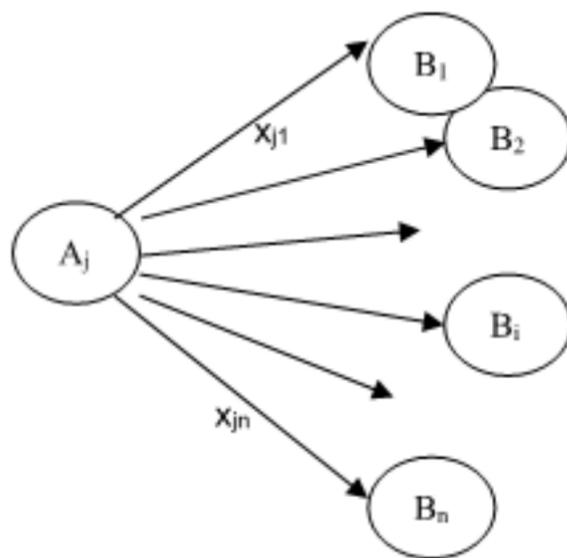


Рисунок 2

- 2) на запросы потребителей, которые по условию задачи должны быть полностью удовлетворены:

$$\sum_{j=1}^m x_{ji} = b_i, i = \overline{1, n} \quad (3)$$

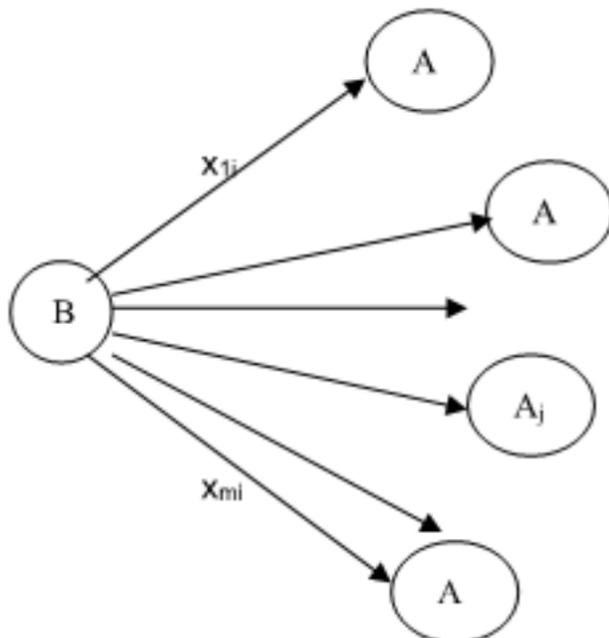


Рисунок 3

- 3) условие неотрицательности, исключающее обратные перевозки

$$x_{ji} \geq 0 \quad \forall j, i \quad (4)$$

На практике существуют задачи, в которых выполняются равенство между суммарными ресурсами (запасами) и суммарными потребностями (условие баланса)

$$\sum_{j=1}^m a_j = \sum_{i=1}^n b_i \quad (5)$$

(объем производства равен объему потребления), так задачи, в которых объем производства не равен объему потребления:

$$\sum_{j=1}^m a_j \neq \sum_{i=1}^n b_i \quad (6)$$

Задача (1) ÷ (4) при условии (5) называется **закрытой моделью**, а при условии (6) – **открытой**.

Теорема: Любая транспортная задача, у которой суммарный объем запаса совпадает с суммарным объемом потребления, имеет решение.

Таким образом, условие (5) является необходимым и достаточным условием совместности (2) и (3) и, следовательно, разрешимости задачи.

Открытая модель должна быть сведена к закрытой транспортной модели.

При

$$\sum_{j=1}^m a_j > \sum_{i=1}^n b_i$$

(запасы поставщиков превышают потребности потребителей) вводят дополнительный (фиктивный) пункт потребления, запросы которого равны излишку запаса

$$b_{n+1} = \sum_{j=1}^m a_j - \sum_{i=1}^n b_i \quad (7)$$

При

$$\sum_{j=1}^n a_j > \sum_{i=1}^m b_i$$

(запросы больше запасов) вводится дополнительный (фиктивный) пункт производства, запасы которого считают равными недостающей продукции:

$$a_{m+1} = \sum_{i=1}^n b_i - \sum_{j=1}^m a_i \quad (8)$$

В обоих случаях при выполнении условия (7) или (8) получим расширенную закрытую модель.

Матрицу $X=\{x_{ji}\}$, удовлетворяющую условию (2)÷(5), называют **допустимым** планом перевозок, а x_{ji} – **допустимыми перевозками**.

