ЛЕКЦИЯ №1

Тема: Цель и задачи курса ИСО. Основные понятия ИСО. Основные принципы построения моделей в ИСО. Классификация задач математического программирования.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование операций (ИСО) — это наука, занимающаяся разработкой и практическим применением методов эффективного (оптимального) управления организационными системами.

ИСО – комплексная математическая дисциплина, занимающаяся построением, анализом и применением математических моделей принятия оптимальных решений при проведении операции.

Целью исследования операций является количественное обоснование применяемых решений в самых различных областях человеческой деятельности.

Предмет и задачи курса «Исследование операций»

Научно-техническая революция в XX веке вызвала к жизни такое усложнение хозяйственного организма многих стран, что управленческая деятельность человека на уровне интуитивного принятия решения стала невозможной.

В связи с этим начали бурно развиваться исследования, связанные с новыми объектами в области управления, получившими название больших, или сложных систем.

К таким системам относятся промышленные предприятия, отрасли, банки, транспортная сеть, военные соединения и т.п.

Каждая система состоит из многочисленных подразделений, которые взаимодействуют между собой, причем цели их не всегда согласуются или даже противоположны.

Управленческий аппарат, принимая то или иное решение, может влиять на процессы, протекающие в системе. От науки требуются рекомендации, позволяющие администрации оценить последствия возможных решений, отбросить недопустимые варианты, выделить те, при которых деятельность системы будет наиболее выгодной (наименее убыточной).

Область науки, занимающаяся созданием и практическим применением методов по наиболее эффективному управлению большими системами (организациями), называется «Исследованием операций». Как самостоятельное научное направление исследование операций оформилось в начале 40-х годов. Первые публикации относятся к 1939-10 г.. в которых специальные математические методы применены для анализа и исследования боевых операций, что и послужило основанием для названия дисциплины. Позже эти методы стали применяться в сфере промышленно-финансового управления.

Большой вклад в формирование и развитие новой науки внесли такие ученые, как Акоф, Беллман, Данциг, Кун. Саати (США), Кофман, Фор (Франция). Канторович. Гнеденко, Бусленко. Юдин (СССР) и другие.

Морз Ф. и Кимбелл дали определение: ИСО – научный метод, дающий в распоряжение исполнительного органа количественные обоснования для принятия решений.

Томас Саати: ИСО – это искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые другие способы дают ещё худшие результаты.

Целью курса ИСО является изучение математических методов, применяемых при обосновании решений в различных областях целенаправленной человеческой деятельности.

Задача изучения курса ИСО состоит в получении студентами знаний по применению математических методов обоснования управленческих решений в системах организационного типа.

Курс лекций создает математическую основу для успешного усвоения специальных дисциплин и дает первоначальные сведения, необходимые при решении реальных задач, так как совершенствование организации перевозок пассажиров и грузов по железной дороге может быть достигнуто только при использовании современных экономико-математических методов.

Основные особенности ИСО

а) Количественное обоснование вариантов решений по управлению целенаправленной деятельности. При оценивании количественно также учитываются:

1) Степень достижения цели (эффект стратегии);
2) Затраты на ресурсы, связанные с достижением цели;
3) Степень риска.

b) Системный подход. Он требует комплексного учёта всех существенных факторов, относящихся к данной системе, всех взаимосвязей. Определяющих достижение поставленных целей.

   Системный подход реализуется посредством математического моделирования.

c) Моделирование (математическое) как аппарат получения количественных оценок.

   Это связано с тем, что в силу сложности и высокой стоимости рассматриваемых систем нет возможности осуществить натурные эксперименты с системой.

d) Использование ЭВМ в качестве инструмента для вычислений.

e) ИСО сочетает формальные и неформальные методы в практике подготовки управленческих решений.

   Формальные (математические) методы: теория вероятности, математическое программирование, теория массового обслуживания и т.д.

   Неформальные методы: метод экспертных оценок.

f) Рекомендательный характер ИСО.

   Принятие решений выходит за рамки ИСО.

Типичные классы задач ИСО

Круг приложений этой науки весьма широк. Исследование операций используется для решения технических, технико-экономических, социально-экономических задач, а также задач управления в различных сферах и на различных уровнях, постепенно вытесняя традиционные «интуитивные» методы принятия решений.

Современный уровень развития науки позволяет решать следующие классы задач управления.

1. **Распределительные задачи** возникают, когда имеющихся в наличии ресурсов не хватает для выполнения всех работ наиболее эффективным образом. Их цель - распределить все ресурсы так, чтобы минимизировать общие затраты, связанные с выполнением работ, или максимизировать получаемый в результате доход.
2. **Управление запасами.** Цель - определить оптимальные размеры запасов, чтобы общие затраты на их хранение были м минимальными.
3. **Замена оборудования.** В ряде случаев выгоднее не ремонтировать оборудование, а заменить его новым. Требуется выбрать такие сроки замены оборудования, чтобы суммарные затраты на производство продукции в заданном объеме были минимальными.
4. **Задачи массового обслуживания.** Требуется так организовать работу станций обслуживания (АТС. справочных бюро, портов, сортировочных станций и т.п.). чтобы суммарные затраты от простоя клиентов и оборудования свести к минимуму.
5. **Задачи упорядочения, сетевое планирование.** Цель - выбор оптимальной последовательности обработки деталей на нескольких станках, чтобы общее время простоя было минимальным, если известно, что все детали требуют разного времени на обработку на каждом станке.
6. **Состязательные ситуации.** Два лица (или более) стремятся к достижению некоторой цели. Каждый из участников строит обоснованные прогнозы поведения своих соперников и, таким образом, оптимизирует в определенном смысле свое собственное поведение.
7. **Выбор маршрута. или сетевые задачи** чаще всего встречаются при исследовании разнообразных процессов на транспорте и в системах связи. Типичной задачей является задача нахождения некоторого маршрута проезда из города А в город В при наличии нескольких маршрутов для разных промежуточных пунктов. Стоимость проезда и затрачиваемое на

проезд время зависят от выбранного маршрута. Определить наиболее экономичный маршрут по выбранному критерию оптимальности.

8. Конфликтные ситуации.

9. Комбинированные задачи. включают в себя несколько типовых моделей задач одновременно. Например, при планировании и управлении производством приходится решать следующий комплекс задач:

1) сколько изделий каждого типа необходимо выпустить и каковы оптимальные размеры партий изделий? (Типичная задача планирования производства);

2) распределить производственные заказы по видам оборудования после того, как определен оптимальный план производства. (Типичная задача распределения);

3) в какой последовательности и когда следует выполнять производственные заказы? (Типичная задача календарного планирования).

К одному из указанных классов могут быть отнесены следующие задачи управления на железнодорожном транспорте:

– анализ объемов перевозки грузов и пассажиров;
– определение очередности капитальных вложений;
– выявление соотношений между размерами перевозок, доходами и издержкам и; между объемом работы и численностью работников;
– расчет пропускной способности участков;
– выбор этапности сооружения вторых путей на однопутных участках;
– изучение и анализ пригородных пассажиропотоков;
– выбор места строительства объединенных депо и мастерских с учетом минимального пробега подвижного состава;
– расчет пропускной способности автоматизированной сортировочной станции;
– построение модели оптимального использования вагонов под погрузку;
– анализ распределения пассажиров между различным и видам и транспорта.

Основные этапы операционною исследования

В указанных классах задач просматриваются сходные черты. Речь идёт о некотором мероприятии, преследующем определённую цель. Заданы условия (например, отпущенные средства), изменять которые нельзя. Требуется принять такое решение из множества возможных, чтобы мероприятие было наиболее выгодным.

При всем многообразии реальных систем каждое операционное исследование системы является процессом, в котором можно выделить основные этапы.

Первый этап. Постановка задачи - построение качественной модели рассматриваемой задачи управления.

Второй этап. Построение математической модели задачи, т.е. формализация задачи. Этот этап включает в себя описание множества допустимых решений и критериев оптимальности выбора.

Третий этап. Выбор метода решения и нахождение оптимального управляющего решения.

Четвертый этап. Экспертная проверка результатов вычислений, полученных на третьем этапе. На четвертом этапе выясняется адекватность математической модели и моделируемой системы в пределах точности исходной информации. Если результаты сопоставления удовлетворительны, то математическая модель принимается, если нет - математическая модель уточняется или строится заново.

Полученное математическое решение облекают в соответствующую содержательную форму и представляют заказчику в виде инструкций и рекомендаций. Реализация найденного решения на практике завершает исследование системы.

Математическое содержание дисциплины «Исследование операций» включает в себя указанные выше второй и третий этапы операционного исследования системы.

Таким образом, данную дисциплину можно рассматривать как раздел математики, в котором изучаются способы разработки и применения математических моделей принятия оптимальных (т.е. наилучших в заранее предписанном смысле) решений. Ее содержанием является анализ и решение математических задач о выборе такого элемента в заданном множестве допустимых решений, который удовлетворяет тем или иным критериям оптимальности и который называется оптимальным решением задачи.

Методология построения математических моделей

Задачи управления обладают специфическими чертами, которые определяют методику их формализации и решения. В основе всех математических моделей лежит так называемый системный подход к анализу поставленной проблемы. Это основной методологический принцип. Он состоит в следующем: принятое решение считается оптимальным (наилучшим), если критерий функционирования всей системы в целом достигает своих наивысших показателей, хотя некоторые подразделения вынуждены при этом поступиться своими интересами.

Поясним сказанное на примере. Рассмотрим типичную задачу организационного управления - управление запасам и предприятия.

Производственный отдел стремится выпускать как можно больше продукции при наименьших затратах, т.е. большими партиями. При этом снижаются затраты на переналадку оборудования, однако нужны значительные запасы материалов и дополнительные складские помещения, и персонал.

Отдел сбыта также заинтересован в больших запасах, но сырья и готовой продукции, чтобы удовлетворять спрос в любой момент. Кроме того. ему нужна широкая номенклатура, в том числе изделия, изготовленные малыми партиями, что не выгодно производственному отделу.

В свою очередь, финансовый отдел стремится все средства пустить в оборот и свести до минимума «связанные» средства, затраченные на хранение, поэтому он заинтересован в уменьшении запасов.

Возникает вопрос: чего и сколько хранить, чтобы стратегия запасов была наиболее благоприятной для всей организации?

Математические расчеты, проведенные методами исследование операции, облегчают принятие правильных
решений.

Основные понятия ИСО

Цель – это желаемое состояние системы или желаемый результат её поведения.

Цель становится **задачей**, если указан срок её достижения, а также количественные характеристики желаемого результата.

Любая деятельность людей, преследующая определенную цель, называется **операцией**.

Под операцией в ИСО понимается упорядоченная совокупность взаимосогласованных действий, объединенных единым замыслом и направленных на достижение вполне определенной цели.

Примеры операций.

1. Организация системы перевозок, обеспечивающей снабжение ряда пунктов товарами определенного вида.
2. Размещение заказов на производство оборудования.
3. Отражение воздушного налета средствам и ПВО.

Операция есть всегда управляемое мероприятие и зависит от человека (выполнение расчетов на ЭВМ с целью получения каких-либо данных).

Набор управляемых параметров (переменных) при проведении операции называется **решением**.

Решение называется **допустимым,** если оно удовлетворяет набору определённых условий.

Решение называется **оптимальным**, если оно допустимо и по определенным признакам, предпочтительнее других, или по крайней мере, не хуже.

Признак предпочтения называется **критерием оптимальности.** Критерий оптимальности включает в себя целевую функцию и направление оптимизации или набор целевых функций и соответствующих направлений оптимизации.

Примеры критериев эффективности:

a) Проводится ряд мер для повышения рентабельности завода. Показатель эффективности - прибыль завода за год.

b) Предпринимается ряд мер по повышению надежности ЭВМ. Показатель эффективности - среднее время безотказной работы.

c) При организации перевозок известны запасы грузов в пунктах отправления, потребности грузов в пунктах назначения, себестоимость перевозок. Перераспределяя объемы перевозок, можно удовлетворять заявки на поставку грузов при различных транспортных расходах. Показатель эффективности - суммарные транспортные расходы.

Целевая функция – это количественный показатель предпочтительности или эффективности решения.

Направление оптимизации – это max (min), если наиболее предпочтительным является наибольшее (наименьшее) значение целевой функции.

Цель ИСО – трансформировать операцию в критерий эффективности. Незнание критерия эффективности лишает смысла проведения ИСО.

Математическая модель задачи ИСО включает в себя:

a) описание управляемых переменных, которые необходимо найти;
b) описание критериев оптимальности (эффективности);
c) описание множества допустимых решений (ограничений, накладываемых на переменные).

Виды математических моделей операций

Математические модели подразделяются на два основных вида:

– аналитические;
– статистические.

Первый вид моделей составляется в условиях определенности исходных данных. Здесь устанавливаются формульные (аналитические) зависимости между заданными условиями операции ξ, элементами решения *x,* и показателем эффективности W:

В самом общем случае математическая модель задачи имеет вид:

Найти max (min) $W = f(X, \xi)$, (1.1)

при ограничениях

$$g_j(X, \xi) \begin{smallmatrix}\geq\\ \leq\\ =\end{smallmatrix} bj, \quad j = \overline{1,m}, \qquad (1.2)$$

где *W*— целевая функция (показатель качества или эффективность) системы;

x — вектор управляемых переменных;

ξ — вектор неуправляемых переменных;

g_j — функция потребления j-го ресурса;

b_j — величина j~го ресурса (например, плановый фонд машинного времени группы токарных автоматов в станко-часах).

Нахождение решения. Для нахождения оптимального решения задачи (1.1) ÷ (1.2) в зависимости от вида и структуры целевой функции и ограничений используют те или иные методы теории оптимальных решений (методы математического программирования).

Классификация задач математического программирования

1. Линейное программирование, если f (X, ξ), $g_j(X, \xi) \le b_j$, $j = \overline{1,m}$, — линейны относительно переменных x.
2. **Нелинейное программирование**, если f (X, ξ), $g_j(X, \xi) \le b_j$, $j = \overline{1,m}$, нелинейные относительно переменных x.
3. **Динамическое программирование**, если f (X, ξ), имеет специальную структуру, являясь аддитивной или мультипликативной функцией от переменных x.

Укажем, что $f(x) = f(x_1, x_2..., x_n)$ — аддитивная функция, если

$f(x_1, x_2..., x_n) = \sum_i f_i(x_i)$, и функция $f(x_1, x_2..., x_n)$ — мультипликативная функция,

если

$$f(x_1, x_2..., x_n) = \prod_i f_i(x_i).$$

4. **Геометрическое программирование**, если целевая функция f (x) и ограничения $g_k(x)$ представляют собой так называемые функции-позиномы

$$g_k(x) = \sum_i c_i x_1^{\alpha_{i1}} c_i x_2^{\alpha_{i2}} \dots c_i x_m^{\alpha_{im}}.$$

Математическая модель задачи в этом случае записывается в виде

$$\min \sum_{i \in I[0]} c_i x_1^{\alpha_{i1}} c_i x_2^{\alpha_{i2}} \dots c_i x_m^{\alpha_{im}}.$$

$$g_k(x) = \sum_{i \in I[k]} c_i x_1^{\alpha_{i1}} c_i x_2^{\alpha_{i2}} \dots c_i x_m^{\alpha_{im}} \quad k = \overline{1, p}, \quad \le 1,\ x > 0,\ c_i > 0,$$

$I[0] = (m_0, m_0 + 1, \dots, n_0)$; $I[k] = (m_k, m_k + 1, \quad, n_k)$;

$m_{k+1} = n_k + 1$; $m_0 = 1$; $n_p = n$.

5. **Стохастическое программирование**, когда вектор неуправляемых переменных ξ случаен.

В этом случае математическая модель задачи будет иметь вид:

$$\max M_\xi W = M_\xi (f(X, \xi)),$$

при ограничениях

$M_\xi\{g_i(x,\xi)\} \le b_i, \qquad i = \overline{1,m},$

или вероятностных ограничениях

$P\{g_i(x,\xi) \le b_i\} \ge 1 - \varepsilon_i; \qquad i = \overline{1,m},$

где M_ξ — математическое ожидание по ξ; $P\{g_i(x) \le b\}$ — вероятность того, что выполняется условие $g_i(x) \le b$.

6. **Дискретное программирование**, если на переменные x_j- наложено условие дискретности (например, целочисленности): x_j — целое. $j = \overline{1,n_1} \le n$

7. **Эвристическое программирование** применяют для решения технических задач, в которых точный оптимум найти алгоритмическим путем невозможно из-за огромного числа вариантов. В таком случае отказываются от поиска оптимального решения и отыскивают достаточно хорошее (или удовлетворительное с точки зрения практики) решение. При этом пользуются специальными приемами — эвристиками, позволяющими существенно сократить число просматриваемых вариантов. Эвристические методы также применяют, когда оптимальное решение в принципе может быть найдено (т. е. задача алгоритмически разрешима), однако для этого требуются объемы ресурсов, значительно превышающие наличные.

Из перечисленных выше методов математического программирования наиболее развитым и законченным является линейное программирование. В его рамки укладывается широкий круг задач исследования операций.

Второй вид математических моделей составляется в условиях неопределенности исходных данных. При этом показатель эффективности зависит от всех трех групп факторов:

$$W=W(\alpha_1, \alpha_2,..., \beta_1, \beta_2,..., x_1, x_2, ,...). \qquad (1.3)$$

Задача формулируется следующим образом.

При заданных условиях α_i, с учетом неизвестных факторов β_i найти такие элементы решения x_i, которые по возможности обращали бы показатель эффективности W в максимум (или минимум).

Конечно, любое решение, принятое в условиях неопределенности, хуже, чем решение, принятое во вполне определенной ситуации. Однако решение на основе математических расчетов, будет все же лучше решения, принятого наугад.

В условиях неопределенности нельзя указать единственное, в точности оптимальное решение. Получают набор локально-оптимальных решений, на основании их принимают компромиссное решение, которое оказывается приемлемым в целом диапазоне условий. Обычно окончательный выбор компромиссного решения осуществляется человеком.

Основные принципы построения моделей в ИСО:

a) **Изучение и анализ причинно-следственных связей.** Используется всегда, когда структура этой системы достаточно проста и может быть определена путём обследования системы или путём опроса соответствующих лиц.
b) **Использование аналогии.** Если структура системы достаточно очевидна, но метод её математического описания неясен, можно воспользоваться её сходством с аналогичной системой, имеющей более простую или более изученную структуру.
c) **Проведение экспериментов** для выявления существенных переменных. Используется, когда анализ данных не позволяет определить влияние отдельных переменных на показатели работы системы.

О методах решения задач исследования операций

Математический аппарат, предназначенный для решения задач исследования операций, принято называть математическим и методам и исследования операций.

Следует отметить, что общих приемов здесь нет: отдельные классы задач решаются соответствующими методами. Однако разработанность математических методов для разных задач исследования операций неодинакова. Наиболее изученными являются методы решения экстремальных задач в детерминированной постановке (1.1), (1.2).

В простейших случаях, если функция зависит от одной или нескольких переменных, нужно применить известные методы математического анализа: продифференцировать функцию W, приравнять производные к нулю и решить полученную систему уравнений.

Однако, этот прием не всегда эффективен по ряду причин: очень сложно совместное решение системы уравнений; экстремум наблюдается на границе области; производные вообще не существуют, если аргументы x, изменяются дискретно или же сама функция W имеет особенности.

Если функция W и ограничения g, обладают определенными свойствами, то современная математика предлагает ряд специальных методов, объединенных в сравнительно самостоятельные разделы в рамках математического программирования.

Если функция g_i и W являются линейными, то общая задача математического программирования относится к разделу линейного программирования; если хотя бы одна его функций g_i - нелинейная - задача относится к нелинейному программированию.

В ряде случаев в формулировку общей задачи математического программирования включают некоторые дополнительные требования. Например, требование целочисленности значений переменных приводит к целочисленному программированию.

Если задача математического программирования допускает разбиение процесса ее решения на отдельные этапы (шаги), то задача относится к динамическому программированию.

Классификация задач математического программирования

1. Линейное программирование, если f (X, ξ), $g_j(X, \xi) \le bj,\quad j = \overline{1,m},$ — линейны относительно переменных x.
2. **Нелинейное программирование**, если f (X, ξ), $g_j(X, \xi) \le bj,\quad j = \overline{1,m},$ нелинейные относительно переменных x.
3. **Динамическое программирование**, если f (X, ξ), имеет специальную структуру, являясь аддитивной или мультипликативной функцией от переменных x.

Укажем, что $f(x) = f(x_1, x_2..., x_n)$ — аддитивная функция, если

$f(x_1, x_2..., x_n) = \sum_i f_i(x_i)$, и функция $f(x_1, x_2..., x_n)$ — мультипликативная функция,

если

$$f(x_1, x_2..., x_n) = \prod_i f_i(x_i).$$

4. **Геометрическое программирование**, если целевая функция f (x) и ограничения $g_k(x)$ представляют собой так называемые функции-позиномы

$$g_k(x) = \sum_i c_i x_1^{\alpha_{i1}} c_i x_2^{\alpha_{i2}} \ldots c_i x_m^{\alpha_{im}}.$$

Математическая модель задачи в этом случае записывается в виде

$$\min \sum_{i \in I[0]} c_i x_1^{\alpha_{i1}} c_i x_2^{\alpha_{i2}} \ldots c_i x_m^{\alpha_{im}}.$$

$$g_k(x) = \sum_{i \in I[k]} c_i x_1^{\alpha_{i1}} c_i x_2^{\alpha_{i2}} \ldots c_i x_m^{\alpha_{im}} \le 1,\ x > 0,\ c_i > 0,\qquad k = \overline{1,p},$$

$I[0] = (m_0, m_0 + 1, \ldots, n_0)$; $I[k] = (m_k, m_k + 1, \ \ , n_k)$;

$m_{k+1} = n_k + 1$; $m_0 = 1$; $n_p = n$.

5. **Стохастическое программирование**, когда вектор неуправляемых переменных ξ случаен.

В этом случае математическая модель задачи будет иметь вид:

$$\max M_\xi W = M_\xi (f(X, \xi)),$$

при ограничениях

$M_\xi \{g_i (x, \xi)\} \leq b_i, \qquad i = \overline{1,m},$

или вероятностных ограничениях

$P \{g_i (x, \xi) \leq b_i\} \geq 1 - \varepsilon_i; \qquad i = \overline{1,m},$

где M_ξ — математическое ожидание по ξ; $P\{g_i(x) \leq b\}$ — вероятность того, что выполняется условие $g_i(x) \leq b$.

6. **Дискретное программирование**, если на переменные x_j- наложено условие дискретности (например, целочисленности): x_j — целое. $j = \overline{1,n_1} \leq n$

7. **Эвристическое программирование** применяют для решения технических задач, в которых точный оптимум найти алгоритмическим путем невозможно из-за огромного числа вариантов. В таком случае отказываются от поиска оптимального решения и отыскивают достаточно хорошее (или удовлетворительное с точки зрения практики) решение. При этом пользуются специальными приемами — эвристиками, позволяющими существенно сократить число просматриваемых вариантов. Эвристические методы также применяют, когда оптимальное решение в принципе может быть найдено (т. е. задача алгоритмически разрешима), однако для этого требуются объемы ресурсов, значительно превышающие наличные.

Из перечисленных выше методов математического программирования наиболее развитым и законченным является линейное программирование. В его рамки укладывается широкий круг задач исследования операций.

ЛЕКЦИЯ № 2

Тема: Линейное программирование. Постановка задачи линейного программирования (ЛП). Базисное решение. Геометрическая интерпретация задачи ЛП. Графический метод решения задачи ЛП.

Линейное программирование

Слово "программирование" взято из зарубежной литературы и в данном случае означает "планирование".

Общая постановка задачи линейного программирования

В общем виде задача ЛП формируется следующим образом:

Найти решение $X = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$, которое доставляет линейной функции цели экстремальное значение:

$$W=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max\ (\min) \tag{2.1}$$

при системе ограничений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i} a_{ji}x_i=b_j, \text{ где } i=\overline{1,\ n},\ j=\overline{1,\ m_1}, & (2.2)\\ \sum\limits_{i} a_{ji}x_i\le b_j, \text{ где } i=\overline{1,\ n},\ j=\overline{m_1+1,\ m_2}, & (2.3)\\ \sum\limits_{i} a_{ji}x_i\ge b_j, \text{ где } i=\overline{1,\ n},\ j=\overline{m_2+1,\ m}, & (2.4)\end{cases}$$

и условиях:

$$x_i \ge 0,\ i=\overline{1,\ r},\ r \le n \tag{2.5}$$

Опр. Если все ограничения задачи ЛП заданы в виде строгих равенств и на все переменные наложены условия не отрицательности, то данная форма называется **канонической**.

Опр. Вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий ограничениям (2.2)÷(2.4) задачи ЛП, называется ее **решением** или планом.

Опр. Множество R(X) всех векторов X, для которых выполняются условия (2.2)÷(2.4), (2.5), называется допустимым множеством решений (в этом случае X называется **допустимым решением** или допустимым планом).

Опр. Решение X_0 называется **оптимальным**, если для него выполняется условие

$W(X_0) \ge W(X)$,

то есть для всех $X \in R(X)$; или иначе: оптимальным называется то из допустимых решений, которое обращает в максимум целевую функцию W (в этом случае X_0 называется **оптимальным решением** или оптимальным планом).

Задача ЛП может быть записана в матричной или векторной форме. Пусть задача ЛП задана в виде:

$$W=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max (\min) \tag{2.6}$$

ограничения имеют вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+ a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+ a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+ a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$x_i \ge 0, \qquad i=\overline{1,n}$$

В матричной форме задача (6)÷(8) запишется в следующей форме:

$$W = C^T X \to \max (\min);$$

$$AX \le B;$$

$$X \ge 0,$$

$$C^T = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

где C^T-вектор строка; $\{c_1, \ldots, c_n\}$-коэффициенты целевой функции W,

$$X=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{Bmatrix}$$ - вектор столбец переменных,

$$A=\begin{vmatrix} a_{11}\ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ldots\ldots a_{mn} \end{vmatrix},$$

$$b=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_m \end{Bmatrix}$$ - вектор столбец свободных членов размерности m.

$$W=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max (\min)$$

$$W = C^T X = |c_1, \ldots, c_n| * \begin{vmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$AX \le B \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}, a_{m2}, \ldots\ldots a_{mn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots + a_{1n} x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots\ldots + a_{mn} x_n \end{vmatrix} \le \begin{vmatrix} b_1 \\ \cdot \\ b_m \end{vmatrix}$$

При векторной форме записи ограничение (2.7) запишется следующим образом:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots\ldots + A_n x_n \le B,$$

где

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{vmatrix}, \quad . \; . \; . \; . \; ., \quad A_n = \begin{vmatrix} a_{1n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Примеры задач линейного программирования

1. Составление пищевого рациона

Имеется 4-е вида продукта: $П_1$; $П_2$; $П_3$; $П_4$.

Стоимость единицы каждого продукта: C_1; C_2; C_3; C_4.

Для продуктов $П_1$; $П_2$; $П_3$; $П_4$ известно содержание белков. Жиров и углеводов (к единиц на единицу продукта) и задано следующей таблицей:

Продукты $П_i$	Элементы, j			Стоимость ед. $П_i$, C_i
	Белки $Э_1$	Углеводы $Э_2$	Жиры $Э_3$	
$П_1$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	C_1
$П_2$	a_{21}	a_{22}	a_{23}	C_2
$П_3$	a_{31}	a_{32}	a_{33}	C_3
$П_4$	a_{41}	a_{42}	a_{43}	C_4

где a_{ij} – содержание элемента $Э_j$ в единице продукта $П_i$ (i - номер продукта, j - номер элемента).

