Волны в упругой среде

Волновые процессы. Упругие волны и их характеристики

Волной называется процесс распространения в пространстве и времени возмущений вещества или поля, сопровождающийся переносом энергии этих возмущений или поля. Но при этом не происходит перенос вещества.

Различают два вида волн: *механические* и *электромагнитные*. К механическим относятся волны в упругой среде (например: *звуковые* и *сейсмические*), волны на поверхности жидкости.

Электромагнитные: световые, радио, γ - излучение, рентгеновские излучение.

Волны могут иметь различную форму. *Одиночная волна* или *импульс*

это короткое возмущение, не имеющее регулярного характера.

Цуг – ограниченный ряд повторяющихся возмущений.

Волны в упругой среде

Волновые процессы. Упругие волны и их характеристики

Особое значение имеют *гармонические волны* – бесконечные волны, в которых изменение состояния среды происходит по закону косинуса или синуса.

Итак, рассматриваем упругие гармонические волны.

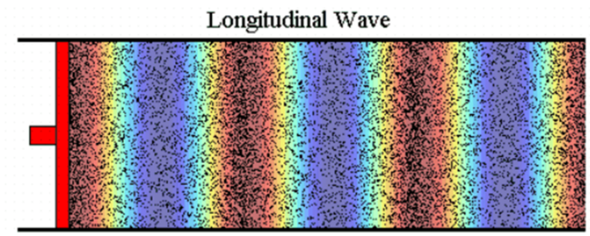
Если в каком-либо месте упругой среды возбудить колебание ее частицы (малые), то благодаря взаимодействию (упругому) между частицами это колебание будет распространятся в среде от частицы к частице с некоторой скоростью v – возникает бегущая волна.

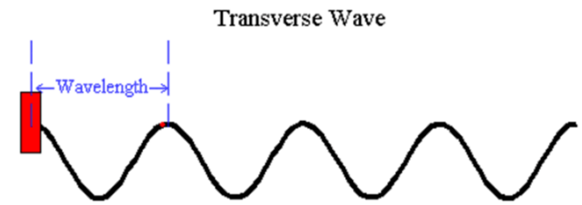
При этом частицы среды, в которой распространяется колебания, не вовлекаются в поступательном движении, они только колеблются около своих положений равновесия.

В зависимости от направления колебания относительно направление распространения волны различают волны *продольные* и *поперечные*.

Волны в упругой среде

Волновые процессы. Упругие волны и их характеристики





В продольной волне колебания частиц среды происходят в направлении распространения волны, в поперечной - перпендикулярно.

Поперечные волны могут распространятся только в среде, обладающей упругостью сдвига (твердые тела).

В жидких и газообразных средах – только продольные. Исключение составляют волны на поверхности жидкости, где необходимая упругость создается силами тяжести и поверхностного натяжения.

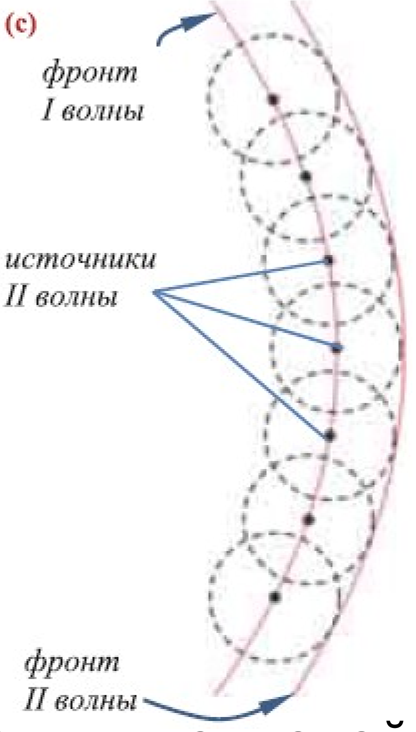
При распространения колебаний от какого-либо источника через некоторое время в колебательное движение вовлекаются совокупность частиц, заключенных в некотором объёме. Волновой процесс охватывает все новые и новые части пространство.

Волны в упругой среде

Волновые процессы. Упругие волны и их характеристики

Геометрическое место точек, до которых распространялись колебания к данному моменту времени t, называется *фронтом волны* (или *волновым фронтом*).