Допустимый план X , доставляющий W (формула (1)) минимальное значение, называется **оптимальным** X_0 .

Матрица $C=\{c_{ji}\}$ называется **матрицей тарифов** или матрицей транспортных издержек.

Оптимальный план расширенной закрытой модели дает оптимальный план исходной задачи. В случае введения фиктивного потребителя (7) поставщики $x_{j,n+1}$ в оптимальном плане расширенной задачи покажут остатки продукции на складах поставщиков. Тарифы $C_{j,n+1}$ считаются равными нулю.

В случае введения фиктивного поставщика (8) поставки $x_{m+1,j}$ в оптимальном плане расширенной задачи покажут объемы недостачи продукции.

Метод северо-западного угла

Рассмотрим идею метода на примере.

Дана транспортная задача с четырьмя пунктами производства с объемами производства $\{a_j\} \{1,2,3,4\}$ и четырьмя пунктами потребления с объемами потребления $\{b_i\} \{5,1,2,2\}$.

Построим матрицу транспортной задачи.

		a_j									
$X =$	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0
	2	1	0	0	3	3	3	1	0	0	0
	0	0	2	2	4	4	4	4	4	2	0
b_i	5	1	2	2							
	4	1	2	2							
	2	1	2	2							
	0	1	2	2							
	0	0	2	2							
	0	0	0	2							
	0	0	0	0							
	0	0	0	0							

Для удобства вычисления в столбцах справа будем записывать остатки не вывезенного продукта, а в строках неудовлетворенные потребности. Заполнение таблицы начинают с левого верхнего угла.

Сравнив $a_j=1$ и $b_1=5$, выбираем меньшее из них и получаем $x_{11} = 1$. Так как выбор произведен по строке, то оставшая часть левой строки должна быть заполнена 0 (из данного пункта больше ничего вывезти нельзя).

Во вспомогательном столбце записываются остатки не вывезенного продукта. $a_{ji}=0$. Во вспомогательной строке не удовлетворенные потребности после одного шага заполнения. Переходим ко второй строке и начинаем заполнение со строки x_{21} : $a_2^{(1)}=2$; $b_1^{(1)}=4$, выбираем меньшее из них. Поэтому $x_{21}=2$. Остальную часть второй строки заполняем нулями. И так далее.

Алгоритм метода северо-западного угла

1. Определим верхний левый элемент матрицы X .

$$x_{11} = \min(a_1, b_1)$$

Возможны три случая:

- если $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$ и вся первая строка, начиная со второго элемента, заполняется нулями. Больше ничего из пункта A_1 вывезти нельзя.
- если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$, а все оставшиеся элементы первого столбца заполняются нулями. В пункт B_1 , больше ничего привозить не нужно.
- если $a_1 = b_1$, то $x_{11} = a_1 = b_1$, а все оставшиеся элементы первого столбца и первой строки заполняются нулями.

На этом первый шаг метода заканчивается.

2. Пусть проделано k шагов.

$k+1$ шаг состоит в следующем: определяют верхний левый элемент незаполненной верхней части матрицы X .

Пусть этот элемент $x_{\lambda\mu}$ ($\lambda + \mu = k + 2$), $k = 0, 1, 2, \dots$, причем $x_{\lambda\mu} = \min\{a_\lambda^{(k)}, b_\mu^{(k)}\}$, где

$$a_\lambda^{(k)} = a_\lambda - \sum_{i=1}^m x_{\lambda i}$$

$$b_\mu^{(k)} = b_\mu - \sum_{j=1}^{\lambda-1} x_{j\mu}$$

Если $a_\lambda^{(k)} \leq b_\mu^{(k)}$, то заполняем нулями строки λ , начиная с $\mu + 1$ элемента. В противном случае заполняют нулями оставшуюся часть μ -го столбца. Метод северо-западного угла хорошо реализуется на ЭВМ.

Число итераций для получения оптимального решения транспортной задачи существенно зависит от начального плана, т.к. при использовании метода северо-западного угла не учитываются стоимости перевозок, т.е. сам начальный план в общем случае будет далек от оптимального. Поэтому при решении задачи вручную, целесообразнее применять другие методы, основанные на учете стоимости.

Метод минимального элемента

Он позволяет построить начальный опорный план транспортной задачи и является вариантом метода северо-западного угла, учитывающий специфику матрицы тарифов $C = \{c_{ji}\}$.

В отличие от метода северо-западного угла данный метод позволяет сразу получить достаточно экономичный план, сокращая общее количество итераций по его оптимизации.