Требуется составить такой пищевой рацион (то есть определить количество продуктов, входящих в пищевой рацион), чтобы выполнялись условия по элементам:

– содержание белков не менее b_1;

– содержание углеводов не менее b_2;

– содержание жиров не менее b_3;

и при этом стоимость рациона была минимальна.

Решение:

Составим математическую модель.

Обозначим:

x_i – содержание продукта $П_i$ в пищевом рационе.

W – показатель эффективности, который необходимо минимизировать.

Тогда

$$W=\sum_{i=1}^{4} C_i x_i \to \min \qquad (*)$$

Отсюда видно, W – линейна относительно переменной x_i.

Запишем ограничительные условия по элементам:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4 \ge b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 \ge b_2 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4 \ge b_3 \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Линейные уравнения (**) – ограничения. Накладываемые на элементы решения: x_1, x_2, x_3, x_4.

Поставленная задача формулируется следующим образом: найти такие неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4, чтобы они удовлетворяли ограничениям неравенства (**) и одновременно обращали в min линейную функцию (*).

2. Задача о загрузке вычислительного центра

ВЦ располагает N_1 ЭВМ типа I и N_2 ЭВМ типа II.

Машины могут обрабатывать 4 типа информации I_1, I_2, I_3, I_4, причем каждый тип информации в определенном количестве.

Тип ЭВМ	**Тип информации**			
	I_1	**I_2**	**I_3**	**I_4**
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
II	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}

где a_{ij} – количество часов машинного времени, потраченного на обработку информации типа I_j одной ЭВМ типа i.

Каждый машинный час обработки информации типа I_1 приносит ВЦ доход в размере C_1 условных единиц. А час обработки информации типа I_2 приносит ВЦ доход в размере C_2 условных единиц; I_3 - C_3; I_4 - C_4. ВЦ предписан план, по которому он должен потратить не менее b_1 часов для обработки информации типа I_1 и т.д.

Требуется так распределить загрузку ЭВМ, чтобы план был выполнен и прибыль была максимальной.

Решение

Обозначим x_{ij} число ЭВМ типа i, занятых обработкой информации типа I_j.

Функция прибыли:

$$W = C_1(a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21}) + C_2(a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22}) + C_3(a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23}) +$$

$$+ C_4(a_{12}x_{14} + a_{24}x_{24}) \to max$$

$(a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21})$ – количество часов машинного времени на обработку информации типа I_1 всеми ЭВМ.

Запишем уравнения ограничения:

1) Ресурсы ЭВМ не должны быть превышены, то есть сумма числа ЭВМ одного типа, занятых обработкой информации всех типов, не должна превышать количество ЭВМ, имеющихся в наличии:

   $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le N_1$;

   $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le N_2$

2) План по ассортименту обрабатываемой информации должен быть выполнен:

   $I_1 : a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} \ge b_1$;

   $I_2 : a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} \ge b_2$;

   $I_3 : a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} \ge b_3$;

   $I_4 : a_{12}x_{14} + a_{24}x_{24} \ge b_4$.

   Задача формализована.

Общая постановка задачи ЛП

В общем виде задачу линейного программирования можно сформулировать так.

Найти решение $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$, которое доставляет линейной функции цели экстремальное значение:

$$W = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max (\min) \qquad (2.1)$$

при системе ограничений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i} a_{ji}x_i = b_j, \text{ где } i=\overline{1, n}, \ j=\overline{1, m_1}, & (2.2) \\ \sum\limits_{i} a_{ji}x_i \le b_j, \text{ где } i=\overline{1, n}, \ j=\overline{m_1+1, m_2}, & (2.3) \\ \sum\limits_{i} a_{ji}x_i \ge b_j, \text{ где } i=\overline{1, n}, \ j=\overline{m_2+1, m}, & (2.4) \end{cases}$$

и условиях:

$$X_k \ge 0, \ k = \overline{1, r}, \ r \le n. \qquad (2.5)$$

Опр. Если все ограничения задачи ЛП заданы в виде строгих равенств и на все переменные наложены условия неотрицательности, то данная форма называется **канонической.**

Опр. Вектор $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$, удовлетворяющий ограничениям (2.2) ÷ (2.4) задачи ЛП, называется её **решением**, или **планом.**

Опр. Множество R(X) всех векторов X, удовлетворяющих условиям (2.2) ÷ (2.4), (2.5), называется **допустимым множеством решений (**в этом случае X называется **допустимым решением** или **допустимым планом).**

Опр. Решение X_0 называется **оптимальным**, если выполняется условие: $W(X_0) \ge W(X)$, то есть для всех $X \in R(X)$; или иначе: **оптимальным** называется то из допустимых решений, которое обращает в максимум целевую функцию W (в этом случае X_0 называется **оптимальным решением** или **оптимальным планом**).

Задача ЛП может быть записана в матричной или векторной форме. Пусть задача ЛП задана в виде:

$$W = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max (\min) \qquad (2.6)$$

Ограничения имеют вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$x_i \ge 0, i = \overline{1, n} \tag{2.8}$$

В матричной форме задача (2.6) ÷ (2.8) запишется в следующем форме:

$W = C^T X \rightarrow \max (\min)$;

$AX \le B$;

$X \ge 0$,

где C^T – вектор строка = $|C_1, \dots, C_n|$,

$C_1, \dots, C_n$ – коэффициенты целевой функции W;

$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix}$ - вектор столбец переменных,

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{vmatrix}$ - вектор столбец свободных членов размерности m,

$$W = C^T X = |C_1, \dots, C_n| * \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{vmatrix} = W = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

$$AX \le B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n \end{vmatrix} \le \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{vmatrix}$$

При векторной форме записи система ограничений (2.7) запишется следующим образом:

$A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_n X_n \le B$,

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{vmatrix} \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{vmatrix} \quad A_n = \begin{vmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{vmatrix}$$

Допустимые базисные решения

Пусть ограничения задачи ЛП заданы в форме равенств:

$$A^{(m \times n)} X^{(n \times 1)} = B^{(m \times 1)} \qquad (2.9)$$

Предположим, что $m < n$ и ранг матрицы А равен m.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1m} & & a_{1m+1} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2m} & \dots & a_{2m+1} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mm} & & a_{mm+1} & & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Выберем из матрицы А = $[A_1\ A_2\ \dots\ An]$ m линейно-независимых столбцов, которые обозначим через $Q^{(m \times m)}$. Очевидно, матрица Q образует базис системы. Совокупность оставшихся столбцов матрицы А обозначим через D.

Тогда А = [Q, D**]**.

Совокупность переменных, связанных с матрицей В, обозначим через X_Q, а связанных с матрицей D — через X_D. Тогда

$$Q X_Q + DX_D = B \qquad (2.10)$$

Так как Q — невырожденная квадратная матрица, то существует обратная к ней Q^{-1}. Умножив обе части (2.10) на Q^{-1}, получим

$Q^{-1} Q X_Q + Q^{-1} DX_D = Q^{-1}B$.

Отсюда

$X_Q = Q^{-1}B - Q^{-1}DX_D$ (2.11)

X_Q — базисные переменные,

X_D — небазисные (свободны) переменные.

Соотношения (2.11) определяют полное множество решений системы линейных уравнений (2.9). В развернутом виде оно может быть записано так

$$x_j = \alpha_j - \sum_{i \in J_{неб}} a_{ij} x_i, \; j \in I_б, \qquad (2.12)$$

$$x_j = \alpha_j.$$

где $I_б$ — множество индексов базисных векторов; $J_{неб}$ — множество индексов небазисных векторов; α_j компонента вектора $Q^{-1}B$; a_{ij} $(j \in J_{неб})$ — i-я—строка матрицы $Q^{-1}D$. В (2.12) переменные x_j могут принимать произвольные значения α_j.

Если положить для всех небазисных переменных нулевые значения, то получим базисное решение системы (2.9). Очевидно, в этом случае $x_j = a_j$ $j \in I_б$. Если базисное решение удовлетворяет условию неотрицательности, то оно называется допустимым (или сокращенно д. б. р.).

Если среди компонент x_j $(j \in I_б)$ нет нулевых, то базисное решение называется невырожденным.

Геометрическая интерпретация задачи ЛП

Рассмотрим следующий пример.

Найти

$$\max W = (2x_1 + 5x_2)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 \le 400, \\ x_2 \le 300, \\ x_1 + x_2 \le 500, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Каждое из этих неравенств ограничений определяет полуплоскости, пересечение которых дает многоугольник, который заштрихован на рис. 2.1. Этот многоугольник (выпуклый многогранник) и представляет собой допустимое множество решений R задачи ЛП.

Теперь рассмотрим целевую функцию

$W = 2x_1 + 5x_2$.

Пусть $W = 1000 = z_1$.

График уравнения $2x_1 + 5x_2 = 1000$

представляет собой прямую с отрезками на осях $x_1 = 500$ единиц, а $x_2 = 200$ единиц.

При $W = 1500$ получим прямую z_2, имеющую уравнение

$$\frac{2x_1}{1500} + \frac{5x_2}{1500} = \frac{x_1}{750} + \frac{x_2}{300} = 1.$$

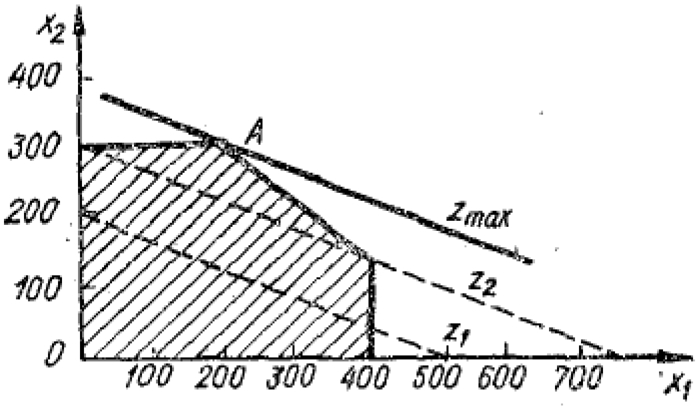


Рис. 2.1.

Прямая z2 параллельна прямой z1, но расположена **выше** ее. Двигая прямую вверх параллельно самой себе, приходим **к** такому положению z_{max}, когда прямая и множество *R* будут иметь только одну общую точку *A*. Очевидно, что точка *A* ($x1$ = 200; $x2$ = 300) — оптимальное решение, так как она лежит на прямой с максимально возможным значением z_{max}. Заметим, что эта точка оказалась крайней точкой множества *R*.

Векторы A_1, A_2, ..., A_n, называются требованиями задачи. Рассмотрим допустимое множество *R* в пространстве данных векторов.

Так как в формуле (1.8) $x_i \geq 0$ (i =1, 2, … n), то все положительные комбинации векторов $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют конус (см. приложение 1). Поэтому вопрос о существовании допустимого решения равнозначен вопросу о принадлежности вектора b к этому конусу. Поскольку. $A_1, A_2, \dots A_n$ m-мерные векторы (п > m) , то среди них всегда найдется ***m*** линейно независимых векторов, образующих базис m-мерного пространства и содержащих конус, образованный векторами $A_1, A_2, \dots, A_п$.

Поэтому справедливо следующее утверждение. Если задача ЛП содержит *n* переменных и *m* ограничений *(n > m),* записанных в форме неравенств, не считая ограничений неотрицательности x ≥ 0, то в оптимальное решение входит не более, чем *m,* ненулевых компонент вектора x.

Графический метод решения задачи ЛП

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи ЛП и применяется для решения задач двумерного пространства. Задачи трехмерного пространства решаются очень редко, так как построение их решения неудобно и лишено наглядности. Рассмотрим метод на примере двумерной задачи.

Найти решение $X = (x_1, x_2)$, удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} 3X_1 + X_2 \le 21 \\ 2X_1 + 3X_2 \le 30 \\ 2X_2 \le 16 \end{cases} \qquad (2.9)$$

$$X_1, X_2 \ge 0, \qquad (2.10)$$

при котором значение целевой функции

$$W(X)=3X_1+2X_2 \qquad (2.11)$$

достигает максимума.

Построим на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат X_1OX_2 область допустимых решений задачи.

Первым неравенством (2.9) определяются две области на плоскости (рисунок 1). Одна из них — это область возможных планов задачи, другая — область, где этих планов нет. Границей между ними будет прямая, которую построим, заменив неравенство равенством $3X_1+2X_2=21$. По знаку первого неравенства находим область решения задачи. Аналогично, заменив неравенства равенствами, строим прямые II, III и по знакам неравенств определяем область решений задачи. Неравенства $X_1 \ge 0$, $X_2 \ge 0$ означают, что область решения будет расположена справа от оси ординат и над осью абсцисс. Таким образом, заштрихованная на рисунке 1 область OABCD будет областью допустимых решений, определенной ограничениями задачи. Крайние точки полученной выпуклой многогранной области будут соответствовать допустимым базисным решениям задачи (2.9) ÷ (2.11). Значение целевой функции $W(X)=3X_1+2X_2$ можно определить в любой точке $X = (x_1, x_2)$ области допустимых решений. Прямая линия, перпендикулярная вектору N = (3,2), будет геометрическим местом точек $X = (x_1, x_2)$, в которых целевая функция принимает одинаковые фиксированные значения. Так, в точке $X' = (3,2)$ и в любой точке прямой, перпендикулярной вектору N и проходящей

через точку X' значением функции будет $W= 3 \bullet 3 + 2 \bullet 2= 13$. Вектор N показывает направление параллельного перемещения прямой $X'X''$, соответствующее увеличению целевой функции.

Максимального значения целевая функция достигает в крайней точке C многогранника, являющегося областью допустимых решений задачи. Координаты точки C будут оптимальным решением задачи $X_{опт} = (x_{опт1}, x_{опт2})$ и могут быть найдены при решении уравнений методом Крамера:

$3X_1 + X_2 = 21$

$2X_1 + 3X_2 = 30.$

Вычислим

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 21 & 1 \\ 30 & 3 \end{vmatrix} = 33$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 \\ 2 & 30 \end{vmatrix} = 48,$

$X_1 = \frac{33}{7} = 4\frac{5}{7}$, $X_2 = \frac{48}{7} = 6\frac{6}{7}$.

$W_{max} = 3*4\frac{5}{7} + 2*6\frac{6}{7} = 27\frac{6}{7}$.

Следовательно, $X_{опт} = (4\frac{5}{7}, 6\frac{6}{7})$, $W_{max} = 27\frac{6}{7}$.

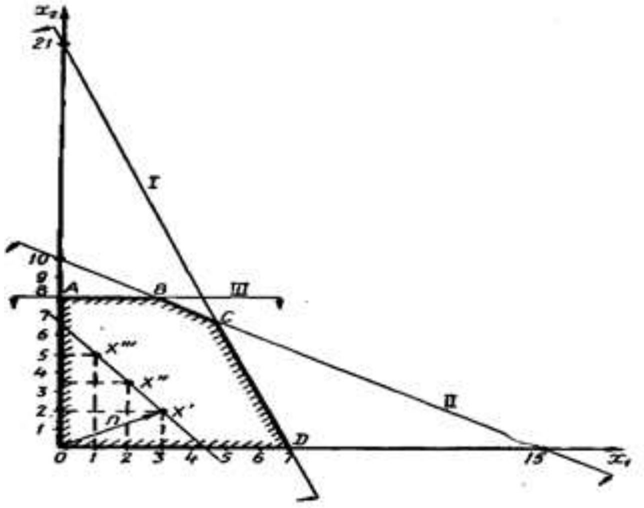


Рисунок 1

Область допустимых решений системы может быть:

– пустой, если система ограничений несовместна;

– одной точкой;

– выпуклым многогранником;

– неограниченной выпуклой многогранной областью.

Для вариантов, представленных на рисунках ограниченной областью допустимых решений, могут встретиться два случая:

максимум целевой функции достигается в единственной точке;

максимальное значение целевой функции иметь место в любой точке отрезка границы области допустимых значений.

В случае, когда область допустимых решений является неограниченной, могут встретиться варианты:

целевая функция иметь экстремум;

функция не ограничена сверху и снизу, т. е. $W_{max} = \infty$, $W_{min} = -\infty$

Лекция № 3

Тема: Расширенная форма задачи ЛП. Табличный симплекс метод. Алгоритм метода. Пример.

Переход к каноническому виду. Расширенная форма задачи ЛП

Пусть задача ЛП задана в общем виде:

$$W = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max (\min)$$

при системе ограничений:

$$\begin{cases} \sum\limits_i a_{ji} x_i = b_j, \text{ где } i = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, m_1}, & \\ \sum\limits_i a_{ji} x_i \le b_j, \text{ где } i = \overline{1, n}, \ j = \overline{m_1+1, m_2}, & (3.1) \\ \sum\limits_i a_{ji} x_i \ge b_j, \text{ где } i = \overline{1, n}, \ j = \overline{m_2+1, m}, & (3.2) \end{cases}$$

и условиях:

$X_k \ge 0$, $k = \overline{1, r}$, $r \le n$.

Перейдем к каноническому виду:

1) При переходе от ограничений неравенств к равенствам вводят дополнительно неотрицательные переменные, количество которых равно числу неравенств x_{n+q}, где $q=\overline{m_1+1, m}$, которые прибавляются к левым частям ограничений (3.1) и вычитаются из левых частей ограничений (3.2). В целевую функцию дополнительные переменные входят с нулевыми коэффициентами. В таком виде задача ЛП называется **расширенной**.
2) Если в постановке задачи на некоторые переменные не наложены условия не отрицательности, то их представляют в виде разности неотрицательных переменных.

   Например, для задачи (3.1), (3.2) вводим:

   $x_k = x_k^1 - x_k^2$, $k > r$

   $x_k^1, x_k^2 \ge 0$

   и теперь получили канонический вид.

Пример: Пусть задача ЛП дана в виде:

$$W = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \le b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (3.3)$$

$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1, n}.$$

Расширенная форма задачи ЛП

Для решения задач ЛП необходимо уметь переходить от ограничений в форме неравенств к равенствам. Для этого вводят свободные переменные $x_{n+1} \ge 0$, $x_{n+2} \ge 0, \ldots, x_{n+m} \ge 0$, которые превращают неравенства в равенства. В таком виде задачу ЛП называют *расширенной* и записывают так:

$$W = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + 0\, x_{n+1} + 0\, x_{n+2} + \ldots + 0\, x_{n+m}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + 1\, x_{n+1} + 0 x_{n+2} + \ldots + 0\, x_{n+m} = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + 0\, x_{n+1} + 1\, x_{n+2} + \ldots + 0\, x_{n+m} = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n + 0\, x_{n+1} + 0\, x_{n+2} + \ldots + 1\, x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

В матричной форме записи расширенная задача имеет вид:

$$W = C^T X \to \max;$$

при

$$A^{(m \times n)} X + E^{(m \times n)} X_{доп} = B;$$

$$X \ge 0,$$

где

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{vmatrix} \qquad X_{доп} = \begin{vmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \ldots \\ x_{n+m} \end{vmatrix},$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{vmatrix}$$

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

В векторной форме записи задач ЛП имеет вид:

$$W = C^T X \rightarrow \max;$$

при

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_n X_n \le B,$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{vmatrix} \dots \; A_n = \begin{vmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{vmatrix} \quad A_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix} \qquad A_{n+m} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{vmatrix}$$

Пусть R и R_1— допустимое множество решений соответственно исходной и расширенной задач. Тогда любой точке допустимого множества *R*. соответствует единственная точка *R* и наоборот.

Установим отношение между элементами этих множеств R и R_1:

исходная задача	расширенная задача
$x_1 + x_2 \le 500$	$x_1 + x_2 + x_3 = 500$

На рисунках 3.1 и 3.2 графически изображены допустимые множества решений обеих задач. Видно, что треугольник *OCA* допустимого множества *R* есть проекция допустимого множества R_1 на подпространство $\boldsymbol{x_1 0 x_2}$.

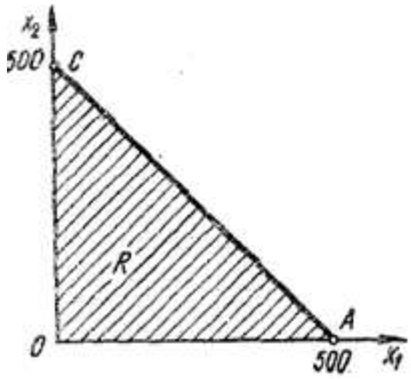


Рисунок 3.1

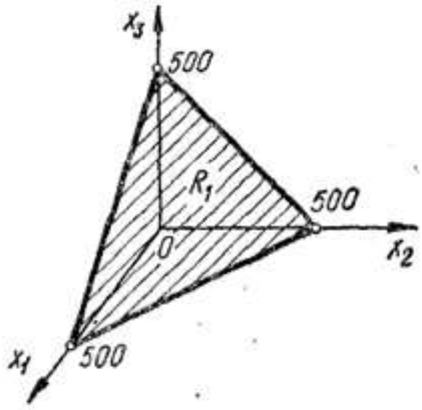


Рисунок 3.2

В общем случае допустимое множество R решений исходной задачи есть проекция допустимого множества R_1 решений расширенной задачи на подпространство исходных переменных ***($x_1 0 x_2$).***

Пример 3.1. Рассмотрим задачу, для которой исходные ограничения и ограничения в расширенной форме имеют соответственно вид:

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 \le 5; \\ 3/2x_1 + 1x_2 \le 6; \end{cases}$$
$x_1, x_2 \geq 0;$

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 5 \\ 3/2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 6 \end{cases}$$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Обозначим

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad A_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Из векторов A_l, A_2 можно составить шесть базисов: $\{A_l, A_2\}$; $\{A_1, A_3\}$; $\{A_4, A_3\}$ и т.д.

Для каждой из этих матриц находим обратные матрицы B^{-1}. Умножив B^{-1} на A_0, получим базисные решения:

($x_1 = 2$, $x_2 = 3$); ($x_1 = 4$, $x_3 = 1$); ($x_1 = 5$, $x_4 = -\frac{3}{2}$);

($x_2 = 6$, $x_3 = -1$); ($x_2 = 5$, $x_4 = 1$); ($x_3 = 5$, $x_4 = 6$).

Метод симплекс-таблиц

Рассмотрим задачу ЛП с системой ограничений в каноническом виде:

$\sum_i a_{ji} x_i = b_j$, где $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$

Опр. Если при неотрицательности правых частей каждое ограничение системы ограничений – равенств имеет переменную. Входящую в левую часть, с коэффициентом, равным 1, а во все остальные с коэффициентом, равным 0, то говорят. Что система представлена в **предпочтительном** виде.

Пример симплекс-таблицы, когда $A_1, A_2\ldots, A_m$ – единичный базис.

Таблица 3.1

C			C_1	C_2	C_3	…	C_i	C_e	C_n
	X	B	A_1	A_2	A_3	…	A_i	…	A_n
C_1	X_1	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}		a_{1i}		a_{1n}
C_2	X_2	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}		a_{2i}		a_{2n}
…									
C_j	X_j	b_j	a_{j1}	a_{j2}	a_{j3}		a_{ji}	a_{je}	a_{jn}
C_r		b_r					a_{ri}	a_{re}	
C_m	X_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}		a_{mi}		a_{mn}
	W	b_0	$\Theta_1 = a_{01}$	$\Theta_2 = a_{02}$	$\Theta_3 = a_{03}$		$\Theta_i = a_{0i}$		$\Theta_n = a_{0n}$

В первой строке и первом столбце записываются значения коэффициентов целевой функции c_i; $i=\overline{1, n}$.

В столбце **X** записывают базисные переменные x_j; $j = \overline{1, m}$. Их значения определяются столбцом **B** свободных коэффициентов b_i, т.е. $x_j^* = b_j$, $j \in I_б$.

В столбцах $A_1, A_2\ldots, A_n$ записывают значения с коэффициентом a_{jr}, $j=\overline{1, m}$, $i=\overline{1, n}$.

Последняя строка называется индексной. В ней записывают: в столбце **X** обозначение целой функции:

$$W=\sum_{j\in I} c_j x_j,$$

а также оценки векторов $\theta_i=a_{01}$.

Алгоритм решения задачи ЛП методом симплекс-таблиц

Алгоритм решения задачи ЛП (задача максимизации) методом симплекс-таблиц состоит в следующем:

1. Рассчитывают и заполняют начальную таблицу с допустимым единичным базисом, включая индексную строку.
2. В качестве направляющего столбца выбирают столбец A_i, для которого

   $\theta_I = a_{01} = \min\{\theta_e | \theta_e < 0\}$, $e=\overline{1, n}$, $e \notin I_б$

   (т.е. вектор $\mathbf{A_i}$ вводится в базис).

3 Направляющая строка $\mathbf{A_j}$ выбирается из условия:

$b_j/a_{ji} = \min\{b_r/a_{ri} \,|\, a_{ri} > 0\}$, $j \in I_б$, $i \notin I_б$

(перебираем строки i-го столбца).

4 Делают один шаг симплекс преобразования с направляющим элементом aji.

Для элементов направляющей строки:

$$a_{je}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{je}^{(k)} / a_{ji}^{(k)}; & e=\overline{1, n}, \quad e \neq i, \\ 1, & \text{если } e = i, \end{cases} \tag{1}$$

$b_j^{(k+1)} = b_j^{(k)} / a_{ji}^{(k)}$.

Для элементов направляющего столбца:

$$a_{ri}^{(k+1)} = \begin{cases} 0; & r \neq j;\ r \in I_б, \\ 1; & r = j;\ r \in I_б. \end{cases} \tag{2}$$

Для остальных элементов:

$$a_{re}^{(k+1)} = a_{re}^{(k)} - (a_{je}^{(k)} / a_{ji}^{(k)})\, a_{ri}^{(k)}; \qquad \text{где } \ e \neq i, r \neq j, \tag{3}$$

$$b_r^{(k+1)} = b_r^{(k)} - (b_j^{(k)} / a_{ji}^{(k)})\, a_{ri}^{(k)}; \qquad \text{где } \ r \neq j.$$

Элементы индексной строки новой таблицы вычисляются по формулам:

$$W^{(k+1)} = b_0^{(k+1)} = b_0^k - b_j^k a_{0i}^k / a_{ji}^k, \tag{4}$$

$$\theta_e^{(k+1)} = a_{0e}^{(k+1)} = a_{0e}^k - a_{je}^k a_{0i}^k / a_{ji}^k, \qquad e = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Правильность вычислений контролируют по формулам непосредственного счета:

$$W^{(k+1)} = b_0^{(k+1)} = \sum_{j \in I} c_j b_j^{(k+1)}. \qquad (6)$$

Эта формула только для контроля:

$$\theta_e^{(k+1)} = a_{0e}^{(k+1)} = \sum_{j \in I} c_j a_{je}^{(k+1)} - c_e. \qquad (7)$$

Примечание:

Так как базисные вектора образуют единичную матрицу, то:

$\alpha_{je} = a_j$

В столбце X заменяют x_j на x_i. А в столбце C заменяют c_j на c_i.

5. Если все оценки $\theta_e^{(k+1)} = a_{0e}^{(k+1)} > 0$, $e = \overline{1, n}$, (для задачи на max), то новое базисное решение

   $x_j = b_j^{(k+1)}$, $j \in I_б$ оптимально.

   В противном случае переходят к этапу 2 и выполняют очередную итерацию.
6. Второй, третий и четвёртый этапы повторяются до тех пор, пока одна из итераций не закончится одним из двух исходов:
   a) $\theta_e = a_{0e} \geq 0$, $e = \overline{1, n}$ (для задачи на max);
   b) Найдётся такое $\theta_i = a_{0i} < 0$, что все элементы этого столбца $a_{ri} < 0$, $r \in I_б$ – это признак неограниченности целевой функции W на множестве допустимых решений.