Он представляет собой поверхность, отделяющую часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от той, в котором колебания еще не возникли.



Геометрическое место точек, колеблющейся в одинаковой фазе, называется *волновой поверхностью*.

В данный момент времени можно провести один волновой фронт и множество волновых поверхностей (так как колебания периодически повторяются).

Волны в упругой среде

Волновые процессы. Упругие волны и их характеристики

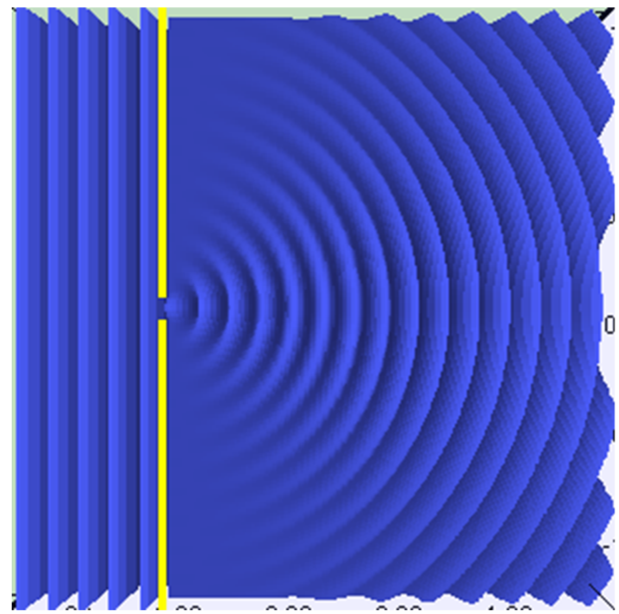
Волновые поверхности остаются неподвижными, так как проходят через положения равновесия частиц, колеблющихся в одинаковой фазе. Волновой фронт все время перемещается.

Форма волновой поверхности зависит от формы источника колебаний и свойств среды, в которой распространяется колебания.

Если источником колебаний является плоская поверхность, то в однородной изотропной среде распространяется *плоская волна*.

Если источник точечный – *сферическая*.

Линия, перпендикулярная волновой поверхности, называется *лучом* – это направление распространения волны.

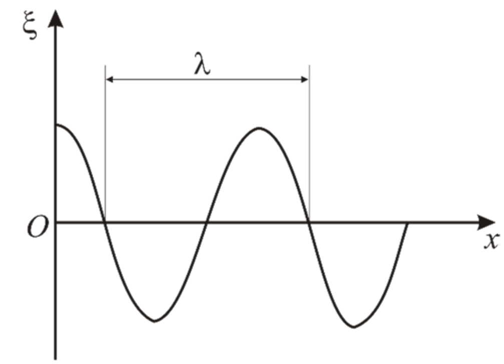


Волны в упругой среде

Волновые процессы. Упругие волны и их характеристики

Рассмотрим плоскую волну, распространяющегося в направлении x.

Тогда все точки среды, положения равновесия которых имеют одинаковую координату x (но разные y и z), колеблются в одной фазе.



ξ - смещение от положения равновесия точек с различными x в некоторый момент времени. Это моментальная фотография волны.

Длиной волны λ называется расстояние, на которое перемещается волна за один период:

$$\lambda = \upsilon \cdot T,$$ где υ – скорость распространения волны.

λ - равно наименьшему расстоянию между точками, колеблющимися в одной фазе (или разностью фаз 2π).

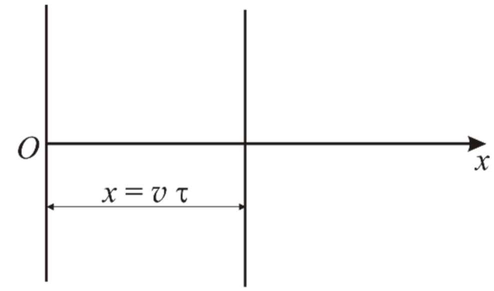
Зная что, $T = \dfrac{1}{\nu} \Rightarrow \lambda \cdot \nu = \upsilon,$ где ν - частота колебаний.