Алгоритм метода минимального элемента

Элементы матрицы C нумеруют, начиная с минимального в порядке возрастания, и затем в этом же порядке заполняется матрица X , используя метод северо-западного угла.

Пример: Нумеруем матрицу тарифов (затемненные прямоугольники).

$A_j \setminus B_i$	1	2	3	4	B_i / A_j
1	7 10	8 11	5 7	3 5	11
2	2 3	4 6	5 8	9 12	11
3	6 9	3 4	1 1	2 2	8
A_j / B_i	5	9	9	7	$B_i \setminus A_j$

Проверяем условие баланса

$$\sum_{j=1}^3 a_j = 11+11+8 = 30,$$

$$\sum_{i=1}^4 b_i = 5+9+9+7 = 30.$$

$$\sum_{j=1}^3 a_j = \sum_{i=1}^4 b_i$$

поэтому задача разрешима.

Заполняется матрица X_H (начальный опорный план).

0	10	3	11	1	7	7	5	11	4	3	0
5	3	6	6	0	8	0	12	11	6	0	0
0	9	0	4	8	1	0	2	8	0	0	0
5		9		9		7					
0		3		1		7					
0		0		0		0					

В результате получаем следующий начальный опорный план:

$$X_H = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Соответствующее значение целевой функции:

$$W(X_H) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^4 c_{ji} x_{ji} = 3*8+1*5+7*3+5*2+6*4+8*1 = 92$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте транспортную задачу ЛП и напишите ее математическую модель.
2. Сформулируйте теорему о существовании решения транспортной задачи.
3. Какие существуют методы построения начального опорного плана и постройте опорный план с помощью этих методов?
4. Сколько положительных перевозок должен содержать невырожденный опорный план и почему?
5. В чем заключается опорность плана транспортной задачи, условия которой записаны в виде таблицы?
6. Какая модель транспортной задачи называется закрытой, а какая – открытой?
7. Как открытую модель преобразовать в закрытую?
8. Для решения каких экономических задач применяется транспортная задача?

Задание к лабораторной работе

Найти начальный опорный план транспортной задачи двумя методами.

Ниже приведены задачи по вариантам:

№1

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_j & & & \\ \hline & 3 & 1 & 7 & 5 \\ & 7 & 3 & 5 & 6 \\ & 6 & 6 & 4 & 3 \\ \hline b_i & 40 & 35 & 25 & 60 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го предприятия.

№2

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_j & & & \\ \hline & 5 & 2 & 4 & 1 \\ & 6 & 3 & 1 & 5 \\ & 3 & 2 & 4 & 2 \\ \hline b_i & 20 & 30 & 10 & 30 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го предприятия.

№3

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_j & & & \\ \hline & 3 & 5 & 6 & \\ & 4 & 4 & 2 & 80 \\ & 7 & 6 & 9 & 20 \\ & 12 & 10 & 4 & 20 \\ \hline b_i & 50 & 30 & 55 & \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го предприятия.

№4

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_j & & & \\ \hline & 4 & 5 & 6 & 2 \\ & 1 & 3 & 2 & 3 \\ & 4 & 1 & 5 & 1 \\ \hline b_i & 70 & 30 & 50 & 30 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,5)$ -объем производства j -предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го предприятия.

№5

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_j & & & \\ \hline & 2 & 3 & 4 & 3 \\ & 5 & 3 & 1 & 2 \\ & 2 & 1 & 4 & 2 \\ \hline b_i & 20 & 40 & 60 & 80 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го предприятия.

№6

$$C = \begin{array}{c|ccc} & a_j & & \\ \hline & 1 & 4 & 2 \\ & 6 & 2 & 7 \\ & 5 & 4 & 7 \\ & 5 & 4 & 8 \\ \hline b_i & 25 & 15 & 10 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го предприятия.

№7

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_j & & & \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 1 \\ & 2 & 3 & 1 & 5 \\ & 3 & 2 & 4 & 4 \\ \hline b_i & 30 & 30 & 10 & 20 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го предприятия.

№8

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_j & & & \\ \hline & 1 & 4 & 7 & 3 \\ & 5 & 6 & 8 & 9 \\ & 7 & 2 & 4 & 8 \\ \hline b_i & 50 & 70 & 20 & 40 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го предприятия.