Пример 1: решить задачу ЛП методом симплекс – таблиц

Найти max $W = 4X_1 + 3X_2$

при ограничениях:

$$\begin{cases} X_1 \leq 4 \\ X_2 \leq 6 \\ X_1 + 2/3X_2 \leq 6 \end{cases}$$

$X_1, X_2 \geq 0$

Предпочтительная и расширенная форма записи задачи ЛП:

$W=4X_1+3X_2 + 0X_3+ 0X_4 + 0X_5 \rightarrow MAX$

$$\begin{cases} X_1 + 0X_2+1X_3+ 0X_4 + 0X_5 = 4 \\ 0X_1+ 1X_2+ 0X_3+1X_4 + 0X_5 = 6 \\ 1X_1+ 2/3X_2+ 0X_3+0X_4 + 1X_5 = 6 \end{cases}$$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

Таблица 3.2

c			4	3	0	0	0	
	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$B / A_1 > 0$
0	X_3	4	1	0	1	0	0	4
0	X_4	6	0	2	0	1	0	-
0	X_5	6	1	2/3	0	0	1	6
	W	0	- 4	-3	0	0	0	

Таблица 3.3

c			4	3	0	0	0	
	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$B / A_2 > 0$
4	X_1	4	1	0	1	0	0	-
0	X_4	6	0	1	0	1	0	6
0	X_5	2	0	2/3	- 1	0	1	3
	W	16	0	-3	4	0	0	

Таблица 3.4

c			4	3	0	0	0	
	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$B / A_3 > 0$
4	X_1	4	1	0	1	0	0	4
0	X_4	3	0	0	3/2	1	- 3/2	2
3	X_2	3	0	1	- 3/2	0	3/2	-
	W	25	0	0	0	0	9/2	

Таблица 3.5

c			4	3	0	0	0
	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
4	X_1	2	1	0	0	- 2/3	1
0	X_3	2	0	0	1	2/3	- 1
3	X_2	6	0	1	0	1	1
	W	26	0	0	0	1/3	4

Ответ:

$X_{opt} = \{2; 6\}$;

$W_{max} = 4x_{1opt} + 3\ x_{2opt}$;

$W_{max} = 4*2 + 3*6 = 26$.

Лекция №4

Тема: Особенности применения табличного симплекс метода. Метод искусственных переменных. Пример.

Особенности применения табличного симплекс-метода

1. Если в качестве начального базиса выбирают базис из свободных переменных, для которых

   $c_j = 0,\ j \in I_б$,

   то оценки для всех небазисных переменных

   $\theta_i = a_{0i} = -c_i$

   и соответствующее значение целевой функции

   $$W = b_0 = \sum_{j \in I_б} c_j x_j = 0.$$

2. Отсутствие векторов с отрицательной оценкой θ_i (при решении задачи на max) является признаком оптимальности соответствующего базисного решения.
3. Если имеется хотя бы одна отрицательная оценка для небазисного вектора, а его столбец содержит только отрицательные элементы, то в области допустимых решений целевая функция не ограничена.
4. Если в индексной строке все элементы θ_i одного знака, и при этом есть хотя бы один нулевой элемент, то полученное оптимальное решение является альтернативным, то есть имеется другой набор переменных, при котором целевая функция будет иметь такое же оптимальное значение.
5. При решении задачи максимизации в базис вводится вектор A_i с наименьшей отрицательной оценкой, а при решении задачи минимизации в базис вводится вектор с наибольшей положительной оценкой.
6. Базисное решение на к + 1 итерации называется вырожденным, если хотя бы одна из базисных переменных принимает нулевое значение. Что может привести к зацикливанию.

   Если на какой-то итерации возникает неопределенность в выборе разрешающей строки, то есть оказываются несколько равных минимальных отношений:

   $\{b_r/a_{ri} \mid a_{ri} > 0\},\ r \in I_б,\ i \notin I_б,$ (*)

   то поступают следующим образом: из строк, в которых одинаковые минимальные отношения (*), выбираем в качестве разрешающей ту, которой соответствует наименьшее отношение столбца A_1 к элементам направляющего столбца. Если при этом окажется несколько равных минимальных отношений, то составляют отношение элементов второго столбца A_2 и т.д. пока направляющая строка не выберется однозначно.

Метод искусственных переменных

При приведении системы ограничений к предпочтительному виду возможны следующие случаи:

1. Пусть ограничение задачи ЛП имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \leq b_j, \quad j=\overline{1, m}.$$

Добавив к левым частям дополнительную переменную x_{n+j}; $j=\overline{1, m}$, получим расширенную задачу, эквивалентную исходной и в которой система ограничений имеет предпочтительный вид:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i + x_{n+j} = b_j, \quad j=\overline{1, m}$$

Это означает, что в начальный единичный базис можно включить вектора $\{A_{n+j}\}$, $j=\overline{1, m}$.

Следовательно, начальный опорный план:

$$X = (\underbrace{0; 0; \ldots; 0}_{n}; \underbrace{b_1; b_2; \ldots; b_m}_{m})$$

В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с нулевыми коэффициентами, то есть

$C_{n+j} = 0; \quad j=\overline{1, m}$

Пусть ограничения задачи ЛП имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \geq b_j, \quad b_j \geq 0$$

Вычтем из левых частей дополнительные переменные $x_{n+j} \geq 0$, получим расширенную задачу, эквивалентную исходной. Но теперь в ней система ограничений не имеет предпочтительного вида, так как дополнительные переменные входят в левую часть с коэффициентом = -1:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i - x_{n+j} = b_j, \qquad j=\overline{1, m}$$

По тому плану начальный план недопустим

$$X_H = (0;\ 0;\ \ldots;\ 0;\ -b_1;\ -b_2;\ \ldots;\ -b_m)$$

$$\leftarrow\ n\ \rightarrow\ \leftarrow\ \ m\ \ \rightarrow$$

В этом случае вводят так называемый искусственный базис. К левым частям системы ограничений типа равенств, не имеющих предпочтительного вида, добавляют искусственные переменные.

В целевую функцию искусственные переменные вводят с коэффициентом +M при решении задачи на min и с коэффициентом –M при решении задачи на max, где M - большое положительное число

$$M >> C_i \quad i=\overline{1, n}$$

Полученная задача называется М-задачей и соответствует исходной. Она всегда имеет предпочтительный вид.

Пример:

Пусть исходная задача ЛП имеет вид:

$$W = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i \rightarrow \max\ (\min) \tag{4.1}$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = b_j, \qquad b_j \geq 0,\ j=\overline{1, m},\ x_i \geq 0,\ i=\overline{1, n} \tag{4.2}$$

Если ни одно из ограничений (2) не имеет предпочтительного вида, то М – задача запишется так:

$$W = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i - (+) \sum_{j=1}^{m} M x_{n+j} \rightarrow \max\ (\min), \tag{4.3}$$

где: X_{n+j} - искусственные переменные,

при

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i + x_{n+j} = b_j, \qquad b_j \geq 0,\ j=\overline{1, m}, \tag{4.4}$$

$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,n}; \qquad x_{n+j} \geq 0,\ j=\overline{1,m};$ (4.5)

Начальный опорный план для М-задачи имеет следующий вид:

$$X_{НМ} = (\underbrace{0; 0; \ldots; 0}_{n}; \underbrace{b_1; b_2; \ldots; b_m}_{m}).$$

Между оптимальным планом исходной задачи (уравнения (1), (2)) и оптимальным планом ((3) ÷ (5)) существует связь, которая устанавливается утверждением:

Теорема. Если в оптимальном плане М-задачи

$$X_{opt\ M} = (\underbrace{x_{01}; x_{02}; \ldots; x_{0n}}_{n}; \underbrace{x_{0n+1}; \ldots; x_{0n+m}}_{m})$$

все искусственные переменные $x_{n+j}=0$, то план $X_{opt} = (x_{01}, x_{02, \ldots,} x_{0n})$ **оптимален** для исходной задачи.

Если же хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля, то система ограничений исходной задачи несовместна.

Искусственные переменные при использовании симплекс-метода образуют начальное базисное решение. Применив симплекс-метод, необходимо вывести из базиса все искусственные переменные. Если доказано, что от них нельзя избавиться, то задача, не имеет решения, ее ограничения противоречивы.

Пример 2: решить задачу ЛП методом искусственных переменных

Найти min $W = 15X_1 + 33X_2$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \geq 6 \\ 6X_1 + X_2 \geq 6 \\ X_2 \geq 1 \end{cases}$$

$X_1, X_2 \geq 0$

Запишем расширенную форму записи задачи ЛП:

$W=15X_1+33X_2 + 0X_3+ 0X_4 + 0X_5 \to MIN$

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 -1X_3 + 0X_4 + 0X_5 = 6 \\ 6X_1 + 6X_2 + 0X_3 -1X_4 + 0X_5 = 6 \\ 0X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 - 1X_5 = 1 \end{cases}$$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

Введём 3 искусственные переменные:

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 -1X_3 + 0X_4 + 0X_5 +1X_6 + 0X_7 + 0X_8 = 6 \\ 6X_1 + 6X_2 + 0X_3 -1X_4 + 0X_5 +0X_6 + 1X_7 + 0X_8 = 6 \\ 0X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 - 1X_5 +0X_6 + 0X_7 + 1X_8 = 1 \end{cases}$$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 \geq 0,$

Тогда целевая функция запишется следующим образом:

$W=15X_1+33X_2 + 0X_3+ 0X_4 + 0X_5 + MX_6 + MX_7 + MX_8 \to MIN.$

Так как A_6, A_7, A_8 образуют единичный базис и коэффициенты при X_6, X_7, X_8 ≥ 0, применим табличный симплекс – метод.

Таблица 4.1

C			15	33	0	0	0	M	M	M	
	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	B / A_1 > 0
M	X_6	6	3	2	-1	0	0	1	0	0	2
M	X_7	6	6	1	0	-1	0	0	1	0	1
M	X_8	1	0	1	0	0	-1	0	0	1	-
	W	13+M	9M - 15	4M - 33	- M	- M	- M	0	0	0	

Таблица 4.2

C			15	33	0	0	0	M	M	M	
	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	B / A_2 > 0
M	X_6	3	0	3/2	-1	1/2	0	1	-1/2	0	2
15	X_1	1	1	1/6	0	-1/6	0	0	1/6	0	6
M	X_8	1	0	1	0	0	-1	0	0	1	1
	W	4+15M	0	5/2M - 61/2	- M	1/2M-5/2	- M	0	3/2M-5/2	0	

Таблица 4.3

c			15	33	0	0	0	M	M	
	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_8	B / A_5 > 0
M	X_6	3/2	0	0	-1	1/2	3/2	1	-3/2	1
15	X_1	5/6	1	0	0	-1/6	1/6	0	-1/6	5
33	X_2	1	0	1	0	0	-1	0	1	-
	W	(91+3M)/2	0	0	- M	M/2-5/2	(3M-61)/2	0	(-5M+61)/2	

Таблица 4.4

c			15	33	0	0	0	M	
	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	B / A_4 > 0
0	X_5	1	0	0	-2/3	1/3	1	2/3	3
15	X_1	2/3	1	0	1/9	-2/9	0	-1/9	-
33	X_2	2	0	1	-2/3	1/3	0	2/3	6
	W	76	0	0	-61/3	46/6	0	61/3-M	

Таблица 4.5

c			15	33	0	0	0
	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	X_4	3	0	0	-2	1	3
15	X_1	4/3	1	0	-1/3	0	2/3
33	X_2	1	0	1	0	0	-1
	W	53	0	0	-5	0	- 23

Ответ:

$X_{opt} = \{4/3; 1\}$;

$W_{min} = 15x_{1opt} + 33\ x_{2opt}$;

$W_{min} = 15*2 + 33*6 = 53$.

Лекция № 5

Тема: Двойственная задача ЛП. Структура и свойства двойственной задачи. Взаимосвязь между прямой и двойственной задачами.

Структура и свойства двойственной задачи

Любую задачу максимизации ЛП с экономической точки зрения можно рассматривать как задачу о распределении ограниченных ресурсов $b_1, b_2, ..., b_m$ между различными потребителями, например, между некоторыми технологическими процессами, которые представляются столбцами A_1 A_2, ..., An матрицы ограничений задачи. Любое допустимое решение задачи ЛП x_1 x_2, ..., x_n даёт конкретное распределение, указывающее ту долю каждого из ресурсов, которая должна быть использована при осуществлении соответствующего технологического процесса.

Пример 1: Задача о выборе оптимальных технологий

Предприятие может выпускать некоторую однородную продукцию тремя технологическими способами. Пусть a_{ji} – расход ресурса j за единицу времени по i технологии; C_i – производительность i технологии в ст. ед. за ед. времени (прибыль от реализации единицы продукции, производимой по i - ой технологии в единицу времени.

Данные записаны в следующей таблице:

Ресурсы	**Технологические способы**			**Объём ресурса, b_j**
	1	2	3	
Рабочая сила, a_{1i}, чел./час	15	20	25	1200
Сырьё, a_{2i}, тонны/час	2	3	2.5	1500
Электроэнергия, a_{3i}, квт/час	35	60	60	3000
Производительность технологического способа, C_i, ст. ед./час	300	250	450	
План использования технологического способа, x_i, час	X_1	X_2	X_3	

Определить интенсивность использования каждого технологического способа x_i, то есть время, в течение которого предприятие вырабатывает продукцию по i – ому способу с максимальной прибылью.

Пренебрегая временем переналадки при переходе от одного способа к другому, получим следующую математическую модель задачи:

Прибыль:

$W=300X_1+250X_2+450X_3 \to MAX$ $\qquad W = C^T X \to MAX$

При ограничениях:

$$\begin{cases} 15X_1 + 20X_2 + 25X_3 \le 1200 \\ 2X_1 + 3X_2 + 2{,}5X_3 \le 1500 \\ 35X_1 + 60X_2 + 60X_3 \le 3000 \end{cases} \qquad AX \le B \qquad (*)$$

$X_1, X_2, X_3 \ge 0$ $\qquad X \ge 0$

Пример 2:

На ряду с выпуском однородной продукции по некоторым технологическим способам предприятие решает задачу по реализации ресурсов на сторону.

Пусть y_j – оценка (цена) единицы j - го ресурса.

Рассмотрим i -ую технологию, то сумма:

$\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} y_j$ - общая оценка ресурсов, израсходованных в единицу времени по i – ой технологии.

Предприятие откажется от i – ой технологии, общая оценка ресурсов. Затраченных по ней в единицу времени не меньше C_i стоимости конечной продукции, выпущенной в единицу времени по этой технологии, то есть при условии

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j \ge C_i \qquad (**)$$

Очевидно, всегда можно подобрать y_j, чтобы (**) выполнялось. Чтобы не допустить необоснованного завышения оценок ресурсов, оценки y_j подбираются так, чтобы суммарная оценка была минимальна (то есть суммарные расходы)

$$F = \sum_{j=1}^{m} b_i y_j \to \min, \; y_j \ge 0, \; j=\overline{1, m}. \qquad (***)$$

Получили пару задач (*) и (**), (***), которые называются двойственными или сопряженными.

Прямая задача	Двойственная задача
$W = C^T X \to MAX$	$F = B^T Y \to MIN$
$AX \le B$	$A^T Y \ge C$
$X \ge 0$	$Y \ge 0$

Это пара двойственных задач.

Виды математических моделей двойственных задач

Виды модели делятся на две группы:

I **Симметричная пара двойственных задач** (система ограничений задаётся в виде неравенств и на переменные наложено условие неотрицательности):

Прямая задача	Двойственная задача
1) $W = C^TX \rightarrow MAX$	$F = B^TY \rightarrow MIN$
$AX \le B$	$A^TY \ge C$
$X \ge 0$	$Y \ge 0$

Прямая задача	Двойственная задача
2) $W = C^TX \rightarrow MIN$	$F = B^TY \rightarrow MAX$
$AX \ge B$	$A^TY \le C$
$X \ge 0$	$Y \ge 0$

II **Несимметричная пара двойственных задач** (система ограничений прямой задачи задана равенствами, а в двойственной задаче неравенствами, причём в двойственной переменные могут быть и меньше 0):

Прямая задача	Двойственная задача
1) $W = C^TX \rightarrow MAX$	$F = B^TY \rightarrow MIN$
$AX = B$	$A^TY \ge C$
$X \ge 0$	

Прямая задача	Двойственная задача
2) $W = C^TX \rightarrow MIN$	$F = B^TY \rightarrow MAX$
$AX = B$	$A^TY \le C$
$X \ge 0$	

Взаимосвязь между прямой о двойственной задачами

Сопоставляя формы записи прямой и двойственной задач, можно установить между ними следующие взаимосвязи:

1) если *прямая задача* является *задачей максимизации,* то *двойственная* будет *задачей минимизации,* и наоборот;
2) *коэффициенты целевой функции прямой задачи* C_1, C_2, ..., Cn становятся *свободными членами ограничений двойственной задачи-*

3) свободные члены ограничений прямой задачи b_1, b_2, .., bm становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи;

4) *матрицу ограничений двойственной задачи получают транспонированием матрицы ограничений прямой задачи;*

5) *знаки неравенств в ограничениях изменяются на обратные;*

6) число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной задачи, а число ограничений двойственной задачи равно числу переменных прямой задачи.

7) Правило для симметричной пары двойственной задачи:

Если прямая задача на максимум, то система ограничений представляется в виде неравенств типа $\leq$. Двойственная задача решается на минимум, если её система ограничений имеет вид $\geq$.

8) Взаимно-однозначное соответствие между переменными исходной задачи и ограничениями двойственной задачи удовлетворяется положением:

i - ое ограничение двойственной задачи будет неравенством, если на i – ую переменную исходной задачи наложено требование неотрицательности. В противном случае: i – ое ограничение будет равенством.

Примечание:

1. Переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ двойственной задачи иногда называют *«теневыми ценами»*.
2. Двойственную задачу выгоднее решать, чем исходную прямую, если в прямой задаче при малом количестве переменных имеется большое, количество ограничений (m > n).
3. Задача, двойственная двойственной, совпадает с исходной, поэтому нет разницы какую считать прямой. А какую двойственной, и говорят о паре взаимно - двойственных задач.

Лекция № 6

Теоремы двойственности. Пример.

Теоремы двойственности

Связь между оптимальными решениями прямой и двойственной задач устанавливают посредством следующих теорем теории двойственности.

Основное неравенство двойственности

Теорема: Если x_0 *и* $\mathbf{y_0}$ — допустимые решения прямой и двойственной задач, то есть если

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \leqslant \mathbf{b} \text{ и } \mathbf{A}^T\mathbf{y}_0 \geqslant \mathbf{c};$$

то

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 \leqslant \mathbf{b}^T\mathbf{y}_0,$$

то есть значения целевой функции прямой задачи никогда не превышают значений целевой функции двойственной задачи:

$$W(X) \leq F(Y).$$

Теорема существования (малая теорема двойственности):

Чтобы прямая и двойственная задачи имели оптимальное решение, необходимо и достаточно. чтобы существовали допустимые решения для каждой из них.

1-ая основная теорема двойственности

Если x_0 и y_0 — допустимые решения прямой и двойственной задач и, если

$$C^TX_0 = B^TY_0, \tag{6.1}$$

то x_0 и y_0 — оптимальные решения пары двойственных задач.

Если же целевая функция одной из задач не ограничена, то другая задача не имеет оптимального решения (её система ограничений противоречива).

Между оптимальными решениями прямой и двойственной задач и элементами индексных строк симплекс-таблиц, соответствующих этим решениям, существует взаимосвязь:

Если прямая задача решается на максимум, то справедливо следующее соотношение:

$$Y_{0j} = \Theta^{п}_{n+j};\ j = \overline{1, m} \tag{6.2}$$

$$X_{0i} = -\ \Theta^{д}_{m+i};\ i = \overline{1, n} \tag{6.3}$$

Если прямая задача решается на минимум, то справедливы следующие неравенства:

$$Y_{0j} = -\ \Theta^{п}_{n+j};\ j = \overline{1, m} \tag{6.4}$$

$$X_{0i} = \Theta^{д}_{m+i};\ i = \overline{1, n} \qquad (6.5)$$

Здесь n – количество переменных прямой задачи, m – количество её ограничений, $\Theta^{п}_{n+j}$, - $\Theta^{д}_{m+i}$ – соответствующие элементы индексных строк прямой $\Theta^{п}$ и двойственной $\Theta^{д}$ задач.

При этом, $n+j,\ j = \overline{1, m}$ больше числа векторов столбцов матрицы ограничений расширенной формы соответствующей задачи, то элементы $\Theta^{п}_{n+j}$ ($\Theta^{д}_{m+i}$) находятся путём циклической перестановки элементов в индексной строке, начиная с элемента Θ_1.

2-ая основная теорема двойственности

Чтобы допустимые решения X и $У$ пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнить условия:

$$x_{0i}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}y_{0j} - C_i\right) = 0 \qquad (6.6)$$

$$y_{0j}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_{0j} - b_j\right) = 0 \qquad (6.7)$$

то есть, если какое-то ограничение одной задачи обращается её оптимальным планом в строгое неравенство. То соответствующая ей переменная двойственной задачи = 0.

Если же какая-либо переменная оптимального решения одной задачи положительна. То соответствующее ограничение двойственной задачи её оптимальным планом обращается в точное равенство.

Рассмотрим (6.6):

если $\sum_{j=1}^{m} a_{ji}y_{0j} - C_i > 0$, то $x_{0i} = 0$ (6.8)

если $x_{0i} > 0$, то $\sum_{j=1}^{m} a_{ji}y_{0j} = C_i$ (6.9)

Рассмотрим (6.7):

если $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_{0j} - b_j < 0$, то $y_{0j} = 0$ (6.10)

если $y_{0j} > 0$, то $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_{0j} = b_j$ (6.11)

Экономическая интерпретация на примере задачи использования ресурсов.

Из (6.8) следует экономический смысл: если некоторый способ производства связан с превышением расходов над доходами, то его использование не имеет смысла.

Из (6.9) следует: является условием рентабельности. Оно должно выполняться в экономически выгодных технологических производствах.

Условие (6.10): если производственный фактор (ресурс) используется неполностью, то его оценка $y_{0j} = 0$ и наоборот, то есть фактор. Запасы которого превышают потребности в нём, не представляет ценности для производства. Некоторое сокращение запасов по такому фактору не уменьшит возможности производства.

Условие (6.11): положительная оценка возможна только у такого фактора или ресурса, который расходуется полностью при любом оптимальном плане использования технологических способов производства, то есть при любых X_{0j}.

3-ая основная теорема двойственности

Пусть величины ресурсов b_j могут изменяться. При каких приращениях правых частей ограничений найденный оптимальный план X_0 не изменится и как изменения b_j сказываются на экстремальном значении целевой функции.

Теорема утверждает:

Частная производная

$$\frac{\partial W_{max}}{\partial b_j} = y_{0j} \qquad (6.12)$$

то есть значение переменных y_{0j} в оптимальном решении равны изменению целевой функции при малом изменении соответствующего ограниченного ресурса.

Если принять:

$$\partial W_{max} \approx \Delta W_{max}, \; \partial b_j \approx \Delta b_j,$$

то из (6.11) получим:

$$\Delta W_{max} = \Delta b_j \; y_{0j}.$$

При $\Delta b_j = 1$, $\Delta W_{max} \approx y_{0j}$,

то есть величина двойственной оценки y_{0j} численно равна изменению целевой функции прямой задачи при изменении соответствующего ресурса на единицу.

Пример: Прямая задача дана в виде:

Найти max $W = 4X_1 + 3X_2$

при ограничениях:

$$\begin{cases} X_1 \le 4 \\ X_2 \le 6 \\ X_1 + 2/3X_2 \le 6 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

$$\begin{cases} X_1 + 0X_2 \le 4 \\ 0X_1 + 1X_2 \le 6 \\ 1X_1 + 2/3X_2 \le 6 \end{cases}$$

Составим двойственную задачу:

Целевая функция $F = 4y_1 + 6y_2 + 6y_3 \rightarrow MIN$

Ограничения:

$$\begin{cases} 1Y_1 + 0Y_2 + 1Y_3 \ge 4 \\ 0Y_1 + 1Y_2 + 2/3Y_3 \ge 3, \end{cases}$$

$Y_1, Y_2, Y_3 \ge 0.$

Для решения двойственной задачи табличным симплекс-методом переходим к расширенной форме:

$$\begin{cases} 1Y_1 + 0Y_2 + 1Y_3 - 1X_4 + 0X_5 = 4 \\ 0Y_1 + 1Y_2 + 2/3Y_3 + 0X_4 - 1X_5 = 3 \end{cases}$$

$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \ge 0$

Составим симплекс-таблицу:

Таблица 6.1

B			4	6	6	0	0	
	Y	C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$B / A_3 > 0$
4	Y_1	4	1	0	1	-1	0	4
6	Y_2	3	0	1	2/3	0	-1	9/2
	F	34	0	0	2	-4	-6	

Таблица 6.2

B			4	6	6	0	0
	Y	C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
6	Y_3	4	1	0	1	-1	0
6	Y_2	1/3	-2/3	1	0	2/3	-1
	F	26	-2	0	0	-2	-6

Процедура закончена, так как задача на минимум и все оценки неположительные.

Ответ:

$Y_{opt} = \{0; 1/3; 4\}$;

$F_{max} = 4y_{1opt} + 6y_{2opt} + 6y_{3opt}$;

$F_{max} = 4*0 + 6*1/3 + 6*4 = 26$.

Проверим выполнимость теорем теории двойственности:

Прямая задача

$W = 4X_1 + 3X_2 \rightarrow \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} X_1 \leq 4 \\ X_2 \leq 6 \\ X_1 + 2/3X_2 \leq 6 \end{cases}$$

$X_1, X_2 \geq 0$

$n = 2$, $m = 3$.

Решение: $X_{10} = 2$; $X_{20} = 6$; $X_{30} = 2$; $W(X_0) = 26$.

Получили следующую индексную строку:

c			4	3	0	0	0
	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	W	26	0	0	0	1/3	4

Двойственная задача

Целевая функция $F = 4y_1 + 6y_2 + 6y_3 \rightarrow MIN$

Ограничения:

$$\begin{cases} 1Y_1 + 0Y_2 + 1Y_3 \geq 4 \\ 0Y_1 + 1Y_2 + 2/3Y_3 \geq 3, \end{cases}$$

$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$.

Решение: $Y_{10} = 0$; $Y_{20} = 1/3$; $Y_{30} = 4$; $F(Y_0) = 26$.

Получили следующую индексную строку:

B			4	6	6	0	0
	Y	C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	F	26	-2	0	0	-2	-6

Условия (6.1):

$W(X_0) = F(Y_0)$,

$26 = 26$, $W_{max} = F_{min}$.

Условие (6.2):

$y_{0j} = \Theta^{п}_{n+j}$; $j = \overline{1, m}$.

$n = 2$, $m = 3$.

$y_{01} = \Theta^{п}_{2+1} = \Theta^{п}_{3} = 0$

$y_{02} = \Theta^{п}_{2+2} = \Theta^{п}_{4} = 1/3$

$y_{03} = \Theta^{п}_{2+3} = \Theta^{п}_{5} = 4$

Условие (6.3):

$X_{0i} = -\Theta^{д}_{m+i}$; $i = \overline{1, n}$.

