Тема 9

Линейные пространства

9.1. Аксиоматическое определение линейного пространства

Пусть V — непустое множество, F — поле. V называется *линейным* (или *векторным*) *пространством* над полем F, если

I. задано *правило сложения*, ставящее в соответствие любым двум элементам a, b из V единственный элемент c из V, называемый *суммой* и обозначаемый $c = a + b$;

II. задано *правило умножения на число*, ставящее в соответствие каждому a из V и каждому α из F единственный элемент d из V, обозначаемый $d = \alpha \cdot a$ или $d = a \cdot \alpha$; знак операции «$\cdot$» часто опускают;

III. выполняются следующие свойства (*аксиомы линейного пространства*):

(1) $\forall a, b, c \in V \ a + (b + c) = (a + b) + c$ (*ассоциативность*[1]),

(2) $\forall a, b \in V \ a + b = b + a$ (*коммутативность*),

(3) $\exists o \ \forall a \in V \ a + o = a$ (o называется *нулевым* элементом[2]),

(4) $\forall a \in V \ \exists b \in V \ a + b = o$ (b называется элементом, *противоположным* к a и обозначается $-a$),

(5) $\forall a \in V \ 1 \cdot a = a$,

(6) $\forall a \in V \ \forall \alpha, \beta \in F \ \alpha(\beta a) = (\alpha\beta a)$,

(7) $\forall a, b \in V \ \forall \alpha \in F \ \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (*дистрибутивность* I),

(8) $\forall a \in V \ \forall \alpha, \beta \in F \ (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (*дистрибутивность* II).

Аксиомы (1)–(4) означают, что множество V относительно операции $+$ образует абелеву группу.

Элементы множества V называются *векторами*, элементы множества F называются *скалярами* (или, просто, числами). Далее, как правило, векторы мы будем обозначать латинскими буквами, скаляры — греческими.

Линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ называется *вещественным*. Линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ называется *комплексным*.

[1] Скобки в выражениях $a + (b + c)$, $(a + b) + c$ указывают на порядок выполнения операции сложения. Как следует из аксиомы (3) в выражении вида $a + b + c$ их можно опустить.

[2] Нулевой вектор $o \in V$ следует отличать от числа $0 \in F$.

Если указана природа элементов множества V и определены операции над этими элементами, то пространство будем называть *конкретным*. Рассмотрим важные типы конкретных линейных пространств.

9.2. Примеры линейных пространств

Нулевое пространство $\{o\}$. В этом случае $V = \{o\}$. В качестве F можно рассматривать любое поле. Операции определяются тривиальным образом: $o + o = o$, $\alpha o = o$. Легко проверить, что указанное множество с такими операциями является линейным пространством над полем F.

Геометрические пространства $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ $\mathbf{V}_3$. Элементами этого пространства являются геометрические векторы, т. е. направленные отрезки, в пространстве. Геометрический вектор, начало которого находится в точке $\mathcal{A}$, а конец — в точке $\mathcal{B}$ обозначается $\overrightarrow{\mathcal{AB}}$. Два вектора считаются равными, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Ввиду этого удобно считать, что все векторы закреплены в одной точке $\mathcal{O}$, называемой *полюсом* или *началом отсчета*. Такое рассмотрение также удобно тем, что с каждым вектором ассоциируется некоторая точка пространства — его конец, и, наоборот, с каждой точкой пространства связан единственный вектор, называемый *радиус-вектором точки*, начало которого закреплено в полюсе, а конец указывает на эту точку. Векторы складываются по правилу параллелограмма: суммой двух радиус-векторов называется диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах. Векторы можно умножать на вещественные числа. Под произведением радиус-вектора на число α понимается вектор, длина которого равна длине исходного вектора, умноженной на $|\alpha|$, а направление совпадает с направлением исходного вектора, если $\alpha > 0$, и заменяется на противоположное, если $\alpha < 0$. Легко проверяются аксиомы (1)–(8). Таким образом, $\mathbf{V}_3$ является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$. Аналогичные совокупности векторов на плоскости и на прямой обозначим $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_1$ соответственно. Эти совокупности также являются линейными пространствами над полем $\mathbb{R}$.

Арифметическое пространство F^n. Элементами этого пространства являются столбцы высоты n, составленные из чисел. Два столбца

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

назовем равными, если $\alpha_j = \beta_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Числа α_j и β_j называются *компонентами* векторов a и b соответственно.