№9

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} & & & & a_j \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 30 \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 40 \\ 7 & 5 & 3 & 1 & 70 \\ b_i & 35 & 40 & 25 & 70 \end{array} \right|$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№10

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} & & & & a_j \\ 5 & 8 & 4 & 4 & 80 \\ 1 & 2 & 3 & 8 & 45 \\ 4 & 7 & 6 & 1 & 60 \\ b_i & 45 & 60 & 70 & 40 \end{array} \right|$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№11

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} & & & & a_j \\ 4 & 5 & 5 & 7 & 10 \\ 8 & 7 & 5 & 4 & 20 \\ 1 & 6 & 4 & 5 & 50 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 30 \\ b_i & 40 & 30 & 20 & 40 \end{array} \right|$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№12

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} & & & & a_j \\ 2 & 7 & 3 & 6 & 30 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 70 \\ 5 & 7 & 6 & 2 & 50 \\ b_i & 20 & 40 & 35 & 60 \end{array} \right|$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№13

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} & & & & a_j \\ 1 & 3 & 3 & 8 & 20 \\ 8 & 6 & 2 & 6 & 20 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 40 \\ 5 & 2 & 4 & 5 & 45 \\ b_i & 25 & 30 & 40 & 15 \end{array} \right|$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№14

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} & & & & a_j \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 70 \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 40 \\ 7 & 5 & 3 & 1 & 30 \\ b_i & 35 & 50 & 20 & 70 \end{array} \right|$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№15

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} & & & & a_j \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 30 \\ 7 & 3 & 5 & 8 & 85 \\ 6 & 3 & 4 & 6 & 45 \\ b_i & 40 & 35 & 15 & 60 \end{array} \right|$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№16

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} & & & & a_j \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 50 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 30 \\ 6 & 2 & 4 & 1 & 20 \\ b_i & 30 & 30 & 10 & 20 \end{array} \right|$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№17

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 3 & 1 & 6 & 5 \\ & 7 & 3 & 5 & 6 \\ & 6 & 7 & 5 & 3 \\ \hline b_i & 40 & 30 & 25 & 50 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№18

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 1 \\ & 6 & 3 & 1 & 5 \\ & 3 & 6 & 4 & 2 \\ \hline b_i & 20 & 30 & 15 & 30 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№19

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 3 & 5 & 6 & 3 \\ & 6 & 4 & 2 & 8 \\ & 7 & 6 & 9 & 2 \\ & 2 & 10 & 4 & 2 \\ \hline b_i & 50 & 40 & 45 & \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№20

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 2 & 5 & 6 & 1 \\ & 1 & 3 & 2 & 3 \\ & 4 & 1 & 5 & 2 \\ \hline b_i & 60 & 30 & 50 & 30 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,5)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№21

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 1 & 3 & 5 & 3 \\ & 5 & 3 & 1 & 2 \\ & 2 & 1 & 4 & 2 \\ \hline b_i & 20 & 40 & 60 & 70 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№22

$$C = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline & 1 & 4 & 2 \\ & 6 & 2 & 1 \\ & 5 & 3 & 7 \\ & 5 & 4 & 3 \\ \hline b_i & 25 & 15 & 20 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№23

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 5 & 2 & 6 & 1 \\ & 2 & 3 & 1 & 5 \\ & 3 & 2 & 4 & 4 \\ \hline b_i & 30 & 30 & 15 & 20 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№24

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 1 & 4 & 6 & 3 \\ & 5 & 6 & 8 & 3 \\ & 5 & 2 & 4 & 8 \\ \hline b_i & 50 & 60 & 20 & 30 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№25

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} 4 & 5 & 5 & 7 & a_j \\ 8 & 7 & 5 & 4 & 80 \\ 3 & 2 & 9 & 3 & 20 \\ 30 & 40 & 20 & 70 & b_i \end{array} \right|$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№26

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 6 & a_j \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 30 \\ 5 & 7 & 6 & 2 & 70 \\ 15 & 40 & 30 & 60 & b_i \end{array} \right|$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№27

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 8 & a_j \\ 7 & 7 & 3 & 8 & 20 \\ 5 & 2 & 4 & 5 & 40 \\ 25 & 30 & 40 & 20 & b_i \end{array} \right|$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№28

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & 2 & a_j \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 30 \\ 7 & 5 & 3 & 1 & 40 \\ 35 & 30 & 20 & 70 & b_i \end{array} \right|$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№29

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 7 & 5 & a_j \\ 7 & 3 & 5 & 6 & 30 \\ 6 & 6 & 4 & 3 & 70 \\ 40 & 35 & 15 & 60 & b_i \end{array} \right|$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№30

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & a_j \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 50 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 30 \\ 30 & 40 & 10 & 20 & b_i \end{array} \right|$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№31

$$C = \left| \begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & a_j \\ 4 & 4 & 2 & 30 \\ 7 & 6 & 9 & 80 \\ 12 & 10 & 4 & 20 \\ 50 & 40 & 60 & b_i \end{array} \right|$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№32