$X_{01} = -\Theta^{д}_{3+1} = \Theta^{п}_{4} = 2$;

$X_{02} = -\Theta^{д}_{3+2} = \Theta^{п}_{5} = 6$;

$X_{03} = -\Theta^{д}_{3+3} = \Theta^{п}_{6} = \Theta^{п}_{1} = 2$;

Условие (6.8):

$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_{0j} - C_i > \mathbf{0}$, то $X_{0i} = 0$

$1Y_1 + 0Y_2 + 1Y_3 \geq 4$, $i = 1$

$0 + 0 + 4 = 4$, $\Rightarrow X_{01} = 2 > \mathbf{0}$

$0Y_1 + 1Y_2 + 2/3Y_3 \geq 3$, $i = 2$,

$0 + 1/3 + 2/3*4 = 3$, $3 = 3 \Rightarrow X_{02} = 6 > \mathbf{0}$

Условие (6.10):

$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_{0j} - b_j < \mathbf{0}$, то $y_{0j} = 0$

$X_1 \leq 4$, $j = 1$

$2 < 4$, $\Rightarrow Y_{01} = \mathbf{0}$

$X_2 \leq 6$, $j = 2$

$6 = 6$, $\Rightarrow Y_{02} > \mathbf{0}$

$X_1 + 2/3X_2 \leq 6$, $j = 3$

$2 + 2/3*6 \leq 6$

$6 = 6$, $\Rightarrow Y_{03} = 4 > \mathbf{0}$

Лекция № 7

Двойственный симплекс метод. Алгоритм. Пример.

Двойственный симплекс метод (метод последовательного уточнения оценок)

Этот метод решения задач ЛП был предложен Лемке в 1954 году.

Решение задач с помощью данного метода сводится к поиску оптимального плана двойственной задачи путём перехода от одного опорного плана к другому. Двойственная связь позволяет получить при этом и оптимальное решение прямой задачи. Пусть прямая задача ЛП дана в канонической форме:

$$W=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max \qquad (7.1)$$

при системе ограничений:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}, \qquad AX = B; \qquad \sum_{i=1}^{n} A_i x_i = B, \text{ где } i=\overline{1,n}, \qquad (7.2)$$

$$\boldsymbol{x_i} \geq 0,\ i=\overline{1,n} \qquad X \geq 0 \qquad \boldsymbol{x_i} \geq 0,\ i=\overline{1,n} \qquad (7.3)$$

Пусть ранг матрицы rang $\overset{n}{A} = m$. Двойственная задача запишется следующим образом:

$$F=\sum_{j=1}^{m} b_j y_j \to \min \qquad (7.4)$$

при системе ограничений:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j \geq c_i,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1\ m}, \qquad A^T Y \geq C; \qquad \sum_{j=1}^{m} A_j y_j \geq C, \text{ где } i=\overline{1,\ n}, \qquad (7.5)$$

Очевидно, что (7.1) ÷ (7.5) – это несимметричная пара двойственных задач.

Опр. Назовем **сопряженным базисом**, или базисом двойственной задачи, систему из m линейно-независимых векторов $\{A_j, j \in I_б\}$ матрицы ограничений прямой задачи (7.2), для которой соответствующие m ограничения двойственной задачи выполняются в виде строгих равенств, а найденное по ним решение Y удовлетворяет всем ограничениям (7.5).

Разложим вектор B по сопряженному базису:

$$B = \sum_{j \in I_б} A_j x_j \qquad (7.6)$$

Решив (7.6), получим некоторое базисное решение $\{x^*_j,\ j \in I_б\}$, которое называется псевдопланом прямой задачи, так как здесь может быть нарушено условие неотрицательности.

Таким образом, *псевдоплан* прямой задачи есть *базисное решение относительно сопряженного базиса.*

Очевидно, Каждому сопряженному базису соответствует некоторый сопряженный псевдоплан прямой задачи.

При двойственном симплекс-методе осуществляется движение по сопряженным базисам (по соответствующим псевдопланам) до тех пор, пока не выполнится некоторый признак оптимальности.

Справедлив следующий **признак оптимальности**:

Если среди базисных компонент X нет отрицательных, то есть

$$x^*_j \geq 0,, j \in I_б \quad , \qquad (7.7)$$

то псевдоплан X прямой задачи оказывается оптимальным планом прямой задачи, а опорный план Y двойственной задачи.

Двойственный симплекс – метод использует идеи симплекс – метода.

Метод является итерационным. Каждый переход от одного сопряженного базиса к другому составляет одну итерацию (1 шаг двойственного симплекс – метода).

Каждая итерация содержит 2 этапа:

I этап: выявляют является ли псевдоплан оптимальным планом прямой задачи, и если – нет, то разрешима ли задача.

II этап состоит в осуществлении элементного преобразования, приводящего к новому опорному плану сопряженной задачи с меньшим значением целевой функции двойственной задачи. На этом этапе в базис вводится вектор A_i выводится A_j.

На каждой итерации заполняется таблица, аналогичной таблице в симплекс – методе и состоящая из $m + 2$ строк и $n + 3$ столбцов.

C			C_1	C_2		C_i		C_n
	X	B	A_1	A_2		A_i		A_n
C_1	X_1	b_1	α_{11}	α_{12}		α_{1i}		α_{1n}
C_2	X_2	b_2	α_{21}	α_{22}		α_{2i}		α_{2n}
…								
C_j	X_j	b_j	α_{j1}	α_{j2}		α_{ji}		α_{jn}
C_m	X_m	b_m	α_{m1}	α_{m2}		α_{mi}		α_{mn}
	W	b_0	$\Theta_1 = a_{01}$	$\Theta_2 = \alpha_{02}$		$\Theta_i = \alpha_{0i}$		$\Theta_n = \alpha_{0n}$
	ρ	ρ_0						

$$A_i = \sum_{j \in I_б} A_j \alpha_{ji}, \quad i \notin I_б \qquad (7.8)$$

Строку m + 1 заполняют параметрами Θ, величина Θ_0 - значение целевой функции прямой задачи при данном псевдоплане:

$$W = \Theta_0 = \sum_{j \in I_б} c_j x^*_j \qquad (7.9)$$

Величина Θ_i является оценками векторов A_i

$$\Theta_i = \sum_{j \in I_б} C_j \alpha_{ji} - C_i, \quad i \notin I_б \qquad (7.10)$$

Алгоритм двойственного симплекс – метода

Прямая задача ЛП представлена в канонической форме (7.1) ÷ (7.3).

I этап

1. Отыскивают сопряженный базис двойственной задачи, пусть это будет $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$.
2. Разлагаем вектор B по векторам $\{Aj, j \in I_б\}$ в соответствии с (7.6).

   $$B = \sum_{j \in I_б} A_j x_j$$

   находим псевдоплан $\{x^*_j, j \in I_б\}$ прямой задачи.
3. Исследуем знаки x^*_j полученного псевдоплана, если $x^*_j \geq 0$, для всех $j \in I_б$, то начальный план является оптимальным планом прямой задачи. Процедура закончена.
4. При наличии отрицательных компонент $\{x^*_j, j \in I_б\}$, вычисляем величины α_{ji} коэффициенты разложения векторов $\{A_i, i \notin I_б\}$ по сопряженному базису в соответствии с уравнением (7.8).

   $$A_i = \sum_{j \in I_б} A_j \alpha_{ji},$$
5. Заполняем таблицу симплекс – метода. В зависимости от знаков α_{ji} возможны следующие случаи:

   5.1. Если для некоторых $\{x^*_j, j \in I_б\}$ все $\alpha_{ji} \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, то целевая функция F двойственной задачи не ограничена снизу на множестве её планов, а прямая задача (7.1) – (7.3) не разрешима.

   Процесс вычисления заканчивается.

   5.2. Псевдоплан содержит отрицательные компоненты:

$x^*_j, j \in I_б$, но для каждого из них среди элементов $\alpha_{ji} \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, имеется хотя бы одна меньше 0. В этом случае псевдоплан можно улучшить. Переход ко этапу II.

II этап состоит в элементных преобразованиях, приводящих к новому опорному плану.

1. Определяем вектор Aj, который надо вывести из базиса, его индекс j определяют из условия:

   $$x^*_j = \min \{x^*_r | x^*_r < 0\} \qquad (7.11)$$

   то есть по минимальной отрицательной компоненте базисного решения.
2. Заполняем m + 2 строку симплекс – таблицы

   $$\rho_0 = -\frac{\Theta e}{\alpha je}; \quad \alpha_j e < 0, \quad e \notin I_б \qquad (7.12)$$

   В строке ρ заполняем лишь те позиции, для которых $\alpha_j e$ отрицательны.
3. Вектор A_i, вводимый в базис находим из условия:

   $$\rho_i = \min_{e \notin I_б} \{\rho_e\} = \min_{e \notin I_б} \left\{-\frac{\Theta e}{\alpha je}\right\}, \alpha_j e < 0, \qquad (7.13)$$

4. Определим направляющую строку j, столбец *i*. Вычисляются элементы главной части таблицы α_{ji} по рекуррентным формулам:

   $$\alpha^{(k+1)}_{re} = \begin{cases} \alpha^{(k)}_{re} - \alpha^{(k)}_{je} * \alpha^{(k)}_{ri} / \alpha^{(k)}_{ji}, & r \neq j \\ \alpha^{(k)}_{je} / \alpha^{(k)}_{ji}, & r = j, \end{cases} \qquad (7.14)$$

   где α_{ji} - направляющий элемент преобразования.

Некоторые важные свойства двойственного симплекс-метода

1. В отличие от прямого симплекс-метода для своего применения он не требует нахождения начального допустимого базисного решения (д. б. р.) (опорного плана), а поиск начального псевдоплана часто может оказаться легче, чем поиск д. б. р. (например, приходится вводить искусственные переменные).
2. Двойственным симплекс – методом можно решать задачи ЛП, системы ограничений которых при положительном базисе, содержат ограничения любого знака. Метод позволяет уменьшить количество преобразований системы ограничений, а также размеры симплекс – таблицы.
3. Вырожденному опорному плану двойственной задачи может соответствовать несколько псевдопланов прямой задачи, что часто приводит к зацикливанию. С целью исключения

возможного зацикливания модифицируются правила отыскания вводимого в базис вектора. В результате чего план определяется однозначно и полностью, исключается опасность зацикливания

$$i = \min_{\kappa \in E} \kappa,$$

где E – совокупность индексов κ, на которых достигается

$$\min \left\{-\frac{\Theta\text{к}}{\alpha\text{jк}}\right\}.$$

4. Двойственный симплекс – метод позволяет в процессе итерации добавлять новые дополнительные ограничения к уже найденному промежуточному решению. Это важное свойство будет использовано при решении задачи целочисленного программирования.

   Вычислительная схема алгоритма двойственного симплекс – метода похожа на вычислительную схему простого табличного симплекс – метода. Аналогичны и формы таблиц.

Различие между методами:

При табличном симплекс – методе переходят от одного опорного плана прямой задачи к другому, а в двойственном симплекс – методе от одного псевдоплана прямой задачи к другому.

Формальное различие между вычислительными схемами проявляется только в правилах перехода от одного базиса к следующему и от признака оптимального плана и неразрешимости задачи.

В табличном симплекс -методе сначала определяется вектор, вводимый в базис, а затем выводимый из базиса, а в двойственном симплекс – методе - этот порядок меняется.

Пример: Решение задачи линейного программирования двойственным симплекс-методом.

Найти

$$W = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

или в расширенной форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 38; \\ x_1 + x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 7; \\ 4x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 5, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Двойственная задача записывается следующим образом:

$F = \min (38y_1 + 7y_2 + 5y_3)$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2y_1 + 1y_2 + 4y_3 \geqslant 1 & (A_1); \\ 11y_1 + 1y_2 - 5y_3 \geqslant 1 & (A_2); \\ y_1 \geqslant 0 & (A_3); \\ y_2 \geqslant 0 & (A_4); \\ y_3 \geqslant 0 & (A_5). \end{cases}$$

Выбираем в качестве базиса векторы $\{A_1, A_3, A_5\}$. Тогда решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2y_1 + 1y_2 + 4y_3 = 1; \\ y_1 = 0; \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

является $y_1 = 0$; $y_2 = 1$; $y_3 = 0$.

Подставив это решение в ограничения (A_2) и (A_4), замечаем, что они также удовлетворяются, а потому $\{A_1, A_3, A_5\}$ - сопряженный базис двойственной задачи.

Находим псевдоплан X^* прямой задачи. Для этого решим систему уравнений:

$X^* = A_1 X^*_1 + A_3 X^*_3 + A_5 X^*_5$

$$\begin{pmatrix} 38 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} X^*_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} X^*_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} X^*_5, \Rightarrow \begin{cases} 38 = 2X^*_1 + X^*_3 \\ 7 = X^*_1 \\ 5 = 4X^*_1 + X^*_5 \end{cases} \Rightarrow$$

Отсюда $X^*_1 = 7$; $X^*_3 = 24$; $X^*_5 = -23$.

Базисное решение $X^*_5 = -23$ с отрицательной компонентой, поэтому этот план не является оптимальным. Определяем направляющую строку. Это строка A_5.

Вычисляем коэффициенты разложения $\{\alpha_{ji}\}$ для небазисных векторов A_2 и A_4 по формуле (7.8):

Таблица 7.1

C			1	1	0	0	0
	B	X	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_1	7	1	1	0	- 1	0
0	A_3	24	0	9	1	-2	- 0
0	A_5	- 23	0	-9	0	-4	1
	Θ	7	0	0	0	1	0
	ρ			0		1/4	

$A_2 = A_1\,\alpha_{12} + A_3\,\alpha_{32} + A_5\,\alpha_{52}$

$$\begin{pmatrix}11\\1\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\alpha_{12} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\alpha_{32} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\alpha_{52}$$

и находим $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{32} = 9$, $\alpha_{52} = -9$.

$A_4 = A_1\,\alpha_{14} + A_3\,\alpha_{34} + A_5\,\alpha_{54}$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\alpha_{14} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\alpha_{34} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\alpha_{54}$$

и находим $\alpha_{14} = 1$, $\alpha_{34} = -2$, $\alpha_{54} = -4$.

Так как для X^*_5 есть $\alpha_{52}, \alpha_{54} < 0$, то значит псевдоплан можно улучшить.

Заполним симплекс – таблицу 7.1

$$\Theta_0 = \sum_{j \in I_б} C_j x^*_j = 1 * 7 + 0 * 24 + 0 * (-23).$$

Находим направляющий столбец, для чего заполняем строку ρ.

$$\rho_i = \min_{e \notin I_б} \{\rho_e\} = \min_{e \notin I_б} \left\{-\frac{\Theta 2}{\alpha 52};\ -\ \frac{\Theta 4}{\alpha 54}\right\} = \min_{e \notin I_б}\left\{-\frac{0}{-9};\ -\ \frac{1}{-4}\right\}$$

$$= \min_{e \notin I_б} \{0;\ 1/4\} = 0,$$ => направляющий элемент $\alpha_{52} = -9$.

Направляющий столбец A_2, так как $\rho_2 = 0 < \rho_4 = 1/4$.

Выполним симплекс преобразования и заполним таблицу 7.2

Таблица 7.2

C			1	1	0	0	0
	B	X	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_1	40/9	1	0	0	5/9	1/9
0	A_3	1	0	0	1	- 6	1
1	A_2	23/9	0	1	0	4/9	- 1/9
	Θ	7	0	0	0	1	0

Так как все базисные компоненты $X^*_j \geq 0$, $j \in I_б$, то найдём оптимальный план:

$X_{10} = 40/9$; $X_{20} = 23/9$; $X_{30} = 1$ для расширенной задачи, а для исходной прямой задачи;

$X_{10} = 40/9$; $X_{20} = 23/9$, $W_{max} = 40/9 + 23/9 = 7$.

Оптимальное решение двойственной задачи:

$y_{0j} = \Theta^{п}_{n+j}$; $j = \overline{1, m}$.

n = 2, m = 3.

$y_{01} = \Theta^{п}_{2+1} = \Theta^{п}_{3} = 0$,

$y_{02} = \Theta^{п}_{2+2} = \Theta^{п}_{4} = 1$,

$y_{03} = \Theta^{п}_{2+3} = \Theta^{п}_{5} = 0$,

F= 38 * 0 + 7 * 1 + 5 * 0 = 7.

Лекции № 8

Транспортная задача. Постановка задачи. Опорные планы транспортной задачи. Метод вычёркивания. Нахождение начальных опорных планов (метод северо-западного угла; метод минимального элемента).

Первая строгая постановка транспортной задачи (Т – задача) принадлежит американцу Ф. Хичкоку в 1941 году.

Первый точный метод решения Т – задачи разработан советскими учёными А. В. Канторовичем и М. К. Гавуриным.

Т – задача является одной из самых распространенных задач ЛП. К ней сводятся задачи о наилучшем распределении средств, о наиболее выгодном плане перевозок. Специфика математических моделей Т – задачи позволяет наряду с общими методами ЛП применять специальные методы, значительно сокращающие процесс вычисления.

Постановка транспортной задачи по критерию стоимости

Пусть имеются пункты-поставщики:

$\mathbf{A_j}$; $j=\overline{1,m}$

располагающие некоторым однородным продуктом объемом по aj единиц, и пункты потребители

$\mathbf{B_i}$; $i=\overline{1,n}$

с объемом потребления по b_i единиц.

Задана матрица $\mathbf{C=\{C_{ji}\}}$ - матрица тарифов или транспортных издержек, где

$\mathbf{C_{ji}}$- стоимость перевозки единицы продукции от j поставщика i - му потребителю.

Возникает задача определения плана перевозок

$\mathbf{X=\{x_{ji}\}}$,

(где x_{ji}-количество единиц продукции, поставляемой из пункта Aj в Bi)

такого, что запросы всех потребителей будут полностью удовлетворены, то есть весь продукт от поставщиков вывезен и суммарные транспортные издержки будут минимальны (min).

Условия этой задачи удобно представить в виде таблицы 8.1.

Таблица 8.1

		Объем потребления						
	a_j\ b_i	b_1	b_2	…………	b_i	………..…..	b_n
Объем производства	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…………	c_{1i} x_{1i}	……….….	c_{1n} x_{1n}
	a_2	c_{21} x_{21}	…………....	…………	c_{2i} x_{2i}	……….....	c_{2n} x_{2n}
	… ….	………….	………….	…………	…………	…………	…………
	a_j	c_{j1} x_{j1}	………….	…………	c_{ji} x_{ji}	…………	c_{jn} x_{jn}
	… ….	…………	………….	…………		…………	
	a_m	c_{m1} x_{m1}	………….	…………	c_{mi} x_{mi}	…………	c_{mn} x_{mn}

Построим математическую модель задачи.

Функция цели – минимизация суммарных затрат на перевозку продукции:

$$W=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ji}x_{ji} \rightarrow \min \qquad (8.1)$$

Ограничения:

1) на запасы продукции у поставщиков, которые по условию задачи должны быть полностью вывезены:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ji} = a_j,\ j=\overline{1,m} \qquad (8.2)$$

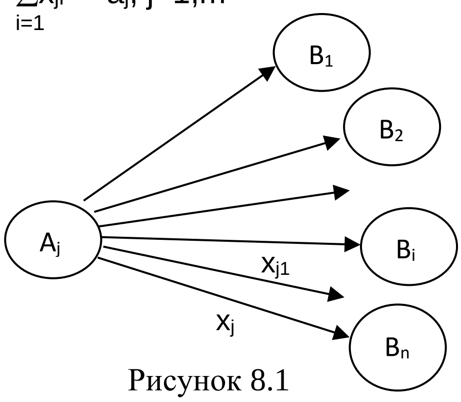


Рисунок 8.1

2) на запросы потребителей, которые по условию задачи должны быть полностью удовлетворены:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ji} = b_i,\ i=\overline{1,n} \qquad (8.3)$$

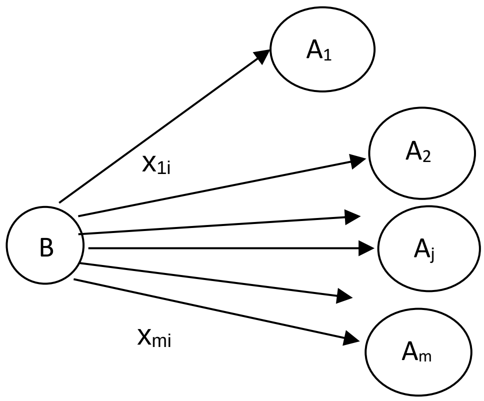


Рисунок 8.2

3) условие неотрицательности, исключающее обратные перевозки

$$x_{ji} \geq 0 \qquad \forall\ j,\ i \qquad (8.4)$$

На практике существуют задачи, в которых выполняются равенство между суммарными ресурсами (запасами) и суммарными потребностями (условие баланса)

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad (8.5)$$

(объем производства равен объему потребления), так задачи, в которых объем производства не равен объему потребления:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \neq \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad (8.6)$$

Задача (8.1) ÷ (8.4) при условии (8.5) называется **закрытой моделью**, а при условии (8.6) – **открытой**.

Теорема: Любая транспортная задача, у которой суммарный объем запаса совпадает с суммарным объемом потребления, имеет решение.

Таким образом, условие (8.5) является необходимым и достаточным условием совместимости (8.2) и (8.3) и, следовательно, разрешимости задачи.

Открытая модель должна быть сведена к закрытой транспортной модели.

При

$$\sum_{j=1}^{m} a_j > \sum_{i=1}^{n} b_i$$

(запасы поставщиков превышают потребности потребителей) вводят дополнительный (фиктивный) пункт потребления, запросы которого равны излишку запаса

$$b_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} a_j - \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad (8.7)$$

При

$$\sum_{j=1}^{m} a_j < \sum_{i=1}^{n} b_i$$

(запросы больше запасов) вводится дополнительный (фиктивный) пункт производства, запасы которого считают равными недостающей продукции:

$$a_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{j=1}^{m} a_i \qquad (8.8)$$

В обоих случаях при выполнении условия (8.7) или (8.8) получим расширенную закрытую модель.

Матрицу $X=\{x_{ji}\}$, удовлетворяющую условию (8.2)÷(8.5), называют допустимым планом перевозок, а x_{ji} – **допустимыми перевозками.**

Допустимый план X, доставляющий W (формула (8.1)) минимальное значение, называется **оптимальным** X_0.

Матрица $C=\{c_{ji}\}$ называется **матрицей тарифов** или матрицей транспортных издержек.

Оптимальный план расширенной закрытой модели дает оптимальный план исходной задачи. В случае введения фиктивного потребителя (8.7) поставщики $x_{j,n+1}$ в оптимальном плане расширенной задачи покажут остатки продукции на складах поставщиков. Тарифы $C_{j,n+1}$ считаются равными нулю.

В случае введения фиктивного поставщика (8.8) поставки $x_{m+1,i}$ в оптимальном плане расширенной задачи покажут объемы недостачи продукции.

Т – задача может быть изображена графически (рисунок 8.3).

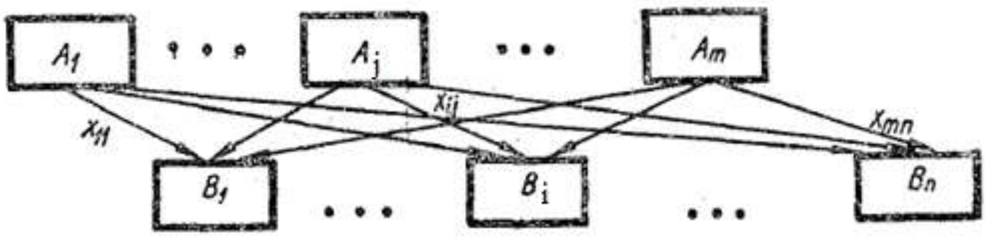


Рисунок 8.3

Отрезок, соединяющего j – го поставщика с i – тым потребителем, называется **коммуникацией (**j, i) или (A_j, A_i). Если на всех коммуникациях **(**j, i) проставлены величины перевозок x_{ji}**,** то получим транспортную сеть.

Структура системы ограничений Т – задачи

Модель Т – задачи – это модель ЛП с (m x n) числом переменных x_{ji} и m + n числом ограничений – равенств (8.2) и (8.3).

Оптимальный план Т – задачи всегда можно найти симплекс – методом. Однако, матрица системы ограничений (8.2) и (8.3) специфична:

1) коэффициенты при неизвестных во всех ограничениях = 1;
2) каждая неизвестная величина встречается в 2-х и только в 2-х уравнениях (1 раз в системе (8.2), другой раз – в системе (8.3).

   Благодаря этой специфике общую процедуру симплекс – метода можно упростить;
3) в теории ЛП доказывается, что невырожденный опорный план задачи ЛП должен содержать r, отличных от нуля, компонент, где r – ранг системы ограничений. В системе уравнений ограничений, закрытой Т – задачи имеется m + n – 1 линейно – независимых уравнений, то есть ранг системы ограничений (8.2) и (8.3) равен m + n – 1.

Опорный план Т – задачи. Проверка плана X на опорность

Опр. **Опорным планом Т – задачи** называют любое её допустимое базисное решение.

Если условие Т – задачи и её опорный план записаны в виде таблице, то клетки, в которых находятся отличные от нуля перевозки x_{ji}, называются занятыми, а остальные – незанятые.

Занятые клетки соответствуют базисным переменным, а незанятые – свободным переменным.

Для невырожденного опорного плана количество базисных клеток равно m + n – 1, так как ранг матрицы системы ограничений Т – задачи равен m + n – 1.

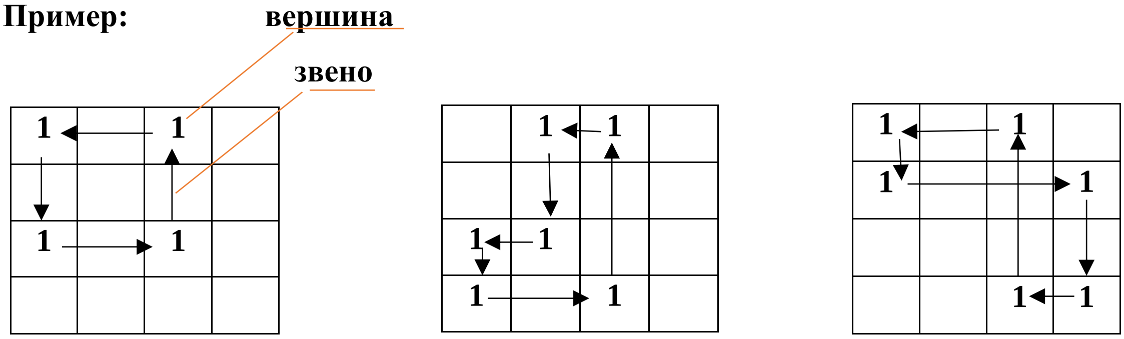
Опр. **Циклом** в матрице называется непрерывная ломанная линия, вершины которого находятся в занятых клетках матрицы, звенья расположены вдоль строк и столбцов. Причем в каждой вершине цикла встречаются ровно 2 звена: одно из них располагается по столбцу, другое по строке.

Если цикл образует самопересекающаяся ломанная линия, то точка её самопересечения вершин не образует.

Построение цикла начинают с какой-то занятой клетки и переходят по строке или по столбцу к другой занятой клетки, здесь делают поворот под прямым углом и движутся к следующей занятой клетке, пытаясь вернуться к начальной.

Если такой возврат возможен, то получен цикл.

Пример:



Свойство циклов в матрице Т – задачи

1. Число вершин в каждом цикле четно.
2. Выберем в качестве начальной вершины произвольную вершину цикла и припишем ей знак “+”. Обходя цикл в любом направлении, будем в его вершинах попеременно проставлять знаки + и -. Получим означенный цикл. В означенном цикле число положительных вершин равно числу отрицательных.
3. Пусть в матрице, состоящей из m строк и n столбцов, произвольно отмечено m + n клеток ($m + n \leq m * n$), тогда существует цикл, вершины которого лежат в отмеченных клетках (может быть не во всех).

