

Пример 64.3. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \frac{2}{3-x}.$$

○ Решение: Воспользуемся формулой (64.8). Так как

$$f(x) = \frac{2}{3-x} = \frac{2}{3 \cdot \left(1 - \frac{x}{3}\right)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}},$$

то, заменив x на $\frac{x}{3}$ в формуле (64.8), получим:

$$\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \dots\right),$$

или

$$\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{3^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3^3} + \dots + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^n}{3^n} + \dots,$$

где $-1 < \frac{x}{3} < 1$, т. е. $-3 < x < 3$. ●

§ 65. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

65.1. Приближенное вычисление значений функции

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x = x_1$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$.

Если функцию $f(x)$ в интервале $(-R; R)$ можно разложить в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

и $x_1 \in (-R; R)$, то точное значение $f(x_1)$ равно сумме этого ряда при $x = x_1$, т. е.

$$f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n + \dots,$$

а приближенное — частичной сумме $S_n(x_1)$, т. е.

$$f(x_1) \approx S_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n.$$

Точность этого равенства увеличивается с ростом n . Абсолютная погрешность этого приближенного равенства равна модулю остатка ряда, т. е.

$$|f(x_1) - S_n(x_1)| = |r_n(x_1)|,$$

где

$$r_n(x_1) = a_{n+1}x_1^{n+1} + a_{n+2}x_1^{n+2} + \dots$$

Таким образом, ошибку $|f(x_1) - S_n(x_1)|$ можно найти, оценив остаток $r_n(x_1)$ ряда.

Для рядов лейбницевского типа

$$|r_n(x_1)| = |u_{n+1}(x_1) + u_{n+2}(x_1) + u_{n+3}(x_1) + \dots| < |u_{n+1}(x_1)|$$

(см. п. 61.1).

В остальных случаях (ряд знакопеременный или знакоположительный) составляют ряд из модулей членов ряда и для него стараются найти (подобрать) положительный ряд с большими членами (обычно это сходящийся ряд геометрической прогрессии), который легко бы суммировался. И в качестве оценки $|r_n(x_1)|$ берут величину остатка этого нового ряда.

Пример 65.1. Найти $\sin 1$ с точностью до 0,001.

○ Решение: Согласно формуле (64.5),

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!}1^3 + \frac{1}{5!}1^5 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!}.$$

Стоящий справа ряд сходится абсолютно (проверить самостоятельно). Так как $\frac{1}{5!} \approx 0,008(3) > 0,001$, а $\frac{1}{7!} \approx 0,0002 < 0,001$, то для нахождения $\sin 1$ с точностью до 0,001 достаточно первых трех слагаемых:

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 0,842.$$

Допускаемая при этом ошибка меньше, чем первый отброшенный член (т. е. меньше, чем 0,0002). Вычисленное микрокалькулятором значение $\sin 1$ примерно равно 0,84147. ●

Пример 65.2. Вычислить число e с точностью до 0,001.

○ Решение: Подставляя $x = 1$ в формулу (64.4), получим:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Справа стоит знакоположительный ряд. Возьмем n слагаемых и оценим ошибку $r_n(x)$:

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) < \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \right) = \frac{1}{n! \cdot n}, \end{aligned}$$

т. е. $r_n(x) < \frac{1}{n! \cdot n}$. Остается подобрать наименьшее натуральное число n , чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{n! \cdot n} < 0,001$.

Нетрудно вычислить, что это неравенство выполняется при $n \geq 6$. Поэтому имеем:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2 \frac{517}{720} \approx 2,718. \quad \bullet$$

Замечание. Оценку остатка ряда можно производить с помощью остаточного члена ряда Маклорена

$$|f(x_1) - S_n(x_1)| = |R_n(x_1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right|,$$

где c находится между 0 и x_1 . В последнем примере $R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}$, $0 < c < 1$. Так как $e^c < e^1 < 3$, то $R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$. При $n = 6$ имеем: $R_6(1) < \frac{3}{7!} < 0,001$, $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{6!} \approx 2,718$.

65.2. Приближенное вычисление определенных интегралов

Бесконечные ряды применяются также для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции (см. § 34) либо нахождение первообразной сложно.

Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x) dx$ с точностью до $\varepsilon > 0$. Если подынтегральную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по степеням x и интервал сходимости $(-R; R)$ включает в себя отрезок $[a; b]$, то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда. Ошибку вычислений определяют так же, как и при вычислении значений функций.

Пример 65.3. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

○ Решение: Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, заменяя x на $(-x^2)$ в формуле (64.4):

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty). \quad (65.1)$$

Интегрируя обе части равенства (65.1) на отрезке $\left[0; \frac{1}{4}\right]$, лежащем внутри интервала сходимости $(-\infty; \infty)$, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots\right) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots\right) \Big|_0^{\frac{1}{4}} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} - \frac{1}{3! \cdot 7 \cdot 4^7} + \dots \end{aligned}$$

Получили ряд лейбницевского типа. Так как $\frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} = 0,0052 \dots > 0,001$, а $\frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} < 0,001$, то с точностью до 0,001 имеем:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0,245. \quad \bullet$$

Замечание. Первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = e^{-x^2}$ легко найти в виде степенного ряда, проинтегрировав равенство (65.1) в пределах от 0 до x :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \dots\right) dt = \\ &= x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty). \end{aligned}$$

Функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ играют очень важную роль в теории вероятностей. Первая — *плотность стандартного распределения вероятностей*, вторая — *функция Лапласа* $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (или *интеграл вероятностей*). Мы получили, что функция Лапласа представляется рядом

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2^2 2! \cdot 5} - \frac{x^7}{2^3 \cdot 3! \cdot 7} + \dots \right),$$

который сходится на всей числовой оси.