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} 4 & 5 & 6 & 8 & a_j \\ 10 & 3 & 2 & 3 & 30 \\ 4 & 10 & 5 & 1 & 50 \\ 10 & 30 & 50 & 40 & b_i \end{array} \right|$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,5)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№33

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 2 & 3 & 4 & 3 \\ & 5 & 3 & 1 & 2 \\ & 2 & 1 & 4 & 2 \\ \hline b_i & 20 & 40 & 60 & 80 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№34

$$C = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline & 1 & 4 & 2 \\ & 6 & 2 & 7 \\ & 5 & 4 & 7 \\ & 5 & 4 & 8 \\ \hline b_i & 25 & 15 & 20 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№35

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 1 \\ & 2 & 3 & 1 & 5 \\ & 3 & 2 & 4 & 4 \\ \hline b_i & 30 & 30 & 10 & 20 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№36

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 1 & 4 & 7 & 3 \\ & 5 & 6 & 8 & 9 \\ & 7 & 2 & 4 & 8 \\ \hline b_i & 70 & 50 & 20 & 10 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

Лабораторная работа №5

Тема: Транспортная задача. Метод потенциалов.

Цель работы:

- изучить метод потенциалов для нахождения оптимального опорного плана транспортной задачи;
- реализовать алгоритм метода.

Метод потенциалов

Идея метода состоит в следующем. Сначала строится начальный опорный план одним из методов, изложенных в лабораторной работе №3, а затем осуществляется его улучшение, пока не будет удовлетворяться признак оптимального плана.

Алгоритм метода потенциалов решения транспортной задачи состоит из предварительного этапа и конечного числа итераций.

На предварительном этапе строят начальный опорный план X_0 . Затем для этого плана рассчитывают оценочную матрицу

$$D_0 = \|C_{ij} - (V_j - U_i)\|_{m \times n}, \quad (1)$$

где V_j и U_i – потенциалы пунктов отправления A_i и пунктов назначения B_j .

Предварительные потенциалы выбирают таким образом, чтобы для связанных коммуникациями пар пунктов, для которых в плане X_0 , $x_{ij} \neq 0$, разность потенциалов была равна c_{ij} :

$$V_j - U_i = c_{ij} \quad (2)$$

Если матрица D_0 не содержит отрицательных элементов, то X_0 – оптимальный план. В противном случае X_0 – неоптимальный план и его можно улучшить.

Описание алгоритма метода потенциалов

Предварительный этап

1. Определяем начальный опорный план X_0 одним из описанных способов.
2. Вычисляем оценочную матрицу D_0 . Для расчета элементов матрицы необходимо первоначально определить все потенциалы V_j и U_i . Строим схему перевозок, соответствующую начальному опорному плану X_0 , т. е. соединяем коммуникациями пункты отправления и назначения, для которых $x_{ij} \neq 0$. Пользуясь соотношением (2), определяем последовательно все потенциалы пунктов отправления и назначения,

принимая для удобства $U_1=0$. Затем по (1) находим элементы матрицы D_0 . Очевидно, что позиции матрицы D_0 , отвечающие базисным элементам плана X_0 , заняты нулями.

(k+1)-я итерация

1. Если в оценочной матрице D_k все элементы положительны, план $X_{(k)}$ – оптимальный, в противном случае следует приступить к его улучшению.
2. Выбираем наибольший по модулю отрицательный элемент оценочной матрицы $d_{st}^{(k)}$ и, начиная с соответствующего ему элемента x_{st} , в матрице $X_{(k)}$ строим замкнутую цепочку, в которую входят элементы $x_{ij}^{(k)} \neq 0$.

Затем определяем θ - минимальный элемент среди всех нечетных по порядку расположения в цепочке, считая первым следующим за x_{st} элемент.