   Пример: m = 2, n = 4, m + n = 6, число занятых клеток равно 6, тогда существует цикл.

1	1	1	1
	1	1	

Число занятых клеток равно 5 (m + n -1 = 2 + 3 - 1), цикл построить нельзя:

1		1	
	1	1	1

4. На заполненных клетках опорного плана нельзя построить цикл, то есть опорный план называют А-цикличным.

   Вывод: если заполненным (m + n -1) клеткам опорного плана присоединить ещё одну любую клетку, то для такого количества клеток можно построить цикл, причём единственным образом.

   Итак, можно проверить, является ли план X опорным, определяя имеется ли в нём цикл. При большом размере матрицы X визуальное отыскание замкнутых цепочек в ней представляет значительные трудности. В таком случае прибегают к методу вычеркиванию.

Метод вычеркивания

Он позволяет выделить в произвольном плане X Т – задачи цикл, если он существует.

Суть: обозначим в плане X некоторое множество ненулевых элементов буквой S. Надо выяснить существуют ли в данном множестве S цикл. Для этого просматривают одну за другой строки плана X и вычеркивают нулевые строки (не заполненные) и строки, содержащие только один элемент S.

Просмотрев все строки плана X, также просматривают и столбцы, вычеркивая те. Которые содержат не более одного элемента S. При этом ранее вычеркнутые элементы в расчет не принимаются.

Затем процесс повторяется, просматривая сначала строки, а затем столбцы, оставшиеся после первого вычеркивания под матрицей.

После конечного числа шагов процесс заканчивается одним из 2-х исходов:

1) все строки (столбцы) вычеркнуты. Это значит, что из элементов S нельзя составить цикл;
2) полученная подматрица, в каждой строке (столбце) которой содержатся не менее 2-х элементов.

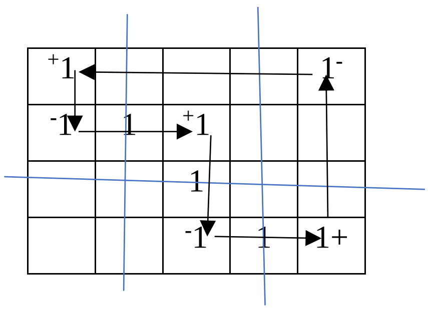
   В этом случае множество S содержит циклы из не вычеркнутых элементов S.

   Изобразим 2 плана Т – задачи. Занятые клетки пометим 1.

. 1) А-цикличный план

1				
	1	1		
		1		
		1	1	1
				1
				1

2) Не опорный план



Метод северо-западного угла

Рассмотрим идею метода на примере.

Дана транспортная задача с четырьмя пунктами производства с объемами производства $\{a_j\}$ $\{1,2,3,4\}$ и четырьмя пунктами потребления с объемами потребления $\{b_i\}$ $\{5,1,2,2\}$. Построим матрицу транспортной задачи.

					a_j						
	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0
$X_н$ =	2	1	0	0	3	3	3	1	0	0	0
	0	0	2	2	4	4	4	4	4	2	0
bi	5	1	2	2							
	4	1	2	2							
	2	1	2	2							
	0	1	2	2							
	0	0	2	2							
	0	0	0	2							
	0	0	0	0							

Для удобства вычисления в столбцах справа будем записывать остатки не вывезенного продукта, а в строках неудовлетворенные потребности. Заполнение таблицы начинают с левого верхнего угла.

Сравнив a_j=1 и b_1=5, выбираем меньшее из них и получаем x_{11} =1. Так как выбор произведен по строке, то остальная часть левой строки должна быть заполнена 0 (из данного пункта больше ничего вывезти нельзя).

Во вспомогательном столбце записываются остатки не вывезенного продукта. a_{ji}=0. Во вспомогательной строке не удовлетворенные потребности после одного шага заполнения. Переходим ко второй строке и начинаем заполнение со строки x_{21}: $a_2^{(1)}$=2; $b_1^{(1)}$=4, выбираем меньшее из них. Поэтому x_{21}=2. Остальную часть второй строки заполняем нулями. И так далее.

Алгоритм метода северо-западного угла

1. Определим верхний левый элемент матрицы X.

   $x_{11} = \min(a_1, b_1)$

   Возможны три случая:

   a) если $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$ и вся первая строка, начиная со второго элемента, заполняется нулями. Больше ничего из пункта A_1 вывезти нельзя.
   b) если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$, а все оставшиеся элементы первого столбца заполняются нулями. В пункт B_1, больше ничего привозить не нужно.
   c) если $a_1 = b_1$, то $x_{11} = a_1 = b_1$, а все оставшиеся элементы первого столбца и первой строки заполняются нулями.

   На этом первый шаг метода заканчивается.

2. Пусть проделано k шагов.

   k+1 шаг состоит в следующем: определяют верхний левый элемент незаполненной верхней части матрицы X.

   Пусть этот элемент $\mathbf{x_{\lambda\mu}}$ **$(\lambda+\mu=k+2)$, $k=0,1,2\ldots$,** причем $\mathbf{x_{\lambda\mu} = \min\{a_\lambda^{(k)}, b_\mu^{(k)}\}}$, где

   $$a_\lambda^{(k)} = a_\lambda - \sum_{i=1}^{m} x_{\lambda i}$$

   $$b_\mu^{(k)} = b_\mu - \sum_{j=1}^{\lambda-1} x_{j\mu}$$

   Если $\mathbf{a_\lambda^{(k)} \le b_\mu^{(k)}}$, то заполняем нулями строки $\boldsymbol{\lambda}$, начиная с $\boldsymbol{\mu+1}$ элемента. В противном случае заполняют нулями оставшуюся часть μ-го столбца. Метод северо-западного угла хорошо реализуется на ЭВМ.

Число итераций для получения оптимального решения транспортной задачи существенно зависит от начального плана, так как при использовании метода северо-западного угла не учитываются стоимости перевозок, то есть сам начальный план в общем случае будет далек от оптимального. Поэтому при решении задачи вручную, целесообразнее применять другие методы, основанные на учете стоимости.

Метод минимального элемента

Он позволяет построит начальный опорный план транспортной задачи и является вариантом метода северо-западного угла, учитывающий специфику матрицы тарифов C={cji}.

В отличие от метода северо-западного угла данный метод позволяет сразу получить достаточно экономичный план, сокращая общее количество итераций по его оптимизации.

Алгоритм метода минимального элемента

Элементы матрицы C нумеруют, начиная с минимального в порядке возрастания, и затем в этом же порядке заполняется матрица X, используя метод северо-западного угла.

Пример:

Дано: Матрица тарифов (смотри таблицу). Объёмы производства a_j и объёмы потребления b_i.

Нумеруем матрицу тарифов (затемненные прямоугольники).

A_j \ B_i	1	2	3	4	B_i / a_j
1	10 7	11 8	7 5	5 3	11
2	3 2	6 4	8 5	12 9	11
3	9 6	4 3	1 1	2 2	8
A_j / b_i	5	9	9	7	b_i \ a_j

Проверяем условие баланса

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = 11+11+8 = 30,$$

$$\sum_{i=1}^{4} b_i = 5+9+9+7 = 30.$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = \sum_{i=1}^{4} b_i$$

поэтому задача разрешима.

Заполняется матрица $X_н$ (начальный опорный план).

					a_j			
	10 0	11 3	7 1	5 7	11	4	3	0
$X_н$ =	3 5	6 6	8 0	12 0	11	6	0	0
	9 0	4 0	1 8	2 0	8	0	0	0
b_i	5	9	9	7				
	0	3	1	7				
	0	0	0	0				

В результате получаем следующий начальный опорный план:

$$X_H = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Соответствующее значение целевой функции:

$$W(X_H) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} c_{ji}\, x_{ji} = 3*8+1*5+7*3+5*2+6*4+8*1 = 92$$

Пример 2:

Найти опорный план двумя методами:

$$\begin{array}{cc} & a_j \\ C= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{array}{c} 40 \\ 30 \\ 20 \end{array} \\ b_i \;\; 30 \;\; 25 \;\; 18 \;\; 20 & \end{array}$$

где С - матрица тарифов

a_j $(j = \overline{1, 3})$ - объём производства j – го предприятия,

b_j $(j = \overline{1, 4})$ - объём потребления i-го предприятия.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте транспортную задачу ЛП и напишите ее математическую модель.
2. Сформулируйте теорему о существовании решения транспортной задачи.
3. Какие существуют методы построения начального опорного плана и постройте опорный план с помощью этих методов?
4. Сколько положительных перевозок должен содержать невырожденный опорный план и почему?
5. В чем заключается опорность плана транспортной задачи, условия которой записаны в виде таблицы?
6. Какая модель транспортной задачи называется закрытой, а какая – открытой?
7. Как открытую модель преобразовать в закрытую?
8. Для решения каких экономических задач применяется транспортная задача?

Лекция № 9

Специальные методы решения Т – задачи. Метод потенциалов. Пример.

Специальные методы решения Т – задачи

Можно разбить на две группы:

1) Методы последовательного улучшения опорного плана;
2) Методы последовательного сокращения неувязок.

К 1-ой группе относятся: распределительный метод. Метод потенциалов и его модификации. Суть этих методов состоит в том. Что сначала определяется начальный опорный план и затем от итерации к итерации он улучшается, пока через конечное число итераций не будет получен оптимальный план.

Ко 2-ой группе относятся: методы дифференциальных рент, разрешающих слагаемых, венгерский метод. Здесь в начале устанавливается наилучший (в смысле затрат) план, но не допустимый (так называемый условно оптимальный план). Затем от итерации к итерации он из условно оптимального переводится к оптимальному.

Метод потенциалов

Метод потенциалов является наиболее эффективным методом 1 – й группы специальных методов решения Т – задачи.

Впервые предложен советскими учеными Канторовичем и Гавуриным в 1949 г. За рубежом получил название модифицированного распределительного метода.

Идея метода состоит в следующем. Сначала строится начальный опорный план одним из методов, изложенных в предыдущей лекции, а затем осуществляется его улучшение, пока не будет удовлетворяться признак оптимального плана.

Алгоритм метода потенциалов решения транспортной задачи состоит из предварительного этапа и конечного числа итераций.

На предварительном этапе строят начальный опорный план Хо. Затем для этого плана рассчитывают оценочную матрицу

$$D_н = || C_{ji} - (V_i - U_j) ||_{mxn}, \qquad (9.1)$$

где V_j и U_j – потенциалы пунктов отправления A_j и пунктов назначения B_j.

Предварительные потенциалы выбирают таким образом, чтобы для связанных коммуникациями пар пунктов, для которых в плане Xo, $x_{ji} \neq 0$, разность потенциалов была равна cij:

$$V_i - U_j = C_{ji} \qquad (9.2)$$

Если матрица Do не содержит отрицательных элементов, то Xo – оптимальный план. В противном случае Xo - неоптимальный план и его можно улучшить.

Описание алгоритма метода потенциалов

Предварительный этап

1. Определяем начальный опорный план Xн одним из описанных способов.
2. Строим схему основных коммуникаций, согласно найденного начального опорного плана Xн.
3. Находим предварительные потенциалы Uj пункта отправления Aj, $j = \overline{1, m}$ и потенциалы Vi пунктов получения Bi, $i = \overline{1, n}$, так как на выполнение условия оптимальности плана влияет лишь разности

   $V_i - U_j$,

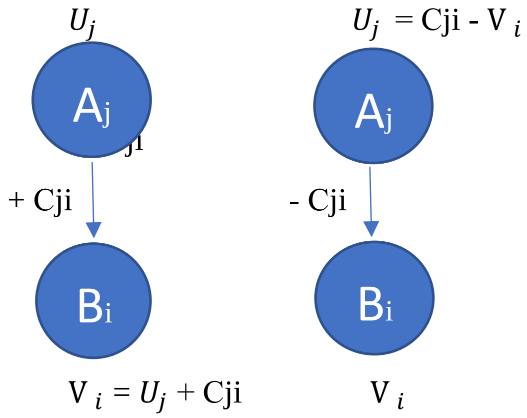
   То за начало отсчета (0) можно принять потенциал любого пункта. Обычно полагают $U_1^{(н)} = 0$. Можно вычислить систему потенциалов Vi относительно пункта A_1.

   Так как матрица тарифов задана, то

   $V_i - U_j = C_{ji}$,

   $V_i = C_{ji} + U_j$,

   $U_j = C_{ji} - V_i$.



4. Для определения потоков всех потоков вычисляем элементы оценочной матрицы D:

   $$D_н = \{d_{ji}\} = \{C_{ji} - (V_i - U_j)\} = \{C_{ji} - V_i + U_j\} \qquad (9.3)$$

   Позиции матрицы Dн, отвечающие базисным (занятым клеткам) должны быть равны 0.
5. Вычисляем целевую функцию:

   $$W_k = \sum_j \sum_i C_{ji} X_{ji} \qquad (9.4)$$

6. Проверить выполнимость условия оптимальности.

Если матрица Dн не содержит элементов меньше 0, то Xн оптимальный план, процедура заканчивается. В противном случае: Xн не оптимален и его улучшают, переходя к однотипным итерациям.

(k+1)-я итерация: каждая итерация состоит из 2-х этапов.

Пусть уже проведено к – итераций, где к = 1, 2, …, в результате которых получен план Xк и оценочная матрица Dк. Цель к + 1 итерации построить более экономичный план X к+1 и матрицу Dк+1.

I этап: Улучшаем план Xк

1. Выбираем наибольший по модулю отрицательный элемент оценочной матрицы $\Delta к = d_{pq}^{(k)}$ и, начиная с соответствующего ему элемента $x_{pq}^{(к)}$. Отметим элемент $x_{pq}^{(к)}$ в матрице $X^{(k)}$ знаком « + ». Теперь клетка, занятая элементом $x_{pq}^{(к)}$) и называется перспективной, считается занятой. Это значит, $x_{pq}^{(к)}$ вводится в базис.

   В результате число занятых клеток станет равно m + n. Для такого количества клеток можно построить цикл, причём единственный.
2. Строим замкнутую цепочку, применив метод вычеркивания, в которую входят элементы $x_{ij}^{(k)} \neq 0$, замкнув её на элементе $x_{pq}^{(к)}$. Элементы цепочки чередуя обозначим « + » и « – », начиная с $x_{pq}^{(к)}$.
3. Затем определяем θк - минимальный элемент среди всех нечетных по порядку расположения в цепочке или помеченные знаком « – ».

   $$\theta к = \min \{\overline{Xji}^{(k)}\}, \qquad (9.4)$$

   где $\overline{Xji}^{(k)}$ – это нечетный элемент цепочки.

   Соответствующая элементу θк клетка будет выведена из числа занятых. В симплекс – методе это соответствует выводу переменных из базиса.

4. Строим новый план $X^{(k+1)}$, прибавляя θк по всем четным элементам цепочки, помеченные знаком « + », и вычитая из нечетных, помеченные знаком « – ». Элементы матрицы $X^{(k)}$, не входящие в цепочку, переносятся в матрицу $X^{(k+1)}$ без изменения.

   Таким образом,

$$X_{ji}^{(к+1)} = \begin{cases} X_{ji}^{(к)}, \text{ для клеток, не входящих в цикл,} \\ X_{ji}^{(к)} + \theta к, \text{ для клеток } x_{pq}^{(к)}, \text{ входящих в цикл и помеченных знаком « + »,} \\ X_{ji}^{(к)} - \theta к, \text{ для клеток } x_{pq}^{(к)}, \text{ входящих в цикл и помеченных знаком « - ».} \end{cases}$$

Всего занятых клеток в новом плане $Xк_{+1}$ будет $m + n - 1$, то есть план $Xк_{+1}$ будет ацикличным и, следовательно опорным.

5. Вычисляем значение целевой функции Wk_{+1}, соответствующей плану $Xк_{+1}$:

$$Wk_{+1} = Wk + \theta к * \Delta к, \tag{9.5}$$

где Wk – величина транспортных издержек, соответствующих плану Хк.

Так как $\theta к \geq 0$, $\Delta к \leq 0$, то $Wk_{+1} \leq Wk$, то есть план $Xк_{+1}$ является улучшенным опорным планом.

6. Контроль вычислений:

$$Wk_{+1} = \sum_j \sum_i Cji\ X_{ji}^{(к+1)}.$$

II этап: Строим матрицу $D^{(k+1)}$

1. С помощью эквивалентных преобразований матрицы $D^{(k)}$ находим оценочную матрицу $D^{(k+1)}$ для нового плана $X^{(k+1)}$. Для этого подчеркиваем в матрице $D^{(k)}$ все элементы, соответствующие ненулевым элементам матрицы $X^{(k+1)}$ (они обязательно равны нулю в матрице $D^{(k)}$).
2. Находим минимальный отрицательный элемент матрицы $D^{(k):}$

   $\Delta к = dpq^{(k)}$.
3. В матрице $D^{(k)}$ зачеркиваем строку, содержащую элемент $\Delta к = dpq$. Если в этой строке имеются подчеркнутые элементы, то зачеркиваем соответствующие этим элементам столбцы. Если в каждом зачеркнутом столбце имеются подчеркнутые элементы, зачеркиваем соответствующие им строки, и так до тех пор, пока описанная процедура выполнима.
4. Строим матрицу $D^{(k+1)}$. Для этого величину $|\Delta к|$ прибавляем к элементам всех вычеркнутых строк, а от элементов вычеркнутых столбцов вычитаем $|\Delta к|$. Получаем новую оценочную матрицу.
5. Проверяем выполнимость условия оптимальности. Если в матрице $D^{(k+1)}$ нет отрицательных элементов, то план $X^{(k+1)}$ – оптимальный, иначе переходим к следующей итерации.

Примечания

1. Целочисленность опорного плана. При любых целых значениях a_j и b_i Т – задачи. Имеем целочисленный оптимальный план независимо от коэффициентов линейной функции цели Cji.
2. Общее число опорных планов Т – задачи не превосходит число сочетаний $C_{m\ n}^{m\ +\ n\ -1}$, а так как m и n – конечные числа. То и число опорных планов конечно. Число шагов значительно сокращается в следствие монотонности метода потенциалов.

Пример.

Дано: Т – задача, где С – матрица тарифов, a_j – объёмы производства, b_i – объёмы потребления

					a_j
	7	8	5	3	11
C =	2	4	5	9	11
	6	3	1	2	8
b_i	5	9	9	7	

Определить оптимальный план Т- задачи.

Решение:

Так как условия баланса выполняется

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = \sum_{i=1}^{4} b_i = 30,$$

то задача разрешима.

Предварительный этап

1. определяем начальный опорный план с помощью метода северо-западного угла:

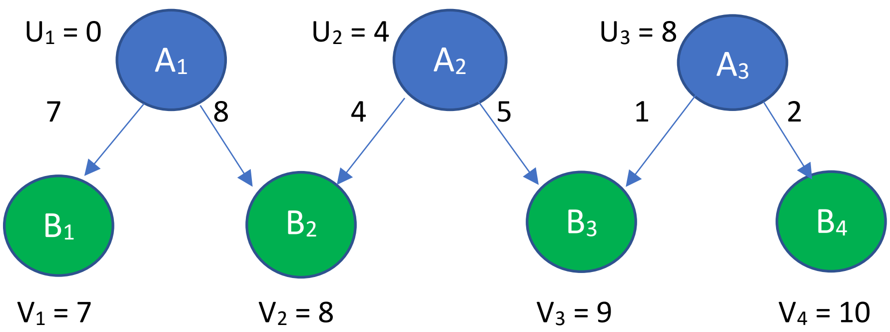
a_j

	5	6	0	0	11	6	0			
Xн =	0	3	8	0	11	11	8	0		
	0	0	1	7	8	8	8	8	7	0
b_i	5	9	9	7						
	0	9	9	7						
	0	3	9	7						
		0	9	7						
			1	7						
			0	7						
				0						

Таким образом, опорный план является невырожденным, так как число занятых клеток равно 6 и rang A = m + n – 1 = 6.

Xн =	5	6	0	0
	0	3	8	0
	0	0	1	7

2. Строим схему основных коммуникаций.



3. Находим предварительные потенциалы: $Vi^{(н)} = Cji + Uj^{(н)}$; $Uj^{(н)} = Cji - Vi^{(н)}$.

   $U_1^{н} = 0$; $V_1^{н} = U_1^{н} + 7 = 7$; $V_2^{н} = U_1^{н} + 8 = 8$; $U_2^{н} = V_2^{н} - 4 = 8 - 4 = 4$;

   $V_3^{н} = U_2^{н} + 5 = 4 + 5 = 9$; $U_3^{н} = V_3^{н} - 1 = 9 - 1 = 8$; $V_4^{н} = U_3^{н} + 2 = 10$.

4. Определяем элементы оценочной матрицы по формуле (9.3)

   $Dн = \{dji\} = \{Cji - (V_i^{(н)} - U_j^{(н)})\} = \{Cji - V_i^{(н)} + U_j^{(н)}\}$:

   $d_{11} = C_{11} - V_1^{(н)} + U_1^{(н)} = 7 - 7 + 0 = 0$;

$d_{12} = C_{12} – V_2^{(н)} + U_1^{(н)} = 8 – 8 + 0 = 0;$

$d_{13} = C_{13} – V_3^{(н)} + U_1^{(н)} = 5 – 9 + 0 = - 4;$

$d_{14} = C_{14} – V_4^{(н)} + U_1^{(н)} = 3 – 10 + 0 = - 7;$

$d_{21} = C_{21} – V_1^{(н)} + U_2^{(н)} = 2 – 7 + 4 = - 1;$

и т. д.

Dн =

0	0	-4	-7
-1	0	0	3
7	3	0	0

Δн = - 7

5. Вычисляем целевую функцию:

$$W(X_н) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} c_{ji}\, x_{ji} = 7*5+8*6+4*3+5*8+1*1+2*7 = 150.$$

6. Проверяем условие оптимальности: план не оптимален, так как содержатся элементы меньше 0.

1 **– я итерация**

I этап: Улучшаем план Xн

1. Выбираем наименьший отрицательный элемент оценочной матрицы $d14^{(н)} = -7$ и, начиная с соответствующего ему элемента $X_{14}^{(н)}$**.**

2. Строим замкнутую цепочку

Xн =

5	6^-	0	0^+
0	3^+	8^-	0
0	0	1^+	7^-

3. Определяем θн - минимальный элемент среди всех помеченные знаком « – »:

$θн = \min \{\overline{Xji^{(н)}}\} = \min \{6^-; 8^-; 7^-\} = 6.$

4. Строим новый план X_1, прибавляя θн по всем четным элементам цепочки, помеченные знаком « + », и вычитая из нечетных, помеченные знаком « – ».

X_1 =

5	0	0	6
0	9	2	0
0	0	7	1

C =

7	8	5	3
2	4	5	9
6	3	1	2

5. Вычисляем значение целевой функции W_1, соответствующей плану X_1:

   $W_1 = W_н + \theta_н * \Delta_н = 150 – 6*7 = 108.$

6. Контроль вычислений:

   $W_1 = \sum_j \sum_i Cji\ X_{ji}^{(1)} = 5*7 + 6*3 + 9*4 + 2*5 + 7*1 + 1*2 = 108.$

II этап: Преобразуем матрицу $D_н$ в D_1

1. Подчеркиваем в матрице $D_н$ все элементы, соответствующие ненулевым элементам матрицы X_1 (они обязательно равны нулю в матрице D_1).

2. Находим минимальный отрицательный элемент матрицы D_1:

$\Delta_н = d14^{(н)} = - 7.$

3. В матрице D_1 зачеркиваем строку, содержащую элемент $\Delta_н$ = d14. Если в этой строке имеются подчеркнутые элементы, то зачеркиваем соответствующие этим элементам столбцы. Если в каждом зачеркнутом столбце имеются подчеркнутые элементы, зачеркиваем соответствующие им строки, и так до тех пор, пока описанная процедура выполнима.

$D_н$ =

$\overline{0}$	0	-4	-7	+|-7|
-1	$\overline{0}$	$\overline{0}$	3	
7	3	$\overline{0}$	$\overline{0}$	
- |-7|				

4. Строим матрицу D_1. Для этого величину $|\Delta н|$ прибавляем к элементам всех вычеркнутых строк, а от элементов вычеркнутых столбцов вычитаем $|\Delta н|$. Получаем новую оценочную матрицу.

D_1 =

0	7	3	0
-8	0	0	3
0	3	0	0

$\Delta_1 = -8$

5. Проверяем выполнимость условия оптимальности. В матрице D_1 есть отрицательный элемент, то план X_1 – неоптимальный, переходим к улучшению плана, следующей итерации.