Волны в упругой среде

Уравнение плоской и сферической волны

1. Уравнение плоской волны

Уравнением волны называется выражение, определяющее зависимость смещение колеблющихся частиц от координат и времени: $\xi = \xi\left(x, y, z, t\right)$.



Для плоской гармонической волны, распространяющейся в направлении x, волновые поверхности перпендикулярны x и $\xi = \xi\left(x, t\right)$.

Для точек, лежащих в плоскости $x = 0$, колебания имеют вид:

$$\xi\left(0, t\right) = A\cos\left(\omega \cdot t + \alpha\right).$$

До плоскости с координатой x колебания распространятся за время $\tau = \dfrac{x}{v}$. Колебания частиц на этой плоскости отстают по времени на τ от колебания частиц в плоскости $x = 0$ и имеют вид:

$$\xi\left(x, t\right) = A \cdot \cos\left[\omega\left(t - \tau\right) + \alpha\right] = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right].$$

Волны в упругой среде

Уравнение плоской и сферической волны

Итак, уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении x, имеет вид:

$$\xi(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha\right],$$

где A – амплитуда волны, ω - циклическая частота, $\varphi = \omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha$ - фаза, α - начальная фаза.

Предположим, что амплитуда одинакова во всех точках и зафиксируем фазу $\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha = const.$

Возьмем производную по времени от обеих частей равенства:

$$\frac{d}{dt}\left(\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha = const\right) = 1-\frac{1}{v}\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt},$$

$\frac{dx}{dt}$ – скорость перемещения данного значения фазы.

Волны в упругой среде

Уравнение плоской и сферической волны

Следовательно $v = \dfrac{dx}{dt}$ – фазовая скорость.

Придадим уравнению другой вид.

Рассмотрим $$\frac{\omega \cdot x}{v} = \frac{2\pi \cdot \nu \cdot x}{v} = \frac{2\pi}{v \cdot T} x = \frac{2\pi}{\lambda} x.$$

Величина $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{v}$ называется волновым числом.

Тогда уравнение $\xi(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right) + \alpha\right]$ принимает вид:

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - k x + \alpha).$$

Это волна распространяется в положительном направлении оси x. Для отрицательных направлений

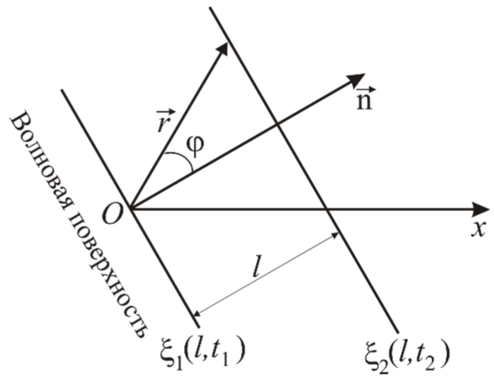
$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t + k x + \alpha).$$

Волны в упругой среде

Уравнение плоской и сферической волны

Для произвольного направления l имеем:

$$\xi(l,t) = A\cos(\omega t - kl + \alpha).$$



Введем единичную нормаль $\vec{n}$. В направлении луча: $\vec{n}\cdot\vec{r} = r\cdot\cos\alpha = l.$

Таким образом, $k\cdot l = k\cdot\vec{n}\cdot\vec{r} = \vec{k}\cdot\vec{r}$, где

$$k\cdot\vec{n} = \vec{k}.$$

$\vec{k}$ – волновой вектор, модуль которого $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$. Направление $\vec{k}$ совпадает с направлением распространения волны.

Итак получим $\xi(\vec{r},t) = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha\right).$

Это уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении $\vec{r}$. Это функция дает смещение из положения равновесия точки с радиусом-вектором $\vec{r}$ в момент времени t.