3. Строим новый план $X_{(k+1)}$, прибавляя θ по всем четным элементам цепочки и вычитая из нечетных. Элементы матрицы $X_{(k)}$, не входящие в цепочку, переносятся в матрицу $X_{(k+1)}$ без изменения.
4. С помощью эквивалентных преобразований матрицы $D_{(k)}$ находим оценочную матрицу $D_{(k+1)}$ для нового плана $X_{(k+1)}$. Для этого подчеркиваем в матрице $D_{(k)}$ все элементы, соответствующие ненулевым элементам матрицы $X_{(k+1)}$ (они обязательно равны нулю). В матрице $D_{(k)}$ зачеркиваем строку, содержащую элемент d_{st} . Если в этой строке имеются подчеркнутые элементы, то зачеркиваем соответствующие этим элементам столбцы. Если в каждом зачеркнутом столбце имеются подчеркнутые элементы, зачеркиваем соответствующие им строки, и так до тех пор, пока описанная процедура выполнима. После этого по всем элементам зачеркнутых строк прибавляем $|d_{st}|$, а от элементов зачеркнутых столбцов вычитаем $|d_{st}|$. Получаем новую оценочную матрицу. Если в матрице $D_{(k+1)}$ нет отрицательных элементов, то план $X_{(k+1)}$ – оптимальный, иначе переходим к следующей итерации.

На этом итерация завершается.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение системе потенциалов, расскажите, как она строится.
2. В каком случае опорный план транспортной задачи является оптимальным?

Задание к лабораторной работе

Найти оптимальный опорный план транспортной задачи методом потенциалов:

Ниже приведены задачи по вариантам:

№1

$$C = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_j \\ & 3 & 1 & 7 & 5 & 30 \\ & 7 & 3 & 5 & 6 & 75 \\ & 6 & 6 & 4 & 3 & 45 \\ b_i & 40 & 35 & 25 & 60 & \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
предприятия.

№2

$$C = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_j \\ & 5 & 2 & 4 & 1 & 50 \\ & 6 & 3 & 1 & 5 & 30 \\ & 3 & 2 & 4 & 2 & 40 \\ b_i & 20 & 30 & 10 & 30 & \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
предприятия.

№3

$$C = \begin{array}{ccc|c} & & & a_j \\ & 3 & 5 & 6 & 30 \\ & 4 & 4 & 2 & 80 \\ & 7 & 6 & 9 & 20 \\ & 12 & 10 & 4 & 20 \\ b_i & 50 & 30 & 55 & \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -
предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го
предприятия.

№4

$$C = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_j \\ & 4 & 5 & 6 & 2 & 30 \\ & 1 & 3 & 2 & 3 & 90 \\ & 4 & 1 & 5 & 1 & 40 \\ b_i & 70 & 30 & 50 & 30 & \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,5)$ -объем производства j -
предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го
предприятия.

№5

$$C = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_j \\ & 2 & 3 & 4 & 3 & 80 \\ & 5 & 3 & 1 & 2 & 60 \\ & 2 & 1 & 4 & 2 & 80 \\ b_i & 20 & 40 & 60 & 80 & \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
предприятия.

№6

$$C = \begin{array}{ccc|c} & & & a_j \\ & 1 & 4 & 2 & 10 \\ & 6 & 2 & 7 & 15 \\ & 5 & 4 & 7 & 20 \\ & 5 & 4 & 8 & 25 \\ b_i & 25 & 15 & 10 & \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -
предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го
предприятия.

№7

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ \hline b_i & 30 & 30 & 10 & 20 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№8

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline 1 & 1 & 4 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 2 & 4 & 8 \\ \hline b_i & 50 & 70 & 20 & 40 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№9

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 9 & 1 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ \hline b_i & 35 & 40 & 25 & 70 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№10

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline 1 & 5 & 8 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 6 & 1 \\ \hline b_i & 45 & 60 & 70 & 40 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№11

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline 1 & 4 & 5 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ \hline b_i & 40 & 30 & 20 & 40 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№12

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline 1 & 2 & 7 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 2 \\ \hline b_i & 20 & 40 & 35 & 60 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№13

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 6 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & 5 \\ \hline b_i & 25 & 30 & 40 & 15 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№14

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 9 & 1 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ \hline b_i & 35 & 50 & 20 & 70 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№15

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 3 & 1 & 4 & 7 \\ & 7 & 3 & 5 & 8 \\ & 6 & 3 & 4 & 6 \\ \hline b_i & 40 & 35 & 15 & 60 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№16

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 4 & 2 & 4 & 1 \\ & 2 & 3 & 6 & 5 \\ & 6 & 2 & 4 & 1 \\ \hline b_i & 30 & 30 & 10 & 20 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№17

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 3 & 1 & 6 & 5 \\ & 7 & 3 & 5 & 6 \\ & 6 & 7 & 5 & 3 \\ \hline b_i & 40 & 30 & 25 & 50 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№18

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 1 \\ & 6 & 3 & 1 & 5 \\ & 3 & 6 & 4 & 2 \\ \hline b_i & 20 & 30 & 15 & 30 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№19

$$C = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline & 3 & 5 & 6 \\ & 6 & 4 & 2 \\ & 7 & 6 & 9 \\ & 2 & 10 & 4 \\ \hline b_i & 50 & 40 & 45 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№20