2– я итерация. Улучшаем план X_1

X_1 =

5^-	0	0	6^+
0^+	9	2^-	0
0	0	7^+	1^-

$\theta_1 = \min \{\overline{Xji}^{(1)}\} = \min \{5^-; 2^-; 1^-\} = 1.$

X_2 =

4^-	0	0	7
1	9	1	0
0	0	8	0

C =

7	8	5	3
2	4	5	9
6	3	1	2

D_1 =

0	7	3	0	+|-8|
-8	0	0	3	+|-8|
0	3	0	0	
		- |-8|	- |-8|	

$\Delta_2 = -5$

$D_2 =$

0	- 1	- 5	0
0	0	0	11
8	3	0	8

$W_2 = W1 + \theta_1 * \Delta_1 = 108 - 8*1 = 100.$

Контроль вычислений:

$$W_2 = \sum_j \sum_i Cji\ X_{ji}^{(2)} = 28 + 21 + 2 + 36 + 5 + 8 = 100.$$

3– я итерация. Улучшаем план X_2

$X_2 =$

4^-	0	0^+	7^-
1^+	9	1^-	0
0	0	8^-	0

$\theta_2 = \min \{\overline{Xji^{(2)}}\} = \min \{4^-; 1^-\} = 1.$

$X_3 =$

3	0	1	7
2	9	0	0
0	0	8	0

$D_2 =$

0	- 1	- 5	0	+|-5|
0	0	0	11	+|-5|
8	3	0	8	
- |-5|	- |-5|		- |-5|	

$\Delta_3 = -2$

$D_3 =$

0	- 1	0	0
0	0	5	11
3	- 2	0	3

$W_3 = W_2 + \theta_2 * \Delta_2 = 100 - 1*5 = 95.$

Контроль вычислений:

$$W_3 = \sum_j \sum_i Cji\ X_{ji}^{(3)} = 21 + 5 + 21 + 4 + 36 + 8 = 95.$$

4– я итерация. Улучшаем план X_3

$X_3 =$

3^-	0	1^+	7
2^+	9^-	0	0
0	0^+	8^-	0

$\theta_3 = \min \{\overline{Xji^{(3)}}\} = \min \{3^-; 9^-; 9^-\} = 3.$

$X_4 =$

0	0	4	7
5	6	0	0
0	3	5	0

C =

7	8	5	3
2	4	5	9
6	3	1	2

$D_3 =$

0	- 1	0	0	+|-2|
0	0	5	11	
3	- 2	0	3	+|-2|
		- |-2|	- |-2|	

	2	1	0	0
D_4 =	0	0	3	9
	1	0	0	3

$W_4 = W_3 + \theta_3 {*} \Delta_3 = 95 – 3{*}2 = 89.$

Контроль вычислений:

$$W_4 = \sum_j \sum_i Cji\ X_{ji}^{(4)} = 20 + 21 + 10 + 24 + 9 + 5 = 89.$$

Пример 2: Найти оптимальный план Т - задачи

					a_j
	1^{1}	2^{4}	6^{11}	4^{9}	40
C =	3^{6}	1^{2}	3^{8}	2^{5}	30
	3^{7}	7^{12}	5^{10}	1^{3}	20
bi	30	25	20	20	

При

$$\sum_{j=1}^{m} a_j < \sum_{i=1}^{n} b_i, \text{ так как } \sum_{j=1}^{3} a_j = 40 + 30 + 20 = 90, \quad \sum_{i=1}^{4} b_i = 30 + 25 + 20 + 20 = 95$$

(запросы больше запасов) вводится дополнительный (фиктивный) пункт производства, запасы которого считают равными недостающей продукции, а транспортные издержки равны 0:

$$a_4 = \sum_{i=1}^{4} b_i - \sum_{j=1}^{3} a_i = 5$$

					a_j		
	30^{1}	0^{4}	10^{11}	0^{9}	40	10	0
Xн =	0^{6}	25^{2}	5^{8}	0^{5}	30	5	0
	0^{7}	0^{12}	0^{10}	20^{3}	20	0	
	0^{13}	0^{14}	5^{15}	0^{16}	5	0	
bi	30	25	20	20			
	0	0	15	0			
			5				
			0				

$X_Н$ =

30	0	10	0
0	25	5	ε
0	0	0	20
0	0	5	0

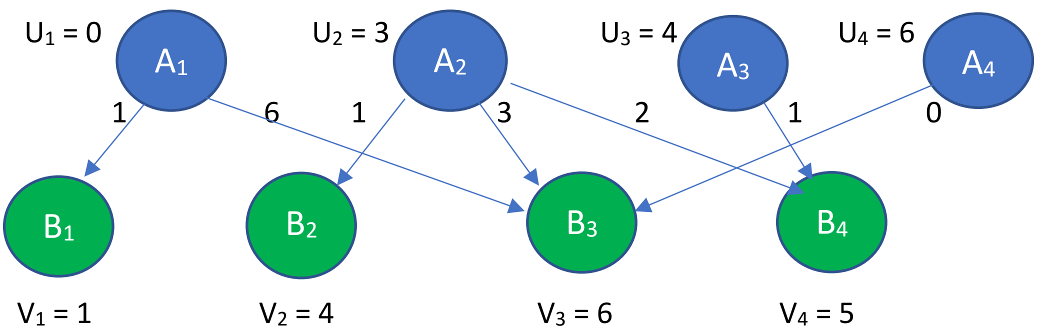
C =

1	2	6	4
3	1	3	2
3	7	5	1
0	0	0	0

Таким образом, опорный план является вырожденным, так как число занятых клеток равно 6 и rang A = m + n – 1 = 7. Так как число занятых клеток должно быть 7, то одну из незанятых клеток X_{24} будем считать занятой, для этого обозначим её через Ɛ.

$$W(X_Н) = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} c_{ji}\, x_{ji} = 1*30+6*10+1*25+3*5+ 2*0+ 1*20+0*5= 150.$$

Строим схему основных коммуникаций.



Uj

$D_Н$ =

0^{1}	-2^{2}	0^{6}	-1^{4}	0
5^{3}	0^{1}	0^{3}	0^{2}	3
6^{3}	7^{7}	3^{5}	0^{1}	4
5	2	0	1	6
1	4	6	5	

V_i

$\Delta_Н$=-2

$X_н$ =

30	0^{+}	10^{-}	0
0	25^{-}	5^{+}	ε
0	0	0	20
0	0	5	0

C =

1	2	6	4
3	1	3	2
3	7	5	1
0	0	0	0

$\theta_н = \min\{\overline{Xji}^{(н)}\} = \min\{10^{-}; 25^{-}\} = 10.$

X_1 =

30	10	0	0
0	15	15	ε
0	0	0	20
0	0	5	0

$D_н$=

0	-2	0	-1	+|-2|
5	0	0	0	
6	7	3	0	
5	2	0	1	
- |-2|				

D_1 =

0	0	2	1
3	0	0	0
4	7	3	0
3	2	0	1

$X_{opt} = X_1$

Wmin = W1 = $W_н + \theta_н * \Delta_н$ = 150 – 2*10 = 130.

Контроль вычислений:

$W_1 = \sum_j \sum_i Cji\, X_{ji}^{(1)}$ = 1*30 + 2*10+ 1*15 + 3*15 +2*0 + 1*20 + 0*5= 130.

Найти опорный план двумя методами:

a_j

Пример:

Найти оптимальное решение опорного плана, найденного методом северо-западного угла и методом минимального элемента, сравнить результаты.

$$
\begin{array}{r|cccc|c}
 & & & & & a_j \\
 & 1 & 2 & 6 & 4 & 40 \\
C= & 3 & 1 & 3 & 2 & 30 \\
 & 5 & 7 & 5 & 1 & 20 \\
b_i & 30 & 25 & 18 & 20 &
\end{array}
$$

где С - матрица тарифов

a_j ($j = \overline{1, 3}$) - объём производства j – го предприятия,

b_j ($j = \overline{1, 4}$) - объём потребления i-го предприятия.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение системе потенциалов, расскажите, как она строится.
2. В каком случае опорный план транспортной задачи является оптимальным?

Лекция № 10

Дискретное программирование. Постановка задачи. Целочисленное программирование. Метод отсекающих плоскостей. Пример.

Дискретное программирование

Многие задачи ИСО из области экономики и управления описываются математическими моделями дискретного программирования (ДсП).

Общая постановка задачи:

Найти

$$W = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \max \qquad (10.1)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_2 \\ \ \ . \ \ . \ \ . \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_m \end{cases} \qquad (10.2)$$

$$\text{и} \quad X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Д \qquad (10.3)$$

Если Д - конечное множество, то (10.3) -у словие дискретности, и данная задача является задачей дискретного программирования. Если вводятся ограничения x_j - целые числа, $j=\overline{1, n}$, то приходят к задаче целочисленного программирования, которая является частным случаем дискретного программирования.

Классификация моделей и методов целочисленного программирования (ЦП)

Различают модели следующих типов:

1. Линейные Т- задачи при целочисленности исходных данных.
2. Задачи с неделимостями (задача о ранце).
3. Модели комбинаторных задач (задача о коммивояжёре), модели с булевыми переменными (модели о назначении).
4. Модели с разрывной целевой функции (модели задач типа Т – задачи с фиксированной доплатой).

Каждый тип модели делится на линейные, нелинейные, статические и динамические и т.д., детерминированные и стохастические.

Наиболее изучен класс задач ЦП детерминированного типа.

Во всех случаях целочисленных задач можно, казалось бы, решить обычными методами при игнорировании условий целочисленности и с последним округлением нецелых переменных. Но такое округление может привести к результату, далекому от оптимального целочисленного. Это связано с тем, что области допустимых решений в задачах ДсП является невыпуклой и несвязной.

Получение целочисленного решения путём округления найденного оптимального плана допустимо, когда значения переменных, образующих оптимальное решение исходной задачи достаточно велики и погрешностями округления, можно пренебречь

В общем случае разработаны специальные методы, которые по принципу подхода к проблеме делятся на три группы.

1. Метод отсекающих плоскостей.
2. Метод ветвей и границ (один из наиболее эффективных методов решения задач комбинаторного типа).
3. Метод случайного поиска и приближенные эвристические методы.

Метод отсекающих плоскостей (метод Гомори)

Пусть надо решить задачу линейного целочисленного программирования.

Найти

$$W = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max \qquad (10.4)$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j \qquad j = \overline{1, m} \qquad (10.5)$$

$$x_i \geq 0,\ x_i - \text{целые числа.} \qquad (10.6)$$

Суть: временно отбросив условие целочисленности, находим оптимальный опорный план. Если он удовлетворяет тем же условиям целочисленности, то данный план искомый. В противном случае надо сформировать дополнительные ограничения, которые заведомо удовлетворят любой целочисленный план, но не удовлетворят найденный оптимальный целочисленный план. Такое ограничение называется **правильным отсечением**.

Пусть X – произвольный план (10.4) ÷ (10.6). Его компоненты определяются уравнением:

$$X_j = b_j - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i \qquad j = \overline{1, m} \tag{10.7}$$

Представим α_{ji} целой и дробной частями:

$$\alpha_{ji} = [\alpha_{ji}] + \gamma_{ji}, \tag{10.8}$$

$$b_j = [b_j] + \gamma_j,$$

где [ ] – целая часть; γ – дробная часть**.**

Подставим (10.8) в (10.7):

$$X_j = b_j - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i = [b_j] + \gamma_j - \sum_{i=1}^{n} [\alpha_{ji}] x_i - \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji} x_i$$

$$X_j - [b_j] + \sum_{i=1}^{n} [\alpha_{ji}] x_i = \gamma_j - \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji} x_i. \tag{10.9}$$

Уравнение (10.9) справедливо для любого плана X.

Пусть X – целочисленный план, тогда учитывая целочисленность уравнения (10.9) левой части, получим, что

$\gamma_j - \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji} x_i$ – целое число и равно $-\xi$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji} x_i = \gamma_j + \xi \tag{10.10}$$

Рассмотрим (10.10). В его левой части $0 \le \gamma_j < 1$, $x_i \ge 0$. Отсюда левая часть не меньше нуля. Предположим, что $\xi \le -1$. Из (10.10) получим, что левая часть стала ≤ 0. Это не подходит по уравнению, поэтому:

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji} x_i - \gamma_j \ge 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji}\, x_i \geq \gamma_j. \tag{10.11}$$

Очевидно, что нецелочисленный план X не удовлетворяет неравенству (10.11). Так как левая часть равна 0, а правая часть $\neq 0, \Longrightarrow$ имеется противоречие. У целочисленного плана левая и правя части равны 0. Поэтому неравенству (10.11) удовлетворяет только целочисленный план, и оно является **правильным отсечением Гомори**.

Полученное неравенство (10.11) добавляют к системе ограничений задачи (10.4) ÷ (10.6). Перейдём от неравенства (10.11) равенству:

$$-\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji}\, x_i + x_{n+1} = -\gamma_j. \tag{10.12}$$

Получим псевдоплан с базисными компонентами:

$$\begin{cases} x_i = b_j, & j = \overline{1, m} \\ x_{n+1} = -\gamma_j. \end{cases}$$

Таблица данного псевдоплана образуется дописыванием к таблице двойственного симплекс – метода, отвечающей найденному плану X, $n+1$ строки с элементами $b_{n+1} = -\gamma_j$;

$$\alpha_{n+1,i} = \begin{cases} -\gamma_{ji}, & i \notin I_б; \\ 0, & i \in I_б,\ i \neq n+1; \\ 1, & i = n+1. \end{cases} \tag{10.13}$$

Одновременно к таблице добавляют единичный вектор-столбец A_{n+1} такой, что

$A_{n+1}^{T} = \{0, 0, \dots, 0, 1\}$.

Полученному псевдоплану применяют двойственный симплекс - метод, отыскивая новый оптимальный план. На 1-ой итерации из базиса обязательно выводят вектор, отвечающий переменной x_{n+1}. Так как в таблице есть только один отрицательный элемент.

Алгоритм метода

Назовем большой итерацией метода отсечений несколько итераций алгоритма двойственного симплекс-метода, приводящего от псевдоплана с дробными компонентами в столбце В к последующей оптимальной таблице. При выполнении большой итерации возможны следующие случаи:

1) получен новый план. В столбце В все $b_j \geq 0$, причем все b_j - целые числа.

   Данный план является искомым (получено оптимальное целочисленное решение);

2) получен новый план. В столбце В все $b_j \geq 0$, но не все b_j - целые числа.

   Признаком отсутствия целочисленного решения служит появление в таблице хотя бы одной строки с дробными коэффициентами b_j и целыми остальными коэффициентами α_{ji}.

   Но если в данной строке j есть дробные числа α_{ji}, то надо сформировать новое правильное отсечение и перейти к очередной итерации.

3) получен некоторый промежуточный псевдоплан. В столбце В имеется элемент $b_j < 0$ такой, что $\alpha_{ji} > 0$ для всех i. Это признак неразрешимости задачи.

Примечание:

1. Двойственный симплекс-метод является основой метода Гомори, так как он позволяет отыскивать оптимальный целочисленный план путём введения дополнительного ограничения не к исходной системе (10.4) ÷ (10.8), а к полученному оптимальному нецелочисленному решению. Чтобы иметь право после формирования правильного отсечения воспользоваться двойственным симплекс – методом, необходимо исходную задачу привести к задаче на максимум.
2. Если в первоначальный базис входили искусственные векторы, то при составлении дополнительного ограничения искусственные переменные надо опустить.
3. Правильное отсечение можно формировать и по индексной строке. Пусть на к- том шаге элементы индексной строки:

   $\Theta_0^{к}, \Theta_1^{к}, \ldots, \Theta_n^{к}$, причём $\Theta_0^{к} = W(x_k)$ – не целое число, то есть

   $\Theta_i = [\Theta_i] + \gamma_{0i}$,

   $\Theta_0 = [\Theta_0] + \gamma_0$.

   Тогда правильное отсечение запишется следующим образом:

$$- \sum_{i=1}^{n} \gamma_{0i} x_i + x_{n+1} = - \gamma_0. \qquad (10.14)$$

4. При определенных условиях можно гарантировать конечность метода отсечения Гомори. Достаточные условия конечности алгоритма Гомори установлены в следующей теореме:

   Если целевая функция

   $$W = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

   ограничена снизу и сверху на множестве решений, причём множество оптимальных решений представляет выпуклый многогранник и правильное отсечение образуется по строке таблицы с нецелочисленной компонентой b_j, $j \in I_б$, имеющей минимальный номер. А выбор вектора A_i, вводимого в базис определяют по величине (как в двойственном симплекс – методе):

   $$\rho_i = \min_{e \notin I_б} \{\rho_e\} = \min_{e \notin I_б} \left\{-\frac{\Theta e}{\alpha j e}\right\},\ \alpha_j e < 0,$$

   то алгоритм Гомори является конечным.

5. В отличие от обычной задачи ЛП задача ЦП требует большого объёма вычислений даже при малых m и n. Количество итераций существенно зависит от удачности формирования правильного отсечения.

Пример:

$$W = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

При отброшенном условии целочисленности оптимальный нецелочисленный план найден двойственным симплекс – методом. Результат решения представлен в таблице 10.1.

Таблица 10.1

C			1	1	0	0	0	0
	A	X	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_1	40/9	1	0	0	5/9	1/9	0
0	A_3	1	0	0	1	- 6	1	0
1	A_2	23/9	0	1	0	4/9	- 1/9	0
	Θ	7	0	0	0	1	0	0
	A_6	-4/9	0	0	0	-5/9	- 1/9	1
	ρ					9/5	0	

Сформулируем правильное отсечение по строке A_1, дописав столбец A_6. Выполним один шаг двойственного симплекс – метода и придём к таблице 10.2.

Таблица 10.2

C			1	1	0	0	0	0
	A	X	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_1	4	1	0	0	0	0	1
0	A_3	-3	0	0	1	- 11	0	9
1	A_2	3	0	1	0	1	0	-1
0	A_5	4	0	0	0	5	1	-9
	Θ	7	0	0	0	1	0	0

Найдя в столбце X отрицательную компоненту $X_3 = -3$, определим направляющую строку. Выполним 1 шаг двойственного симплекс – метода, придём к таблице 10.3.

Таблица 10.3

C			1	1	0	0	0	0
	A	X	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_1	4	1	0	0	0	0	1
0	A_4	3/11	0	0	-1/11	1	0	-9/11
1	A_2	30/11	0	1	1/11	0	0	-2/11
0	A_5	29/11	0	1	5/11	0	1	-54/11
	Θ	74/11	0	0	1/11	0	0	9/11

Так как в этой таблице все элементы $X \geq 0$, 1-ая большая итерация закончена и найдём новый оптимальный нецелочисленный план. Переходим ко 2-ой большой итерации и сформируем правильное отсечение по индексной строке.

Таблица 10.4

C			1	1	0	0	0	0	0
	A	X	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_1	4	1	0	0	0	0	1	0
0	A_4	3/11	0	0	-1/11	1	0	-9/11	0
1	A_2	30/11	0	1	1/11	0	0	-2/11	0
0	A_5	29/11	0	0	5/11	0	1	-54/11	0
	Θ	74/11	0	0	1/11	0	0	9/11	0
	A_7	-8/11	0	0	-1/11	0	0	-9/11	1
	ρ				1			1	

Направляющий элемент $\alpha_{73} = -1/11$. Выполним 1 шаг и получим таблицу 10.5.

Таблица 10.5

C			1	1	0	0	0	0	0
	A	X	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_1	4	1	0	0	0	0	1	0
0	A_4	1	0	0	0	1	0	0	-1
1	A_2	2	0	1	0	0	0	-1	1
0	A_5	-1	0	0	0	0	1	-9	5
0	A_3	8	0	0	1	0	0	9	-11
	Θ	6	0	0	0	0	0	0	1

Так как в столбце X есть -1, то выполним следующую итерацию с направляющем элементом $\alpha_{56} = -9$. Вектор A_6 должен быть снова введён в базис, но так как переменная X_6 была использована для формирования предыдущего правильного отсечения, то это позволяет после соответствующего симплекс – преобразования вычеркнуть (опустить) столбец A_6 и строку A_6 в новой таблице 10.6.

Таблица 10.6

C			1	1	0	0	0	0	0
	A	X	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_7	A_8
1	A_1	35/9	1	0	0	0	1/9	5/9	0
0	A_4	1	0	0	0	1	0	-1	0
1	A_2	19/9	0	1	0	0	-1/9	4/9	0
0	A_3	6	0	0	1	0	1	-6	0
	Θ	6	0	0	0	0	0	1	0
	A_8	-8/9	0	0	0	0	-1/9	-5/9	1
	ρ						0	9/5	

Таблица 10.7

C			1	1	0	0	0	0	0
	A	X	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_7	A_8
1	A_1	3	1	0	0	0	0	0	1
0	A_4	1	0	0	0	1	0	-1	0
1	A_2	3	0	1	0	0	0	1	-1
0	A_3	-2	0	0	1	0	0	-11	9
	A_5	8	0	0	0	0	1	5	-9
	Θ	6	0	0	0	0	0	1	0

Таблица 10.8

C			1	1	0	0	0	0	0
	A	X	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_8	A_9
1	A_1	3	1	0	0	0	0	1	0
0	A_4	13/11	0	0	-1/11	1	0	-9/11	0
1	A_2	31/11	0	1	1/11	0	0	-2/11	0
0	A_5	78/11	0	0	5/11	0	1	-54/11	0
	Θ	64/11	0	0	1/11	0	0	9/11	0
	A_9	-9/11	0	0	-1/11	0	0	-9/11	1
	ρ				1			1	

Так как полученный план не целочисленный, то формируем новое правильное отсечение, дописав строку A_9.

Приходим к следующей таблице 10.9, выполнив шаг симплекс – преобразования.

Таблица 10.9

C			1	1	0	0	0	0	0
	A	X	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_8	A_9
1	A_1	3	1	0	0	0	0	1	0
0	A_4	2	0	0	0	1	0	0	-1
1	A_2	2	0	1	0	0	0	-1	1
0	A_5	3	0	0	0	0	1	-9	5
0	A_3	9	0	0	1	0	0	9	-11
	Θ	5	0	0	0	0	0	0	1

В этой таблице получен искомый целочисленный план:

$x_{10} = 3$; $x_{20} = 2$;

$W_{max} = x_{10} + x_{20} = 3 + 2 = 5.$

Контрольные вопросы

1. Какие экономические задачи относятся к задачам целочисленного программирования?
2. Сформулируйте задачу целочисленного программирования.
3. В чем состоит метод Гомори?
4. Как составить дополнительное ограничение, если компоненты оптимального плана задачи являются дробными?
5. В каком случае поставленная задача не имеет целочисленного решения?
6. Какой геометрический смысл имеет введение дополнительного ограничения?

Лекция № 11

Нелинейное программирование. Общая постановка задачи нелинейного программирования (НП). Геометрическая интерпретация задачи НП. Классический метод определения условного экстремума

Задача НП в общем виде записывается так:

Найти

$$W = f(X) \text{ при } g_j(X) \geq 0, j = \overline{1, m}, \quad (11.1)$$

где функции $f(X)$ и $g(X)$ по отдельности или обе вместе являются нелинейными.

Для выяснения трудностей, порождаемых нелинейностью, сопоставим задачи ЛП и НП.

Задаче ЛП присущи следующие **характерные особенности**, позволяющие строить универсальные алгоритмы их решения, и которые отсутствуют в задаче ЛП.

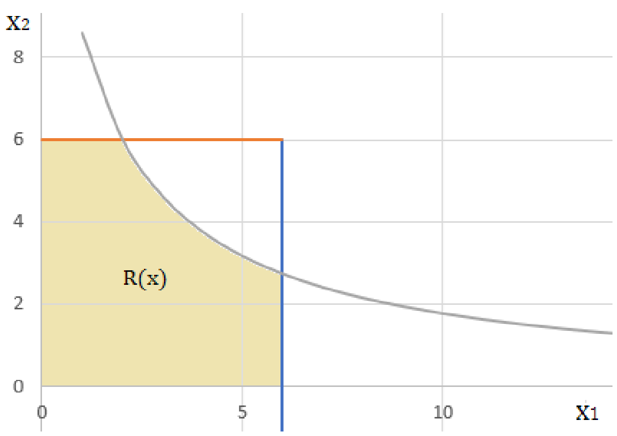
1. Область допустимых планов представляет собой выпуклое множество с конечным числом угловых точек. (По крайней мере в одной из них целевая функция W достигает экстремума. Её можно найти за конечное число шагов.) В задаче НП множество допустимых планов может быть не выпуклым, не связанным, иметь бесконечное число крайних точек.
2. Линейная W достигает экстремума в одной из крайних точек (на границе ОДР). При НП экстремумы W могут достигаться не только на границе, но и внутри ОДР.
3. Экстремальное локальное значение W в задаче ЛП является в тоже время экстремальным глобальным значением. В задаче НП W в области ОДР можно иметь несколько локальных экстремумов.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию задачи НП.

Пример 1: ОДР определяется следующими ограничениями:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2) = 6 - x_1 \geq 0 \\ g_2(x_1, x_2) = 6 - x_2 \geq 0 \\ g_3(x_1, x_2) = 6 - x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

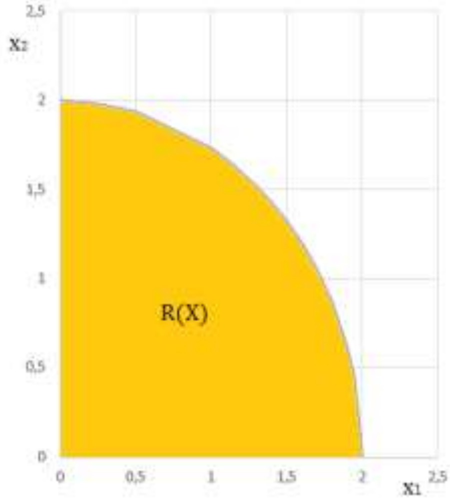


Пример 2: ОДР описывается следующими ограничениями:

$g_1(x_1, x_2) = 4 - x^2_1 - x^2_2 \geq 0$

$x_1, x_2 \geq 0$

ОДР хотя и выпукла, но имеет бесконечное число крайних точек.



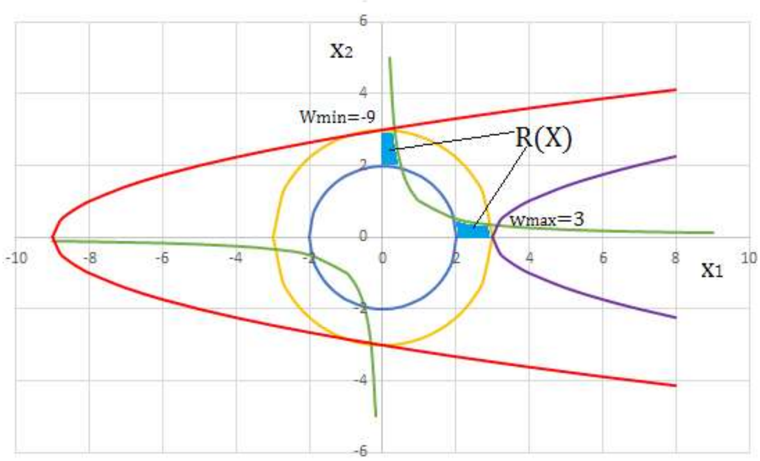
Пример 3: $W = x_1 - x^2_2 \rightarrow \max (\min)$

При

$$\begin{cases} X^2_1 + X^2_2 \geq 4 \\ X^2_1 + X^2_2 \leq 9 \\ X_1 X_2 \leq 1 \end{cases}$$

$X_1, X_2 \geq 0$

ОДР несвязная, распалась на 2-е части.



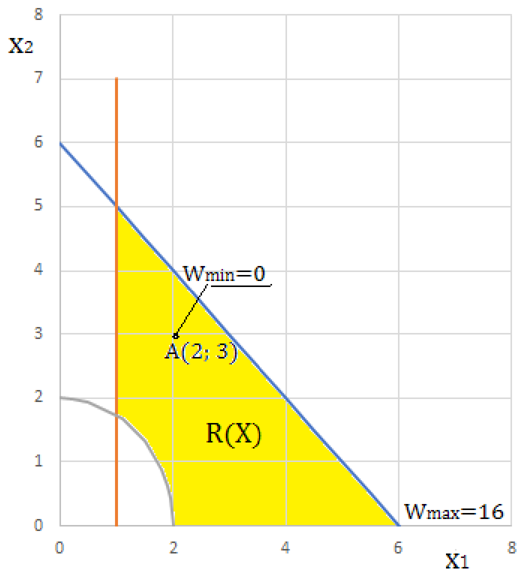
Пример 3: $W = (x_1-2)^2+2(x_2-3)^2 \rightarrow \max (\min)$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 6 \\ X^2_1 + X^2_2 \geq 4 \\ X_1 \geq 1 \end{cases}$$

$X_2 \geq 0$

MAX в крайней точке ОДР,

MIN во внутренней области ОДР.



Методы решения задач ЛП

Задачи НП всегда решаются значительно труднее, чем ЛП. Вычислительные методы разработаны для немногих типов задач. Классу задач НП, изученному более глубоко, относятся задачи с линейными ограничениями и неленейной целевой функцией. При этом вычислительные методы разработаны лишь в тех случаях, когда целевая функция имеет определенные свойства. В 1-м приближенииметоды нелинейной оптимизации можно проклассифицировать следующим образом:

a) Аналитические, использующие классические методы дифференциального и вариационного исчисления. Они применяются при отсутствии ограничений, так и при их наличии типа равенства или неравенства. К ним относятся:
   1) Методы перебора в отыскании экстремума функции (одномерный поиск):
      - метод дехотомии;
      - золотого сечения:
      - метод Фибоначчи.
   2) Классические методы нахождения экстремума:
      - метод неопределенных множителей Лагранжа.
   3) Различные приближенные методы оптимизации:
      - Гаусса-Зайделя;
      - релаксации;
      - градиентные методы (простейшие из них: градиентный метод спуска-подъёма;.метод наискорейшего спуска(подъёма)).
b) Численные методы. Одним из наиболее мощных методов решения задач НП, заключающегося в преобразовании каким-образом задачи НП к виду, допускающего применение симплексного алгоритма.
c) Графический метод.
d) Методы исследования возможных вариантов. Для решения некоторых типов задач НП используется вычислительный метод, называемый динамическое программирование.
e) Экспериментальные методы. Выделенные в направление- иатематическую теорию планирования эксперимета.