65.3. Приближенное решение дифференциальных уравнений

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора.

Познакомимся с двумя способами решения дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Пусть, например, требуется решить уравнение

$$y'' = f(x; y; y'), \quad (65.2)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0. \quad (65.3)$$

Способ последовательного дифференцирования

Решение $y = y(x)$ уравнения (65.2) ищем в виде ряда Тейлора:

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots, \quad (65.4)$$

при этом первые два коэффициента находим из начальных условий (65.3). Подставив в уравнение (65.2) значения $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$, находим третий коэффициент: $y''(x_0) = f(x_0; y_0; y'_0)$. Значения $y'''(x_0), y^{(4)}(x_0), \dots$ находим путем последовательного дифференцирования уравнения (65.2) по x и вычисления производных при $x = x_0$. Найденные значения производных (коэффициентов) подставляем в равенство (65.4). Ряд (65.4) представляет искомое частное решение уравнения (65.2) для тех значений x , при которых он сходится. Частичная сумма этого ряда будет приближенным решением дифференциального уравнения (65.2).

Рассмотренный способ применим и для построения общего решения уравнения (65.2), если y_0 и y'_0 рассматривать как произвольные постоянные.

Способ последовательного дифференцирования применим для решения дифференциальных уравнений любого порядка.

Пример 65.4. Методом последовательного дифференцирования найти пять первых членов (отличных от нуля) разложения в ряд решения уравнения $y'' = x^2 + y^2$, $y(-1) = 2$, $y'(-1) = \frac{1}{2}$.

○ Решение: Будем искать решение уравнения в виде

$$y = y(-1) + \frac{y'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{y''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{y'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \dots$$

Здесь $y(-1) = 2, y'(-1) = \frac{1}{2}$. Находим $y''(-1)$, подставив $x = -1$ в исходное уравнение: $y''(-1) = (-1)^2 + 2^2 = 5$. Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем заданное дифференциальное уравнение:

$$y''' = 2x + 2yy',$$

$$y^{(4)} = 2 + 2(y')^2 + 2yy'',$$

$$y^{(5)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 6y'y'' + 2yy''', \dots$$

При $x = -1$ имеем:

$$y'''(-1) = -2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

$$y^{(4)}(-1) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 2 \cdot 5 = 22,5,$$

$$y^{(5)}(-1) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 0 = 15, \dots$$

Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получим:

$$y = 2 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{5}{2}(x+1)^2 + \frac{15}{16}(x+1)^4 + \frac{1}{8}(x+1)^5 + \dots \quad \bullet$$

Способ неопределенных коэффициентов

Этот способ приближенного решения наиболее удобен для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Пусть, например, требуется решить уравнение

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \quad (65.5)$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$.

Предполагая, что коэффициенты $p_1(x), p_2(x)$ и свободный член $f(x)$ разлагаются в ряды по степеням $x - x_0$, сходящиеся в некотором интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$, искомое решение $y = y(x)$ ищем в виде степенного ряда

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots \quad (65.6)$$

с неопределенными коэффициентами.

Коэффициенты c_0 и c_1 определяются при помощи начальных условий $c_0 = y_0, c_1 = y'_0$.

Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем ряд (65.6) два раза (каков порядок уравнения) и подставляем выражения для функции y и ее производных в уравнение (65.5), заменив в нем $p_1(x)$, $p_2(x)$, $f(x)$ их разложениями. В результате получаем тождество, из которого методом неопределенных коэффициентов находим недостающие коэффициенты. Построенный ряд (65.6) сходится в том же интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ и служит решением уравнения (65.5).

Пример 65.5. Найти решение уравнения

$$y'' + xy' + y = x \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

используя метод неопределенных коэффициентов.

○ Решение: Разложим коэффициенты уравнения в степенные ряды: $p_1(x) = x$, $p_2 = 1$,

$$f(x) = x \cos x = x \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right).$$

Ищем решение уравнения в виде ряда

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

Тогда

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots,$$

$$y'' = 2c_2 + 2 \cdot 3 \cdot c_3 x + 3 \cdot 4 \cdot c_4 x^2 + \dots$$

Из начальных условий находим: $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Подставляем полученные ряды в дифференциальное уравнение:

$$(2c_2 + 2 \cdot 3 \cdot c_3 x + 3 \cdot 4 \cdot c_4 x^2 + \dots) + x(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots) + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots) = x \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$x^0: \quad 2c_2 = 0,$$

$$x^1: \quad 2 \cdot 3 \cdot c_3 + 2 = 1,$$

$$x^2: \quad 3 \cdot 4 \cdot c_4 + 2c_2 + c_2 = 0, \quad \frac{1}{2},$$

$$x^3: \quad 4 \cdot 5 \cdot c_5 + 3c_3 + c_3 = -\frac{1}{2},$$

$$x^4: \quad 5 \cdot 6 \cdot c_6 + 4c_4 + c_4 = 0,$$

.....

Отсюда находим, что $c_2 = c_4 = c_6 = \dots = 0$, $c_3 = -\frac{1}{3!}$, $c_5 = \frac{1}{5!}$, $c_7 = -\frac{1}{7!}, \dots$ Таким образом, получаем решение уравнения в виде

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

т. е. $y = \sin x$. ●