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 2 & 5 & 6 & 1 \\ & 1 & 3 & 2 & 3 \\ & 4 & 1 & 5 & 2 \\ \hline b_i & 60 & 30 & 50 & 30 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,5)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№21

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 1 & 3 & 5 & 3 \\ & 5 & 3 & 1 & 2 \\ & 2 & 1 & 4 & 2 \\ \hline b_i & 20 & 40 & 60 & 70 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№22

$$C = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline & 1 & 4 & 2 \\ & 6 & 2 & 1 \\ & 5 & 3 & 7 \\ & 5 & 4 & 3 \\ \hline b_i & 25 & 15 & 20 \end{array}$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№23

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 6 & 1 & a_j \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 30 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 20 \end{array} \right|$$

$$b_i \quad 30 \quad 30 \quad 15 \quad 20$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го предприятия.

№24

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 6 & 3 & a_j \\ 5 & 6 & 8 & 3 & 50 \\ 5 & 2 & 4 & 8 & 70 \\ 20 & & & & 20 \end{array} \right|$$

$$b_i \quad 50 \quad 60 \quad 20 \quad 30$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го предприятия.

№25

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} 4 & 5 & 5 & 7 & a_j \\ 8 & 7 & 5 & 4 & 80 \\ 3 & 2 & 9 & 3 & 20 \\ 40 & 20 & 70 & 20 & 30 \end{array} \right|$$

$$b_i \quad 40 \quad 20 \quad 70 \quad 20$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го предприятия.

№26

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 6 & a_j \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 30 \\ 5 & 7 & 6 & 2 & 70 \\ 15 & 40 & 30 & 60 & 50 \end{array} \right|$$

$$b_i \quad 15 \quad 40 \quad 30 \quad 60$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го предприятия.

№27

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 8 & a_j \\ 7 & 7 & 3 & 8 & 20 \\ 5 & 2 & 4 & 5 & 40 \\ 25 & 30 & 40 & 20 & 50 \end{array} \right|$$

$$b_i \quad 25 \quad 30 \quad 40 \quad 20$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го предприятия.

№28

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & 2 & a_j \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 30 \\ 7 & 5 & 3 & 1 & 40 \\ 35 & 30 & 20 & 70 & 70 \end{array} \right|$$

$$b_i \quad 35 \quad 30 \quad 20 \quad 70$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го предприятия.

№29

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 7 & 5 & a_j \\ 7 & 3 & 5 & 6 & 30 \\ 6 & 6 & 4 & 3 & 70 \\ 40 & 35 & 15 & 60 & 40 \end{array} \right|$$

$$b_i \quad 40 \quad 35 \quad 15 \quad 60$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го предприятия.

№30

$$C = \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & a_j \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 50 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 30 \\ 30 & 40 & 10 & 20 & 10 \end{array} \right|$$

$$b_i \quad 30 \quad 40 \quad 10 \quad 20$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го предприятия.

№31

$$C = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline & 3 & 5 & 6 \\ & 4 & 4 & 2 \\ & 7 & 6 & 9 \\ & 12 & 10 & 4 \end{array} \begin{array}{l} 30 \\ 80 \\ 20 \\ 20 \end{array}$$

$$b_i \quad 50 \quad 40 \quad 60$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№34

$$C = \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline & 1 & 4 & 2 \\ & 6 & 2 & 7 \\ & 5 & 4 & 7 \\ & 5 & 4 & 8 \end{array} \begin{array}{l} 10 \\ 15 \\ 20 \\ 25 \end{array}$$

$$b_i \quad 25 \quad 15 \quad 20$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,4)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№32

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 4 & 5 & 6 & 8 \\ & 10 & 3 & 2 & 3 \\ & 4 & 10 & 5 & 1 \end{array} \begin{array}{l} 30 \\ 50 \\ 40 \end{array}$$

$$b_i \quad 10 \quad 30 \quad 50 \quad 40$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,5)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,3)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№35

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 1 \\ & 2 & 3 & 1 & 5 \\ & 3 & 2 & 4 & 4 \end{array} \begin{array}{l} 50 \\ 30 \\ 10 \end{array}$$

$$b_i \quad 30 \quad 30 \quad 10 \quad 20$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№33

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 2 & 3 & 4 & 3 \\ & 5 & 3 & 1 & 2 \\ & 2 & 1 & 4 & 2 \end{array} \begin{array}{l} 80 \\ 60 \\ 70 \end{array}$$

$$b_i \quad 20 \quad 40 \quad 60 \quad 80$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

№36

$$C = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline & 1 & 4 & 7 & 3 \\ & 5 & 6 & 8 & 9 \\ & 7 & 2 & 4 & 8 \end{array} \begin{array}{l} 50 \\ 60 \\ 20 \end{array}$$

$$b_i \quad 70 \quad 50 \quad 20 \quad 10$$

где C -матрица тарифов
 $a_j(j=1,3)$ -объем производства j -
 предприятия,
 $b_j(j=1,4)$ -объем потребления i -го
 предприятия.