Задача нелинейного программирования (НП-задача) в общем виде формулируется следующим образом.

Найти

$$\max f(x_1, \ldots, x_n)$$

при условиях

$$\begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0; \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0; \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0, \end{cases}$$

где функции $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ $i = \overline{1, m}$ в общем случае нелинейны.

В отличие от задач линейного программирования (ЛП) для задач НП общего метода решения нет.

В задаче ЛП допустимое множество R всегда является выпуклым с конечным числом крайних точек. Используя аппарат симплекс-метода и перебрав только крайние точки, всегда за конечное число шагов возможно найти оптимальное решение. Напротив, в НП-задачах, если в ограничениях есть нелинейность, то выпуклость допустимого множества и конечность числа его крайних точек необязательны. Из-за этих особенностей и возникают основные трудности решения НП-задачи.

Рассмотрим следующие примеры:

Пример 5.1. Допустимая область R определяется ограничениями (рис. 5.1):

$$g_1(x_1, x_2) = 6 - x_1 \geqslant 0;$$
$$g_2(x_1, x_2) = 6 - x_2 \geqslant 0;$$
$$g_3(x_1, x_2) = 6 - x_1 x_2 \geqslant 0;$$
$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

Допустимое множество решений является невыпуклым.

Пример 5.2.

$$g_1(x_1, x_2) = 4 - x_1^2 - x_2^2 \geqslant 0,$$
$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

Допустимое множество решений (рис. 5.2) хотя и выпукло, но имеет бесконечное число крайних точек.

Пример 5.3.

$$\max (10x_1 + 20x_2 + x_1 x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2) = \max f(x_1, x_2).$$

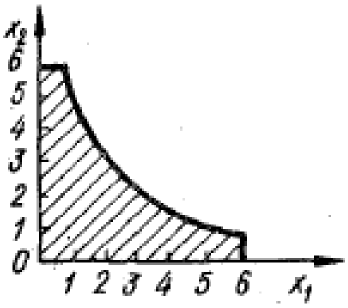


Рис. 5.1.

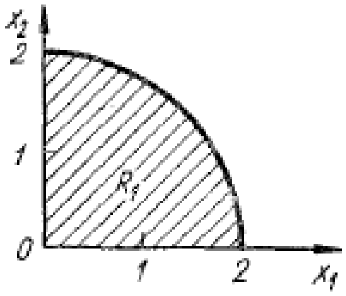


Рис. 5.2.

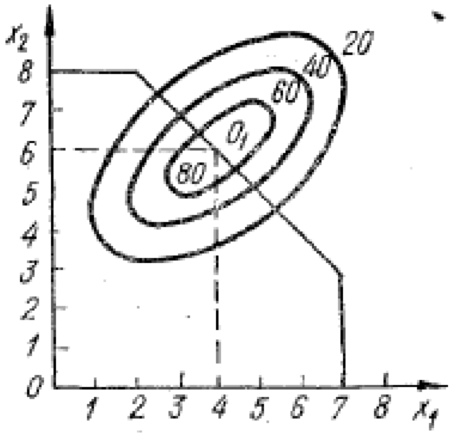


Рис. 5.3.

При ограничениях

$$g_1(x_1, x_2) = 7 - x_1 \geqslant 0;$$
$$g_2(x_1, x_2) = 8 - x_2 \geqslant 0;$$
$$g_3(x_1, x_2) = 10 - x_1 - x_2 \geqslant 0.$$

Построим допустимое множество решений (рис. 5.3).

Задаваясь $f(x_1, x_2) = c$, строим семейство эллипсов с общими осями. Из рисунка следует, что точка абсолютного максимума ($x_1^0 = 4$, $x_2^0 = 6$) попала на границу множества решений.

§ 1. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Для определения условного экстремума (т. е. экстремума при ограничениях) могут быть использованы методы дифференциального исчисления, когда $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет не ниже второй производной. Рассмотрим некоторые важные понятия и теоремы классического математического анализа, которые лежат в основе методов поиска условного экстремума.

Теорема 5.1. *Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывная функция, определенная на замкнутом и ограниченном множестве R, то она достигает на этом множестве, по крайней мере один раз, максимального и минимального значения (теорема существования экстремума).*

Следующая теорема определяет возможные местоположения максимума.

Теорема 5.2. *Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ является функцией нескольких переменных, определенной на допустимой области R, то максимальное значение f, если оно существует, достигается в одной или нескольких точках, которые принадлежат одному из следующих множеств:*

1) S_1 — множество стационарных точек;
2) S_2 — множество точек границы;
3) S_3 — множество точек, где $f(x_1, \ldots, x_n)$ недифференцируема.

Определение 1. *Множество точек $S_1(\mathbf{x})$ функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется множеством стационарных точек, если они удовлетворяют условию*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0; \quad j = \overline{1, n}. \qquad (1.1)$$

Определение 2. *Функция f достигает относительного максимума в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если для всех точек R, лежащих в малой окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, имеет место неравенство*

$$f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \geqslant f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{1.2}$$

Определение 3. *Функция f достигает абсолютного максимума в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если для всех точек $\{x_1, \ldots, x_n\} \in R$ справедливо неравенство*

$$f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \geqslant f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

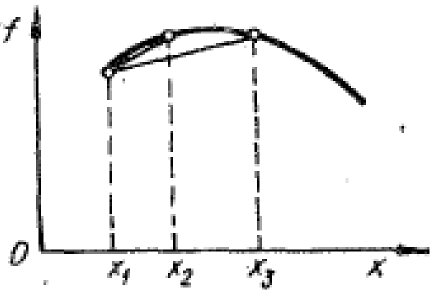


Рис. 5.4.

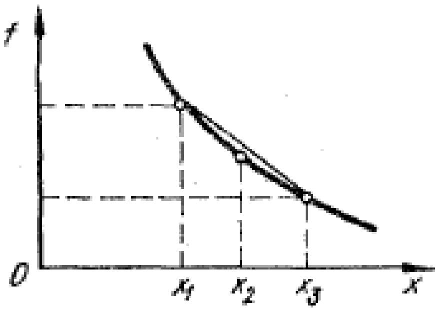


Рис. 5.5.

Для нахождения стационарных точек допустимой области R можно использовать теорему 5.3.

Теорема 5.3. *Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — дифференцируема в некоторой области R. Если в некоторой внутренней точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ области R функция f имеет относительный максимум, то*

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Пример 5.4. Пусть $f(x_1, x_2) = 10x_1 + 20x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$ определена на множестве $R \times R$ (т. е. на всей плоскости x_1Ox_2).

Для определения относительного экстремума этой функции имеем два уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 10 + x_2 - 4x_1 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 20 + x_1 - 4x_2 = 0,$$

решив которые, находим $x_1^0 = 4$, $x_2^0 = 6$.

Для того чтобы определить, являются ли найденные стационарные точки точками максимума или минимума, необходимо исследовать $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в окрестности стационарных точек и определить, является она выпуклой или вогнутой.

Определение 4. *Пусть R — выпуклое множество точек n-мерного пространства. Функция f, определенная на R, называется вогнутой (выпуклой вверх), если для любой пары точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R$*

и произвольного $0 \leqslant k \leqslant 1$ *выполняется неравенство* (рис. 5.4)

$$f[(k\mathbf{x}_1 + (1-k)\mathbf{x}_2] \geqslant kf(\mathbf{x}_1) + (1-k)f(\mathbf{x}_2). \qquad (1.4)$$

Если

$$f[k(\mathbf{x}_1) + (1-k)\mathbf{x}_2] \leqslant kf(\mathbf{x}_1) + (1-k)f(\mathbf{x}_2), \qquad (1.5)$$

то функция называется выпуклой (рис. 5.5).

Если в (1.4) или (1.5) есть строгие неравенства, то функция называется строго вогнутой или строго выпуклой соответственно.

Критерий выпуклости и вогнутости функции n переменных может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 5.4. *Дифференцируемая функция* $f(\mathbf{x})$ *строго вогнута в некоторой окрестности точки* $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, *если выполняются следующие условия:*

$$f_{11}(\mathbf{x}_0) < 0$$

$$\begin{vmatrix} f_{11}(\mathbf{x}_0) & f_{12}(\mathbf{x}_0) \\ f_{21}(\mathbf{x}_0) & f_{22}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix} > 0; \qquad \begin{vmatrix} f_{11}(\mathbf{x}_0) & f_{12}(\mathbf{x}_0) & f_{13}(\mathbf{x}_0) \\ f_{21}(\mathbf{x}_0) & f_{22}(\mathbf{x}_0) & f_{23}(\mathbf{x}_0) \\ f_{31}(\mathbf{x}_0) & f_{32}(\mathbf{x}_0) & f_{33}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix} < 0,$$

т. е. если знаки определителей чередуются, где

$$f_{ij}(\mathbf{x}_0) = \left.\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{(\mathbf{x}=\mathbf{x}_0)}. \qquad (1.6)$$

Функция $f(\mathbf{x})$ строго выпукла в окрестности точки $\mathbf{x}_0$, если все определители (выписанные выше) положительны. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5.5. *Для того чтобы в точке* $\mathbf{x}_0$ *достигался внутренний относительный максимум, достаточно равенства нулю всех первых частных производных и строгой вогнутости функций в окрестности* $\mathbf{x}_0$.

Для того чтобы в $\mathbf{x}_0$ был относительный минимум, достаточно, чтобы все частные производные обращались в 0 в точке $\mathbf{x}_0$, а сама функция в ее окрестности была строго выпукла.

Пример 5.5. $f(x_1, x_2) = 10x_1 + 20x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$. Стационарная точка $\mathbf{x}_0 = [4,6]$. Исследуем точку на относительный максимум или минимум:

$$f_{11}(x_1, x_2) = -4, \; f_{12} = 1, \; f_{21} = 1, \; f_{22}(x_1, x_2) = -4.$$

Так как

$$f_{11} = -4 < 0, \; \begin{vmatrix} f_{11}(4,6) & f_{12}(4,6) \\ f_{21}(4,6) & f_{22}(4,6) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 15 > 0,$$

то функция f достигает в точке $x_1^0 = 4$, $x_2^0 = 6$ относительного максимума.

Справедливо следующее утверждение. Если $f(\mathbf{x})$ строго выпуклая (вогнутая) функция на всем множестве R, то f обладает только одним относительным минимумом (максимумом), который является и абсолютным.

Теорема 5.6 (*о выпуклости допустимого множества решений*).

Пусть $g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x}) \geqslant 0$ *и* $\mathbf{x} \geqslant 0$ *— ограничения задачи нелинейного программирования. Если функции* $g_1, g_2, \ldots, g_m$ *вогнуты,* *то допустимое множество* $R = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geqslant 0$ и $g_i(\mathbf{x}) \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m)\}$ *является выпуклым.*

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что множество $R_i = \{\mathbf{x} : g_i(\mathbf{x}) \geqslant 0;\ \mathbf{x} \geqslant 0\}$ при каждом $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$ будет выпуклым. Тогда $R = R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_m$ будет также выпуклым, так как пересечение конечного числа выпуклых множеств выпукло. Рассмотрим некоторую вогнутую функцию $g_i(\mathbf{x}) \geqslant 0$. Выберем две произвольные точки $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_3 \geqslant 0$ (рис. 5.6). Тогда

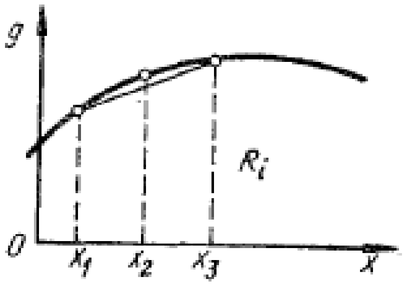


Рис. 5.6.

$$\mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\,\mathbf{x}_3 \geqslant 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Так как $\mathbf{x}_1 \in R_i$ и $\mathbf{x}_3 \in R_i$, то и точка $\mathbf{x}_2$ принадлежит R_i. Из условия вогнутости g_i следует, что

$$g_i[\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\,\mathbf{x}_3] \geqslant \lambda g_i(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)\,g_i(\mathbf{x}_3) \geqslant 0.$$

Следовательно, множество R_i содержит отрезок $\lambda g_i(x_1) + (1-\lambda) \times g_i(x_3)$, а поэтому R_i — выпукло (рис. 5.6).

Справедливо следующее утверждение.

Если функции $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_p(\mathbf{x})$ *вогнуты (выпуклы) на множестве* R, *то функция* $g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{p} k_i f_i(\mathbf{x})$ *также вогнута (выпукла), при условии, что* $k_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Его доказательство предоставляется читателю.

Рассмотрим классический метод поиска условного экстремума. Он состоит в следующем.

1) Отыскивают множество всех стационарных точек $S_1(\mathbf{x})$ функции $f(\mathbf{x})$ внутри допустимого множества R. Найденные точки далее исследуют на максимум (минимум) и определяют точку наибольшего максимума $\mathbf{x}_0 \in S_1(\mathbf{x})$.

2) Переходят к исследованию точек границы $S_2(\mathbf{x})$ и отысканию тех из них, где $f(\mathbf{x})$ достигает максимума. Этот процесс состоит в следующем. Выбирают произвольную границу, определяемую, например, условием $g_1(\mathbf{x}) = 0$.

Если функция

$$g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{1.7}$$

с разделяющимися переменными, то всегда можно, определив из (1.7) переменную

$$x_i = \varphi_i(\{x_j\}),\ j = \overline{1, n},\ j \neq i), \tag{1.8}$$

подставить ее в выражение для $f(\mathbf{x})$. Тем самым задача сведется к поиску безусловного экстремума, для чего используется процедура, описанная в п. 1. Обозначим через $\mathbf{x}_i^*$ точку границы $g_i(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x}_i^* \in R$, в которой $f(\mathbf{x})$ достигает максимума. Повторив вышеописанную процедуру по всем остальным границам, найдем соответственно экстремальные точки всех границ $\mathbf{x}_i^*$, $i = 1, m$.

3) Непосредственным сравнением значений $f(\mathbf{x})$ для всех точек $\mathbf{x}_i^*$ и стационарной внутренней точки $\mathbf{x}_0$ определяют точку абсолютного максимума $\mathbf{x}_{opt}$ на множестве решений R. Такой прямолинейный подход требует больших вычислительных затрат и применим лишь в простейших случаях, при небольшом числе ограничений и если функции $g_i(\mathbf{x})$ — с разделяющимися переменными. Поэтому ниже рассматриваются более эффективные методы решения задач условной оптимизации.

§ 2. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Метод множителей Лагранжа позволяет отыскивать максимум (или минимум) функции при ограничениях-равенствах. Основная идея метода заключается в переходе от задачи на условный экстремум к задаче отыскания безусловного экстремума некоторой специально построенной *функции Лагранжа*.

Пусть требуется найти

$$\min f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} h_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ h_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ h_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Предположим, что функции f, h_1 h_2, ..., h_m дифференцируемы.

Введем набор переменных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ (по числу ограничений), которые называются *множителями Лагранжа,* и составим так называемую функцию Лагранжа следующего вида:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = $$
$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2.3}$$

Тогда для того, чтобы вектор $\mathbf{x}^0 = \{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$ являлся решением задачи (2.1) при ограничениях (2.2), необходимо существование такого $\boldsymbol{\lambda}^0 = \{\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0\}$, что пара векторов $\{\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0\}$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{2.5}$$

Покажем необходимость условий (2.5) и (2.4) для следующего простого примера.

Найти

$$\min_{x_1, x_2, x_3} f(x_1, x_2, x_3) \tag{2.6}$$

при условиях

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \; h_2(x_1, x_2, x_3) = 0. \tag{2.7}$$

Ограничения (2.7) определяют собой допустимую область S, которая представляет собой кривую в $R^{(3)}$ и определяется пересечением $h_1(\mathbf{x})$ и $h_2(\mathbf{x})$.

Допустим, что данная задача имеет точку минимума в S_1: $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, функции f, h_1, h_2 обладают непрерывными производными первого порядка на некотором открытом множестве и градиенты

$$\nabla h_1 = \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_3}\right]^T, \quad \nabla h_2 = \left[\frac{\partial h_2}{\partial x_1} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_3}\right]^T$$

линейно-независимы.

Если две переменные в уравнениях (2.7) можно выразить через третью в виде $x_2 = u(x_1)$ и $x_3 = v(x_1)$, то, подставляя их в целевую функцию (2.6), преобразуем исходную задачу в следующую задачу без ограничений, которая содержит одну-единственную переменную x_1:

$$\min f(x_1, \; u(x_1), \; v(x_1)). \tag{2.8}$$

Так как градиенты $\nabla h_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2$ предполагаются непрерывными и линейно-независимыми, то можно применить известную из анализа теорему о неявной функции и найти стационарную точку x_1^*, а затем и $x_2^* = u(x_1^*)$ и $x_3^* = v(x_1^*)$.

Указанный подход можно в принципе распространить и на случай функций n переменных $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ при наличии m ограничений-равенств:

$$h_1(\mathbf{x}) = 0, \; h_2(\mathbf{x}) = 0, \; \ldots, \; h_m(\mathbf{x}) = 0. \tag{2.9}$$

Если функции $h_1, \ldots, h_m$ удовлетворяют условиям теоремы о неявной функции, то m из n переменных уравнений (2.9) можно выразить через остальные $(n - m)$ переменных, подставить их в $f(\mathbf{x})$ и таким образом преобразовать задачу минимизации с ограничениями в задачу безусловной минимизации с $(n - m)$ переменными. Однако такой подход очень трудно реализовать на практике, так как очень трудно разрешить уравнения (2.9) относительно некоторых m переменных. Поэтому рассмотрим другой подход, использующий метод множителей Лагранжа.

Пусть x_1^* — точка минимума, определяемого уравнением (2.8). Согласно известной теореме анализа о неявной функции можно записать

$$\frac{df}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{du}{dx_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{dv}{dx_1} = 0. \tag{2.10}$$

Аналогичные соотношения получаем для ограничивающих уравнений:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_1} + \frac{\partial h_i}{\partial x_2}\frac{du}{dx_1} + \frac{\partial h_i}{\partial x_3}\frac{dv}{dx_1} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{2.11}$$

Запишем уравнения (2.10) и (2.11) совместно в виде

$$\mathbf{A} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{du}{dx} \\ \dfrac{dv}{dx_1} \end{bmatrix} = 0, \tag{2.12}$$

где

$$\mathbf{A} = [\nabla f(\mathbf{x}^*) \quad \nabla h_1(\mathbf{x}^*) \quad \nabla h_2(\mathbf{x}^*)].$$

Так как вектор $\left[1 \ \frac{du}{dx_1} \ \frac{dv}{dx_1}\right]$ не является нулевым, то из (2.12) следует, что $\det \mathbf{A} = 0$. Отсюда следует, что вектор-столбцы матрицы $\mathbf{A}$ линейно-зависимы. Следовательно, существуют три такие скаляра a, b и c, не все равные 0, что

$$a\nabla f(\mathbf{x}^*) + b\nabla h_1(\mathbf{x}^*) + c\nabla h_2(\mathbf{x}^*) = 0. \tag{2.13}$$

Постоянная a не может равняться 0, так как согласно предположению ∇h_1 и ∇h_2 — линейно-независимы. Поэтому после деления (2.13) на a приходим к (2.14):

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \lambda_1 \nabla h_1(\mathbf{x}^*) + \lambda_2 \nabla h_2(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}. \tag{2.14}$$

Таким образом, для задачи минимизации с ограничениями (2.6) существуют такие λ_1 и λ_2, для которых справедливо (2.14) и которые одновременно не обращаются в 0. Итак, справедливость условий (2.4) для случая $n = 3$ показана.

Следовательно, для отыскания минимума (2.6) при условиях (2.7) необходимо отыскивать критическую точку функции Лагранжа $L(\mathbf{x}, \Lambda) = f(x) + \lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 h_2(x)$. Для того чтобы найти искомые λ_1, λ_2 и $\mathbf{x}^*$, решается совместно система уравнений (2.5) и (2.14).

С геометрической точки зрения условие (2.14) означает, что $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ лежит в плоскости, натянутой на векторы $\nabla h_i(\mathbf{x}^*)$.

Рассмотрим теперь общий случай произвольного n. Пусть задача нелинейного программирования задана в виде (2.1), (2.2), все функции $f(\mathbf{x})$, $h_i(\mathbf{x})$ $i = \overline{1, m}$ $(m < n)$ — вещественные функции на множестве $R^{(n)}$, имеющие непрерывные частные производные. Пусть S — подмножества множества $R^{(n)}$, на котором все функции $h_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = \overline{1, m}$, т. е.

$$S = (\mathbf{x} : h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = \overline{1, m}).$$

Тогда справедлива следующая теорема о множителях Лагранжа.

Теорема 5.7. *Допустим, что существует такая точка* $\mathbf{x}^*$, *в которой достигается относительный экстремум* (2.1) *при условиях* (2.2). *Если ранг матрицы* $\mathbf{I} = \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right]_{j=\overline{1, n}}^{i=\overline{1, m}}$ *в точке* $\mathbf{x}^*$ *равен* m, *то существуют* m *вещественных чисел* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, *не все из которых равны нулю одновременно, при которых*

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}. \tag{2.15}$$

Заметим, что если ввести функцию Лагранжа $L(\mathbf{x}, \Lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \times$ $\times h_i(\mathbf{x})$, то данная теорема определяет необходимые условия, при которых задача (2.1), (2.2) может быть сведена к нахождению решения уравнения $\nabla L(\mathbf{x}, \Lambda) = \mathbf{0}$.

На основании вышеизложенного метод множителей Лагранжа можно сформулировать следующим образом:

1. Составляют функцию Лагранжа $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$.

2. Находят частные производные: $\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j}$, $\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_i}$ $j = \overline{1, n}$; $i = \overline{1, m}$.

3. Решают систему

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n} \\ \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_i} = h_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, m} \end{cases} \tag{2.16}$$

и отыскивают точки $\mathbf{x}^0 = \{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$, удовлетворяющие системе (2.16).

Найденные точки исследуют далее на минимум (или максимум).

Пример 5.6. Имеется два способа производства некоторого продукта. Обозначим через y_1, y_2 количество продукта, произведенного первым или вторым способом соответственно. Издержки производства H при каждом способе зависят от произведенных y_1, y_2 следующим образом:

$$H_1(y_1) = a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_1^2 \quad a_0, a_1, a_2 > 0;$$

$$H_2(y_2) = b_0 + b_1 y_2 + b_2 y_2^2 \quad b_0, b_1, b_2 > 0.$$

За некоторый промежуток времени необходимо произвести ровно c единиц продукции (т. е. $y_1 + y_2 = c$), распределив ее между двумя способами так, чтобы минимизировать общие издержки. Составим функцию Лагранжа для этой задачи

$$L(y_1, y_2, \lambda) = a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_1^2 + b_0 + b_1 y_2 + b_2 y_2^2 + \lambda(c - y_1 - y_2),$$

откуда

$$L_{y_1} = a_1 + 2a_2 y_1 - \lambda = 0;$$

$$L_{y_2} = b_1 + 2b_2 y_2 - \lambda = 0;$$

$$L_\lambda = c - y_1 - y_2 = 0.$$

Решая эту систему, находим искомые количества y_1^0, y_2^0:

$$y_1^0 = \frac{b_2}{a_2 + b_2} c + \frac{b_1 - a_1}{2(a_2 + b_2)};$$

$$y_2^0 = \frac{a_2}{a_2 + b_2} c - \frac{b_1 - a_1}{2(a_2 + b_2)}.$$

§ 3. ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ-НЕРАВЕНСТВАХ

Рассмотрим теперь случай задачи с ограничениями типа неравенств:

$$\min f(\mathbf{x}) \tag{3.1}$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{3.2}$$

В точке минимума $\mathbf{x}^*$ неравенства $g_i(\mathbf{x})$ могут выполняться как равенства либо как строгие неравенства.

Ограничение $g_i(\mathbf{x})$ называется *активным* в точке $\mathbf{x}^*$, если оно выполняется в ней как строгое равенство, т. е. если $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$.

Используя геометрические свойства допустимой области, найдем необходимые условия экстремума для задач минимизации с ограничивающими неравенствами. Для этого сначала рассмотрим случай, когда все $g_i(\mathbf{x})$ линейны. Итак, пусть требуется найти при условиях

$$\min f(\mathbf{x})$$
$$g_i(\mathbf{x}) = -\eta^T \mathbf{x} + b_i \leqslant 0,$$
$$i = \overline{1, m}. \qquad (3.3)$$

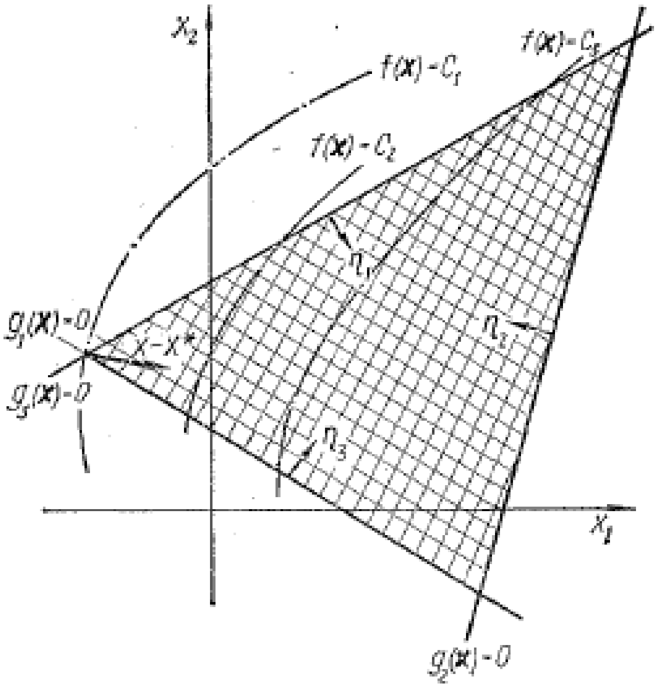


Рис. 5.7.

Здесь каждое ограничивающее уравнение определяет полупространство в R^n. Допустимая область S задана пересечением m полупространств, определяемых m уравнениями (3.3) и, следовательно, является выпуклым многогранником. Вектор η_i является нормалью к гиперплоскости, определяемой уравнением $g_i(\mathbf{x}) = 0$, и направлен внутрь области S.

Пусть $\mathbf{x}^*$ является точкой минимума задачи (3.1) с ограничениями (3.3). Обозначим множество индексов активных ограничений

$$I = \{i : g_i(\mathbf{x}) = 0\}. \qquad (3.4)$$

Например, на рис. 5.7 приведен пример минимизации с линейными ограничениями при $n = 2$ и $m = 3$, $I = \{1, 3\}$.

Выберем любую допустимую точку $\mathbf{x}$ из S. Вектор $\mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ направлен из $\mathbf{x}^*$ внутрь области S. Такой вектор будем называть входящим вектором. Для этого вектора с учетом того, что $\eta_i = -\nabla g_i(\mathbf{x}^*)$, можно записать следующее условие:

$$\eta_i^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geqslant 0 \text{ или } \nabla g_i^T (\mathbf{x}^*) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \leqslant 0 \qquad (3.5)$$

для всех $i \in I$ и $\mathbf{x} \in S$.

Таким образом, входящий вектор $\mathbf{x}$ определяет допустимое направление перемещения из точки $\mathbf{x}^*$. Но так как $f(\mathbf{x})$ минимальна в точке $\mathbf{x}^*$, то при любом $\mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, удовлетворяющем (3.5), будем иметь

$$\nabla^T f(\mathbf{x}^*) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geqslant 0. \qquad (3.6)$$

Применим теперь лемму Фаркаша (см. приложение 1).