Операции сложения столбцов и умножения их на числа из F определены по следующим правилам:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}, \quad \alpha \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \alpha\alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что аксиомы (1)–(8) выполнены и поэтому F^n образует линейное пространство над полем F, называемое *арифметическим n-мерным пространством.* В частности, нулевым вектором в пространстве F^n является

$$o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пространство многочленов $F[x]$. Элементами этого пространства являются многочлены с коэффициентами из поля F. Легко видеть, что относительно обычных операций сложения и умножения многочленов на числа из F множество $V = F[x]$ образует линейное пространство над полем F. В частности, нулевым вектором в этом пространстве является нулевой многочлен.

Пространство матриц $F^{m\times n}$. Элементами этого пространства являются матрицы заданных размеров $m \times n$ с элементами из поля F. Легко видеть, что относительно операций матричного сложения и умножения матриц на числа из F множество $V = F^{m\times n}$ образует линейное пространство над полем F. В частности, нулевым вектором в этом пространстве является нулевая $m \times n$ матрица.

9.3. Простейшие следствия из аксиом

Утверждение 9.1. *В любом линейном пространстве нулевой вектор единственен.*

Доказательство. Предположим, что существует два нулевых элемента $o_1, o_2 \in V$, тогда положив в аксиоме (3) $a = o_1$, $o = o_2$, получаем $o_1 + o_2 = o_1$. С другой стороны, положив $a = o_2$, $o = o_1$ и воспользовавшись аксиомой (1), получаем $o_1 + o_2 = o$. Приравнивая правые части полученных равенств, получаем, $o_1 = o_2$. ∎

Нулевой вектор o часто называется нулем, однако его следует отличать от числа 0 из поля F.

Утверждение 9.2. *Для любого вектора $a \in V$ существует единственный противоположный элемент.*

Доказательство. Пусть b_1, b_2 — элементы пространства V, противоположные вектору a. По аксиоме (4)

$$b_1 + (a + b_2) = b_1 + o = b_1.$$

Аналогично,

$$(b_1 + a) + b_2 = o + b_2 = b_2.$$

По аксиоме (4) правые части приведенных равенств совпадают, поэтому $b_1 = b_2$. ∎

Утверждение 9.3. *Для любых a, b из V уравнение $a+x = b$ имеет и единственное решение.*

Доказательство. Подстановкой легко убеждаемся, что $x = (-a)+b$ является решением уравнения. Для доказательства единственности предположим, что имеется два решения x_1, x_2. Тогда $a+x_1 = a+x_2 = b$. Прибавляя ко всем частям равенства $(-a)$, получаем $(-a)+a+x_1 = (-a)+a+x_2$, откуда $x_1 = x_2$. ∎

Назовем *разностью* векторов b и a решение уравнения $a+x = b$. Разность обозначим $b-a$. Мы установили, что $b-a = (-a)+b = b+(-a)$.

Утверждение 9.4. *$0a = o$ для любого $a \in V$.*

Доказательство. Имеем $a + 0a = 1a + 0a = (1+0)a = 1a = a$. Таким образом, $a + 0a = a$, откуда $0a = a - a = o$. ∎

Утверждение 9.5. *$\alpha o = o$ для любого $\alpha \in F$.*

Доказательство. Пусть $a \in V$. Имеем $\alpha a + \alpha o = \alpha(a+o) = \alpha a$. Таким образом, $\alpha a + \alpha o = \alpha a$, откуда $\alpha o = \alpha a - \alpha a = o$. ∎

Утверждение 9.6. *Для любых векторов a, b из V и любых чисел α, β из F справедливы равенства:*

1) $(-\alpha)a = -(\alpha a)$;
2) $(-1)a = -a$;
3) $(\alpha - \beta)a = \alpha a - \beta a$;
4) $\alpha(a - b) = \alpha a - \alpha b$.

Доказательство. 1) Покажем, что вектор $(-\alpha)a$ является противоположным к αa. Действительно, $\alpha a + (-\alpha)a = (\alpha - \alpha)a = 0a = o$. Пункты 2)–4) вытекают из 1). ∎

Утверждение 9.7. *Пусть $a \in V$ и $\alpha \in F$. Если $\alpha a = 0$, то $\alpha = 0$ или $a = 0$.*

Доказательство. Если $\alpha = 0$, то утверждение справедливо. Пусть $\alpha \neq 0$, тогда $a = \dfrac{1}{\alpha}(\alpha a) = \dfrac{1}{\alpha} o = o$. ∎