Лабораторная работа № 6

Тема: Целочисленное программирование.

Цель работы:

- нахождение целочисленного оптимального плана задачи линейного программирования.

Дискретное программирование

Общая постановка задачи:

Найти

$$W=f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max \quad (1)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \end{cases}$$

и $X=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$

Если D - конечное множество, то (3)-условие дискретности, и данная задача является задачей дискретного программирования. Если вводятся ограничения x_j -целые числа, $j=1, n$, то приходят к задаче целочисленного программирования, которая является частным случаем дискретного программирования.

В общем случае разработаны специальные методы, которые по принципу подхода к проблеме делятся на три группы.

1. Метод отсекающих плоскостей.
2. Метод ветвей и границ (один из наиболее эффективных методов решения задач комбинаторного типа).
3. Метод случайного поиска и приближенные эвристические методы.

Метод отсекающих плоскостей (метод Гомори)

Пусть надо решить задачу линейного целочисленного программирования.

Найти

$$W = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \max$$

при

$$W = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i = b_j \quad j = \overline{1, m}$$

$$x_i \geq 0, x_i - \text{целые числа.}$$

Суть: временно отбросив условие целочисленности, находим оптимальный опорный план. Если он удовлетворяет тем же условиям целочисленности, то данный план искомым. В противном случае надо сформировать дополнительные ограничения, которые заведомо удовлетворят любой целочисленный план, но не удовлетворят найденный оптимальный целочисленный план. Такое ограничение называется правильным отсечением.

Алгоритм метода

Назовем большой итерацией метода отсечений несколько итераций алгоритма двойственного симплекс-метода, приводящего от псевдоплана с дробными компонентами в столбце В к последующей оптимальной таблице. При выполнении большой итерации возможны следующие случаи:

- 1) получен новый план. В столбце В все $b_j \geq 0$, причем все b_j -целые числа.

Данный план является искомым (получено оптимальное целочисленное решение);

- 2) получен новый план. В столбце В все $b_j \geq 0$, но не все b_j -целые числа.

Признаком отсутствия целочисленного решения служит появление в таблице хотя бы одной строки с дробными коэффициентами b_j и целыми остальными коэффициентами α_{ji} .

Но если в данной строке j есть дробные числа α_{ji} , то надо сформировать новое правильное отсечение и перейти к очередной итерации.

- 3) получен некоторый промежуточный псевдоплан. В столбце В имеется элемент $b_j < 0$ такой, что $\alpha_{ji} > 0$ для всех i . Это признак неразрешимости задачи.

Контрольные вопросы

1. Какие экономические задачи относятся к задачам целочисленного программирования?
2. Сформулируйте задачу целочисленного программирования.
3. В чем состоит метод Гомори?
4. Как составить дополнительное ограничение, если компоненты оптимального плана задачи являются дробными?
5. В каком случае поставленная задача не имеет целочисленного решения?
6. Какой геометрический смысл имеет введение дополнительного ограничения?

Задание к лабораторной работе

Смотри лабораторную работу №2.

Литература

1. Зайченко Ю.Н. Исследование операций. Учебное пособие для студентов ВУЗов. - Киев: Вища школа, 1979 (1975), 4(14) экз.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Советское радио, 1972, 8 экз.
3. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.Н., Волощенко А.Б. Математическое программирование. - М.: Высшая школа, 1980, 34 экз.
4. Костевич Л.С., Лапко А.А. Теория игр. Исследование операций. - Минск: Высшая школа, 1982, 66 экз.
5. Голубков Е.П. Математические методы системного анализа. Учебное пособие. - М.: МИНХ, 1977. - 75 с.
6. Гурвич Т.Ф., Луцук В.О. Сборник задач по математическому программированию. - М.: Колос, 1977, 25 экз.
7. Капустин В.Ф. Практические занятия по курсу математического программирования. -Л., 1976, 5 экз.
8. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. - М.: МЦНМО, 2001.-960 с., 2 экз.