Из условий (3.5) и (3.6) на основании леммы Фаркаша следует, что существует множество таких неотрицательных скаляров $\{\lambda_i\}$, для которых

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i\in I} \lambda_i \eta_i = -\sum_{i\in I} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*). \tag{3.7}$$

Отметим, что уравнение (3.7) аналогично (2.15).

Если принять, что $\lambda_j=0$ при $j \notin I$ (т. е. для неактивных ограничений), то (3.7) можно переписать в виде

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \eta_i = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*). \tag{3.8}$$

Кроме того, получим

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \tag{3.9}$$

поскольку при $i \ni I$, $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$, а при $i \notin I$, $\lambda_i = 0$.

Итак, уравнения ограничений могут быть включены в целевую функцию следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}), \ \lambda_i \geqslant 0. \tag{3.10}$$

Следовательно, $\mathbf{x}^*$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\nabla \varphi(\mathbf{x}^*) = \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \tag{3.11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \ \lambda_i \geqslant 0, \ i = \overline{1, m}. \tag{3.12}$$

При рассмотрении задачи минимизации $f(\mathbf{x})$ при условиях $g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0$ может случиться так, что не существует таких λ_i^*, $i = \overline{1, m}$, при которых без дополнительных предположений о природе функций $g_i(\mathbf{x})$ были бы справедливы уравнения (3.11) и (3.12), где $\mathbf{x}^*$ — оптимальное решение. Эти дополнительные предположения называют *условиями регулярности ограничений*. (В частности, в случае ограничений-равенств в качестве таких условий мы использовали линейную независимость векторов-градиентов ограничений).

Теорема Куна — Таккера. Выше мы получили условия оптимальности (3.11) и (3.12) для НП-задачи с линейными ограничениями. Обобщим эти условия на случай задачи (3.1) — (3.2), когда все ограничения нелинейны.

Условия оптимальности решения задачи нелинейного программирования формулируются в следующей теореме Куна — Таккера, имеющей исключительно важное значение для теории нелинейного программирования.

Теорема 5.8. *Пусть f, $g_i(\mathbf{x})$, $i = \overline{1, m}$ обладают непрерывными частными производными на некотором открытом множестве R^n, содержащем $\mathbf{x}^*$. Если $\mathbf{x}^*$ является точкой минимума функции $f(\mathbf{x})$ при ограничениях $g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0$, $i = \overline{1, m}$, удовлетворяющих условию регулярности в виде линейной независимости, то существуют такие* *неотрицательные множители Лагранжа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, *что*

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g\ (\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \tag{3.13}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0,\ \ \lambda_i \geqslant 0. \tag{3.14}$$

Определим функцию Лагранжа следующим образом:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}). \tag{3.15}$$

Тогда теорему Куна — Таккера можно записать:

$$\nabla_x \mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0}, \tag{3.16}$$

$$\nabla_\lambda L(\mathbf{x}, \lambda = L\, \mathrm{g}(\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{0}, \tag{3.17}$$

$$\lambda^T \nabla_\lambda L(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) = 0. \tag{3.18}$$

Заметим, что множители Лагранжа λ_i в НП-задаче с ограничениями-равенствами являются знаконеопределенными, тогда как в теореме Куна — Таккера они должны быть положительными.

Доказательство. При достаточно малых $t > 0$, разлагая $f(\mathbf{x}^* + t\mathbf{z})$ в ряд Тейлора, получим

$$f(\mathbf{x}^* + t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}^*) + t\nabla f^T(\mathbf{x}^*)\,\mathbf{z} + o(t), \tag{3.19}$$

где $o(t)$ — остаточный член 2-го порядка малости (t^2).
Пусть I — множество активных ограничений.
Тогда

$$g_j(\mathbf{x}^* + t\mathbf{z}) = g_j(\mathbf{x}^*) + t\nabla g_j^T(\mathbf{x}^*)\,\mathbf{z} + o(t) = t\nabla g_j^T(\mathbf{x}^*)\,\mathbf{z} + o(t),$$

так как $g_j(\mathbf{x}^*) = 0$ при $j \in I$.
Заметим, что система уравнений

$$\begin{cases} \nabla f^T(\mathbf{x}^*)\,\mathbf{z} < 0, & (3.20)\\ \nabla g_j^T(\mathbf{x}^*)\,\mathbf{z} \leqslant 0 & (3.21) \end{cases}$$

несовместна, так как в противном случае при достаточно малом $t > 0$ для некоторого $\mathbf{z}$ мы бы получили:

$$f(\mathbf{x}^* + t\mathbf{z}) < f(\mathbf{x}^*),$$

$$g_i(\mathbf{x}^* + t\mathbf{z}) \leqslant 0, \quad j = \overline{1, m},$$

что противоречит предположению об оптимальности точки $\mathbf{x}^*$. Для доказательства используем лемму, являющуюся следствием леммы Фаркаша.

Лемма. *При любой матрице* $\mathbf{A}$ *выполняется одно из двух условий:*
1. *Либо выполняется следующая система неравенств:*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} < \mathbf{0}. \tag{3.22}$$

2. *Либо выполняется следующая система равенств:*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} = 0, \\ &\boldsymbol{\lambda} \geqslant 0, \quad \boldsymbol{\lambda} \neq 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Одновременно условия (3.22) *и* (3.23) *выполняться не могут.* Справедливость леммы следует из леммы Фаркаша (см. приложение 1). Применим эту лемму к (3.20) — (3.21), приняв за матрицу $\mathbf{A}$ матрицу

$$\begin{bmatrix} \nabla f(\mathbf{x}^*) \\ \nabla g_i(\mathbf{x}^*) \end{bmatrix} \quad i \in I.$$

Поскольку система 3.20—3.21 не имеет решений, то существуют такие $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, что

$$\lambda_0 \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \tag{3.24}$$

где $\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_i \end{bmatrix} \neq 0.$

Если теперь положить, что $\lambda_i = 0$ для $i \notin I$, то получим $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0$. Условие $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0$ называют условием *дополняющей нежесткости.*

Покажем, что λ_0 в (3.24) не может быть равно 0. Действительно, если допустить, что $\lambda_0 = 0$, то получим

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0. \tag{3.25}$$

Но (3.25) противоречит условию теоремы о линейной независимости векторов $\nabla g_i(\mathbf{x}^*)$. Остается принять $\lambda_0 \neq 0$. Тогда, разделив обе части (3.24) на λ_0, получим

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0.$$

Теорема доказана полностью.

Понятие регулярности было введено впервые Куном и Таккером в 1951 году и имеет различные формы. В частном случае, когда $f(\mathbf{x})$ и все $g_i(\mathbf{x})$, $i = \overline{1, m}$ являются выпуклыми функциями, то условие регулярности имеет следующий вид: существует такой вектор $\mathbf{x}$, что $g_i(\mathbf{x}) < 0$ для всех $i = \overline{1, m}$. Это условие называют *условием регулярности Слейтера* [3, 24].

Седловая точка и задача нелинейного программирования

Рассмотрим функцию $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ от векторов $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\lambda}$.

Определение. *Пара векторов* $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ *называется седловой точкой функции* $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$, *если при всех* $\boldsymbol{\lambda} \geqslant 0$ *и* $\mathbf{x} \in R^n$ *выполняется* *условие*

$$L(\mathbf{x}^*, \lambda) \leqslant L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \leqslant L(\mathbf{x}, \lambda^*). \tag{3.26}$$

Неравенство (3.26) называют неравенством для седловой точки. Очевидно, в седловой точке $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ выполняется условие

$$L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \max_{\lambda \geqslant 0} \min_{\mathbf{x} \in R^n} L(\mathbf{x}, \lambda) = \min_{\mathbf{x} \in R^n} \max_{\lambda \geqslant 0} L(\mathbf{x}, \lambda). \tag{3.27}$$

Между понятием седловой точки функции Лагранжа $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x})$ и решением задачи НП имеется взаимосвязь, которая устанавливается в следующей теореме.

Теорема 5.9. *Пусть $f(\mathbf{x})$ и все $g_j(\mathbf{x})$ выпуклы и функции $g_j(\mathbf{x})$ удовлетворяют условию регулярности Слейтера.*

Вектор $\mathbf{x}^*$ является решением НП-задачи (3.1), (3.2) *тогда и только тогда, когда существует такой вектор $\lambda^* \geqslant \mathbf{0}$, что*

$$L(\mathbf{x}^*, \lambda) \leqslant L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \leqslant L(\mathbf{x}, \lambda^*) \tag{3.28}$$

и

$$\lambda^{*T} g(\mathbf{x}^*) = 0. \tag{3.29}$$

Доказательство. Докажем сначала достаточность условий теоремы. Пусть $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ — седловая точка функции $L(\mathbf{x}, \lambda)$. Но тогда из правого неравенства (3.26) получим

$$L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) \leqslant L(\mathbf{x}, \lambda^*) = f(\mathbf{x}) + \sum_i \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}), \tag{3.30}$$

так как $\lambda_i^* \geqslant 0$, а $g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0$, то $\sum_i \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0$.

Но, с другой стороны, $\sum_i \lambda_i^* g_i^*(x) = 0$ согласно (3.29).

Поэтому из (3.30) следует неравенство

$$f(\mathbf{x}^*) \leqslant f(\mathbf{x}) + \sum_i \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}) \tag{3.31}$$

для всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих ограничениям НП-задачи. Таким образом, $\mathbf{x}^*$ — оптимальное решение НП-задачи.

Перейдем к доказательству необходимости.

Допустим, что $\mathbf{x}^*$ — оптимальное решение задачи нелинейного программирования. Заметим, что система

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) < 0, \\ g(\mathbf{x}) \leqslant 0 \end{cases} \tag{3.32}$$

не имеет решения, так как $\mathbf{x}^*$ — точка минимума НП-задачи.

Отсюда следует также, что не имеет решения и следующая система:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) < 0, \\ g(\mathbf{x}) < 0. \end{cases} \tag{3.33}$$

Тогда согласно теореме Фана (см. приложение 4) существуют такие $\lambda_0^*, \lambda_i^* \geqslant 0$, что

$$\lambda_0^* [f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*)] + \sum_i \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}) \geqslant 0. \tag{3.34}$$

Так как

$$\lambda_i^* \geqslant 0 \quad \text{и} \quad g_i(\mathbf{x}^*) \leqslant 0,$$

то

$$\sum_i \lambda_i^{T*} g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0 \text{ для всех } \mathbf{x}. \tag{3.35}$$

Если же в (3.34) положить $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, то получим

$$\sum_i \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) \geqslant 0. \tag{3.36}$$

Сравнив (3.35) с (3.36), получим

$$\sum_i \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0. \tag{3.37}$$

Но тогда из уравнений (3.34) и (3.37) получим, что

$$\lambda_0^* f(\mathbf{x}^*) + \sum_i \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) \leqslant \lambda_0^* f(\mathbf{x}) + \sum_i \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}). \tag{3.38}$$

Таким образом, доказано правое неравенство для седловой точки. Так как $g(\mathbf{x}^*) \leqslant \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{\lambda}^T g(\mathbf{x}^*) \leqslant 0$ при любом $\lambda \geqslant \mathbf{0}$. Следовательно,

$$\lambda_0^* f(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \leqslant \lambda_0^* f(\mathbf{x}^*) = \lambda_0^* f(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}^{T*} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*). \tag{3.39}$$

Разделив обе части (3.39) на $\lambda_0^* > 0$, получим левое неравенство для седловой точки

$$f(\mathbf{x}^*) + \frac{\boldsymbol{\lambda}^T}{\lambda_0^*} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) \leqslant f(\mathbf{x}^*) + \frac{\boldsymbol{\lambda}^{T*}}{\lambda_0^*} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*).$$

Таким образом, теорема доказана.

Чтобы обеспечить условие $\lambda_0^* > 0$, необходимо предположить существование условия регулярности Слейтера. Действительно, пусть $\lambda_0^* = 0$. Тогда $\lambda_i^* \geqslant 0$ и выражение (3.38) примет вид

$$\sum_i \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \leqslant \sum_i \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}). \tag{3.40}$$

В то же время условие регулярности Слейтера утверждает, что существует такой $\mathbf{x}$, что $g(\mathbf{x}) < \mathbf{0}$ и, следовательно, $\sum_i \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}) < 0$. Так как это противоречит уравнению (3.40), то предположения теоремы вместе с условием регулярности Слейтера обеспечивают ее справедливость.

Таким образом, при *выполнении условий теоремы 5.9 задача нелинейного программирования оказывается эквивалентной задаче об отыскании седловой точки функции Лагранжа.*

Применение теоремы Куна — Таккера для задачи вогнутого программирования

Выше нами была рассмотрена НП-задача в виде (3.1), (3.2), когда на переменные $\{x_j\}$ не накладывались условия неотрицательности. Зачастую в задачах исследования операций приходится решать задачи, в которых переменные x_j по физическим условиям должны удовлетворять условию $x_j \geqslant 0$ для всех $j = \overline{1, n}$.

Основные положения теории могут быть легко распространены на этот случай. Действительно, пусть НП-задача записана в виде: найти

$$\min f(\mathbf{x}) \tag{3.41}$$

при условиях

$$g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{3.42}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3.43}$$

Введем обозначения $x_j = -h_j(x_j)$.
Тогда ограничения (3.43) можно записать в общем виде

$$h_j(\mathbf{x}) \leqslant 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3.44}$$

Задача теперь оказывается заданной в каноническом виде (3.1) — (3.2). Применим к ней теорему Куна — Таккера, для чего составим функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n} u_j h_j(\mathbf{x}), \tag{3.45}$$

где $u_j \geqslant 0$ — множители, связанные с ограничениями $h_j(\mathbf{x}) \leqslant 0$. Условия теоремы Куна — Таккера для (3.45) выглядят так:

$$\nabla L(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{x}) + \sum_i \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}) + \sum_j u_j \nabla h_j(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{3.46}$$

или

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u})}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_j \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} - u_j = 0, \quad j = 1, n \tag{3.47}$$

$$u_j x_j = 0, \quad u_j \geqslant 0, \tag{3.48}$$

$$\lambda_i g_i(x) = 0, \quad \lambda_i \geqslant 0. \tag{3.49}$$

Условия (3.47), (3.48) и (3.49) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = u_j \geqslant 0, \tag{3.50}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_j} x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3.51}$$

Нетрудно увидеть, что условия (3.51) представляют собой условия дополняющей нежесткости для ограничений неотрицательности. Таким образом, мы получили необходимые условия для оптимального решения задачи НП вида (3.41) — (3.42), которые могут быть сформулированы в следующей теореме.

Теорема 5.10. *Пусть НП-задача задана в виде (3.41) — (3.43), а функции* $f(\mathbf{x})$ *и* $g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ *дифференцируемы и выпуклы по* $\mathbf{x}$. *Вектор* $\mathbf{x}^0 \geqslant \mathbf{0}$ *является оптимальным решением задачи тогда и только тогда, когда существует такой вектор* $\lambda^0 \geqslant 0$, *что пара* $(\mathbf{x}^0, \lambda^0)$ *является седловой точкой функции Лагранжа* $L(\mathbf{x}, \lambda)$, *т. е. выполняются следующие условия:*

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^0, \lambda^0)}{\partial x_j} \geqslant 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{3.52}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^0, \lambda^0)}{\partial x_j} x_j^0 = 0, \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^0, \lambda^0)}{\partial \lambda_i} = g_i(\mathbf{x}^0) \leqslant 0, \tag{3.54}$$

$$\lambda_i^0 g_i(\mathbf{x}^0) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{3.55}$$

Задача (3.41) — (3.43) при условии, что $f(\mathbf{x})$ и все $g_i(\mathbf{x})$ — выпуклые функции, является задачей *выпуклого программирования*. Ограничения $g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0$, $i = \overline{1, m}$ определяют выпуклое множество, и требуется найти минимум выпуклой функции $f(\mathbf{x})$ на выпуклом множестве решений $R(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0};\ g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0,\ i = \overline{1, m}\}$.

Рассмотрим задачу так называемого *вогнутого* программирования: найти

$$\max_{\mathbf{x} \geqslant 0} f(\mathbf{x}) \tag{3.56}$$

при условиях

$$\left.\begin{array}{l} g_1(\mathbf{x}) \geqslant 0, \\ g_m(\mathbf{x}) \geqslant 0, \end{array}\right\} \tag{3.57}$$

$$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \tag{3.58}$$

где функции $f(\mathbf{x})$ и все $g_i(\mathbf{x})$ вогнуты по $\mathbf{x}$.

Покажем ее эквивалентность задаче выпуклого программирования (3.41) — (3.43). Для этого обозначим $f'(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$, $g_i'(\mathbf{x}) = -g_i(\mathbf{x})$, и так как $\max f(\mathbf{x}) = \min -f(\mathbf{x})$, то мы приходим к задаче

$$\min f'(\mathbf{x}) \tag{3.59}$$

при условиях.

$$g_i'(\mathbf{x}) \leqslant 0, \tag{3.60}$$

$$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}. \tag{3.61}$$

Заметим, что все функции $f'(\mathbf{x})$, $g_i'(\mathbf{x})$ будут выпуклы по $\mathbf{x}$, а потому задача (3.59) — (3.61) — это задача выпуклого программирования. Итак, эквивалентность задач (3.56) — (3.58) и (3.41) — (3.43) установлена.

Нетрудно получить соответствующие условия оптимальности для НП-задачи (3.56) — (3.58), аналогичные условиям (3.52) — (3.55). Они формулируются следующим образом.

Теорема 5.11. *Пусть НП-задача задана в виде (3.56) — (3.58), а функции* $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$, $i = \overline{1, m}$ *дифференцируемы. Для того чтобы*

$\mathbf{x}^0$ *являлся оптимальным решением этой задачи, необходимо, чтобы существовал такой вектор* $\boldsymbol{\lambda}^0 \geqslant 0$, для которого выполняются условия:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j} \leqslant 0, \quad j = \overline{1, n}; \tag{3.62}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j} x_j^0 = 0, \quad j = \overline{1, n}; \tag{3.63}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i} = g_i(x) \geqslant 0, \quad i = \overline{1, m}; \tag{3.64}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i} \lambda_i^0 = 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{3.65}$$

Если функции $f(\mathbf{x})$ и $g_i(\mathbf{x})$ вогнуты, то эти условия (3.62) — (3.65) оказываются и достаточными.

Лекция № 12

Метод неопределённых множителей Лагранжа. Понятие седловой точки. Условие Куна-Таккера для отыскания седловой точки.

Метод неопределенных множителей Лагранжа

Этот метод позволяет отыскать экстремум целевой функции при ограничениях – равенствах при отсутствии требования неотрицательности и целочисленности переменных.

Постановка задачи

Найти

$$W = f(X), \tag{12.1}$$

при ограничениях

$$g_j(X) = b_j,\ j = \overline{1, m},$$

где функции $f(X)$ и $g_j(X)$ – дифференцируемы, то есть имеют непрерывные частные прозводные по своим переменным. Введём набор переменных λ_j (по числу ограничений), которые называются неопределенными множителями Лагранжа и составим функцию Лагранжа следующего вида:

$$L(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [b_j - g_j(X)] \tag{12.2}$$

В более развёрнутом виде:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [b_j - g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \tag{12.3}$$

Исходная задача (12.2) отыскания условного экстремума заменяется задачей поиска безусловного экстремума функции Лагранжа $L(X, \Lambda)$, которая может быть решена приравниванием к нулю частные прозводные.

При этом получится: x_i

$$\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial xi} = \frac{\partial f(X)}{\partial xi} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[b_j - \frac{\partial gj(X)}{\partial xi}\right] = 0,\ i = \overline{1, n}, \tag{12.4}$$

$$\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial \lambda j} = b_j - g_j(X) = 0,\ j = \overline{1, m}, \tag{12.5}$$

Условия (12.4), (12.5) необходимы для нахождения экстремума задачи (12.2), то есть всякое экстремальное значение (12.2) удовлетворяет условию (12.4), (12.5), но они не являются достаточными. Необязательно, чтобы любое решение (12.4), (12.5) давало экстремум целевой функции W.

Метод множителей Лагранжа имеет ограниченное применение, так как система (12.4), (12.5) имеет несколько решений.

Пример:

Найти точку условного экстремума методом Лагранжа.

$$W = x_1 x_2 + x_2 x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение:

Введём набор переменных λ_1, λ_2 (по числу ограничений), которые называются неопределенными множителями Лагранжа и составим функцию Лагранжа следующего вида:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \lambda_1 [2 - x_1 - x_2] + \lambda_2 [2 - x_2 - x_3].$$

Исходная задача отыскания условного экстремума заменяется задачей поиска безусловного экстремума функции Лагранжа L (X, Λ), которая может быть решена приравниванием к нулю частные прозводные.

$$\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x1} = x_2 - \lambda_1 = 0,$$

$$\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x2} = x_1 + x_3 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x3} = x_2 - \lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial \lambda 1} = 2 - x_1 - x_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial \lambda 2} = 2 - x_2 - x_3 = 0.$$

$$\begin{cases} x_2 - \boldsymbol{\lambda_1} = 0, \\ x_1 + x_3 - \boldsymbol{\lambda_1} - \boldsymbol{\lambda_2} = 0, \\ x_2 - \boldsymbol{\lambda_2} = 0, \\ 2 - x_1 - x_2 = 0, \\ 2 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = \boldsymbol{\lambda_1} \\ x_1 = x_2 = x_3 = 1 \\ W = 2 \end{cases}$$

Лекция № 13

Динамическое программирование (ДП). Понятие ДП. Сущность вычислительного метода. Принцип оптимальности Беллмана

Динамическое программирование — это вычислительный метод для решения задач определенной структуры. Динамическое программирование возникло и сформировалось в 1950—1953 гг. благодаря работам Р. Беллмана и его сотрудников. Первые задачи, которые привели к появлению вычислительного метода динамического программирования, являлись динамическими задачами управления запасами.

§ 1. СУЩНОСТЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МЕТОДА

Сущность вычислительного метода рассмотрим на следующем примере.

Найти

$$\max_{x_1, \ldots, x_n} z = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \tag{1.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b; \quad a_j > 0, \quad x_j \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Целевая функция задачи является суммой функций от одной переменной. Такая функция называется *аддитивной*. Если все $f_i(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — выпуклые (вогнутые), то для решения может быть применен метод множителей Лагранжа. Однако, если имеется много локальных максимумов, то этот метод дает лишь одно из таких решений. В случае, если требуется найти глобальный максимум, метод множителей Лагранжа неприменим.

Рассмотрим метод, обеспечивающий решение задачи. Считаем все $\{a_j\}$, $j = 1, \ldots, n$ и b целыми числами. Предположим также, что в задаче все переменные $\{x_j\}$ могут принимать только целочисленные значения.

Введем следующие значения. Через z^* обозначим абсолютный максимум z, при условии $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b$. Выбираем значение x_n и, зафиксировав его, максимизируем z по всем остальным переменным $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Предположим, что такая максимизация проведена для всех возможных значений x_n. Тогда z^* будет наибольшим из всех возможных значений z. Формально этот процесс записывается так:

$$\max_{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \right\} = f_n(x_n) + \max_{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j) \right\}, \tag{1.3}$$

Понятие динамического программирования

В задачах линейного программирования экономический процесс считается не зависящим от времени, т.е. статическим. При нахождении оптимального плана ряд итераций проводится для всей задачи в целом.

Более сложными являются ситуации, когда экономический процесс развивается во времени или состоит из нескольких этапов, т.е. прослеживается динамика процесса. Для решения таких задач разработан специальный математический аппарат - динамическое программирование (или планирование). Его коренным отличием является то, что исходная сложная задача рассматривается как совокупность более простых промежуточных задач, «вложенных» друг в друга. Их последовательное решение позволяет найти оптимальный план исходной задачи.

Таким образом, суть методов динамического программирования составляет постепенная, пошаговая оптимизация. (Отдалённым аналогом из математического анализа является сложная функция и способ нахождения её производной по основному аргументу.)

Многошаговый процесс (или операция), у которого успех данного шага (и процесса в целом) зависит от принятого решения, является управляемым. Управление U процессом складывается из ряда элементарных (пошаговых) управлений u. При этом каждый шаг рассматривается не отдельно, а с учётом всех последствий от выбранного решения в будущем, на ещё предстоящих шагах. Следовательно, планирование должно быть дальновидным, ориентированным на перспективу.

Общая постановка задачи динамического программирования

Вне зависимости от конкретного содержания, каждая задача динамического программирования формально может быть представлена следующим образом.

Рассматривается физическая управляемая система S, находящаяся в одном из возможных начальных состояний S_0 € $\overline{S_0}$. Под воздействием некоторого управления $U=U(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ из множества возможных её состояние меняется, и указанная система переходит из начального состояния S_0 в одно из допустимых конечных состояний $S_{КОН}$ € $\overline{S}$ кон . При этом успешность (или качество) каждого из реализуемых управлений U оценивается численным значением критерия Щ U), который называется функцией цели (доходом, выигрышем). Необходимо выбрать оптимальную стратегию управления U* € U из числа возможных, т.е. такую совокупность пошаговых управлений $U^*=U^*(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*)$, при которой функция цели принимает экстремальное (максимальное или минимальное) значение W*=W(U*).

Общая постановка задач динамического программирования позволяет определить единый подход к их решению.

Список использованных источников

1. Moraru V. Metode de calcul numeric şi optimizări. Note de curs. Secţia Redactare şi Editare a U.T.M., 2009. -304 p. ISBN 978-9975-45-108-6.
2. Moraru V. Metode numerice în algebra liniară. Ciclu de prelegeri. Editura Cartea Universitară. U.T.M., Chişinău, 1995. -80 p.
3. Moraru V., Popescu A. Rezolvarea numerică a ecuaţiilor neliniare şi a problemelor de optimizare necondiţionată. Ciclu de prelegeri. Departamentul Editorial - Poligrafic al U.T.M., Chişinău, 1997.-88 p.
4. Moraru V. Numere cu virgulă mobilă. Material didactic. Departamentul Editorial - Poligrafic al U.T.M., Chişinău, 1998.-28 p.
5. Buzurniuc Şt., Moraru V. Metode numerice. Îndrumar de laborator. Departamentul Editorial - Poligrafic al U.T.M., Chişinău, 1996.-114 p.
6. Buzurniuc Şt., Moraru V. Informatica: Elemente de calcul numeric. Editura Evrica, Chişinău, 2000.- 116 p. ISBN 9975-941-71-0.
7. Бахвалов Н. С.Численные методы: учебное пособие,Москва, "БИНОМ", 2006, 637 стр
8. Формалев В. Ф. Численные методы: учебное пособие, Москва, "Физматлит", 2004, 400стр.
9. Бахвалов, Н. С, Численные методы , Учебное пособие для вузов, Москва, "Физматлит", 2001, 630 стр.
10. Зайченко Ю.Н. Исследование операций. Учебное пособие для студентов ВУЗов. - Киев: Вища школа, 1979 (1975), 4(14) экз.
11. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Советское радио, 1972, 8 экз.
12. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.Н., Волощенко А.Б. Математическое программирование. - М.: Высшая школа, 1980, 34 экз.
13. Костевич Л.С., Лапко А.А. Теория игр. Исследование операций. - Минск: Высшейшая школа, 1982, 66 экз.
14. Голубков Е.П. Математические методы системного анализа. Учебное пособие. - М.: МИНХ, 1977. - 75 с.
15. Гурвич Т.Ф., Лущук В.О. Сборник задач по математическому программированию. - М.: Колос, 1977, 25 экз.
16. Капустин В.Ф. Практические занятия по курсу математического программирования. -Л., 1976, 5 экз.