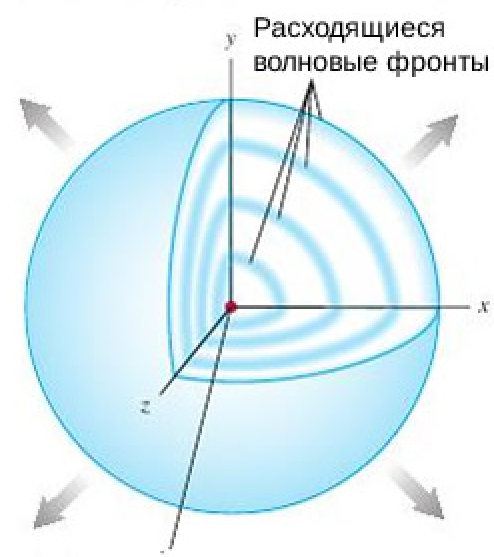
Волны в упругой среде

Уравнение плоской и сферической волны

2. Уравнение сферической волны

Сферической является волна распространяющаяся от точечного источника.

Если фаза источника $\omega \cdot t + \alpha$, тогда фаза колебаний точек, лежащих на волновой поверхности радиуса r будет:



$$\omega\left(t - r/v\right) + \alpha = \omega t - \frac{\omega}{v} \cdot r + \alpha = \omega t - k \cdot r + \alpha.$$

Амплитуда сферической волны, даже если энергия не поглощается средой, убывает с расстоянием от источника по закону $1/r$:

$$\xi(r,t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - k \cdot r + \alpha).$$

Волны в упругой среде

Волновое уравнение

Волновым называется уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

где $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\Delta -$ оператор Лапласа.

Поэтому волновое уравнение принимает вид:

$$\Delta\xi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

v - фазовая скорость распространения волны. Такие уравнение справедливы для недиспергирующих сред.

Убедимся в его справедливости на примере плоской волны:

$$\xi\left(\vec{r},t\right)=A\cos\left(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z+\alpha\right).$$

Волны в упругой среде

Волновое уравнение

Возьмем первую и вторую производную по времени от обеих частей равенства:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\Big(A\cos\big(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z+\alpha\big)\Big)=-A\omega\sin\big(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z+\alpha\big),$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\Big(-A\omega\sin\big(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z+\alpha\big)\Big)=-A\omega^2\cos\big(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z+\alpha\big).$$

Сравнивая полученный результат с уравнением плоской волны

$\xi\left(\vec{r},t\right)=A\cos\big(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z+\alpha\big)$ следует что

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\omega^2\xi\Rightarrow\xi=-\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

Продифференцируем дважды по каждой переменной x, y, z уравнение плоской волны

Волны в упругой среде

Волновое уравнение

Продифференцируем дважды по каждой переменной x, y, z уравнение плоской волны:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\cos\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha\right)\right) = -A\cdot k_x \sin\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha\right),$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-A\cdot k_x \sin\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha\right)\right) = -A\cdot k_x^2 \cos\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha\right).$$

Сравнивая полученный результат с уравнением плоской волны

$\xi\left(\vec{r},t\right) = A\cos\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha\right)$ следует что

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 \xi.$$

Аналогично для переменных y и z можем писать

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 \xi \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 \xi.$$

Волны в упругой среде

Волновое уравнение

Сложим последние три уравнения и получим

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=-\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)\xi \Rightarrow \Delta\xi=-k^2\xi.$$

Сравнивая уравнения $\xi=-\dfrac{1}{\omega^2}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ и $\xi=-\dfrac{1}{k^2}\cdot\Delta\xi$ получим

$$\Delta\xi=\frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$ - волновое уравнение.

Данное уравнение справедливо, если $\dfrac{k^2}{\omega^2}=\dfrac{1}{v^2}$. Для плоской волны действительно $v=\dfrac{\omega}{k}$.

Волновое уравнение описывает любую волну, для которой скорость распространения не зависит от частоты.

Волны в упругой среде

Энергия упругой волны. Вектор Умова

Среда, в которой распространяется упругая волна, обладает дополнительной механической энергии (энергией возбуждаемых гармонических колебаний).

Эта энергия доставляется от источника колебаний в разные точки среды самой волной. Следовательно, волна переносит с собой энергию.

Энергия гармонического колебания описывается уравнением

$$W = \frac{1}{2} A^2 \cdot \omega^2 \cdot m.$$

Среднее значение объемной плотности энергии равно

$$\langle w \rangle = \frac{W}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2,$$

где ρ – плотность объема ΔV.

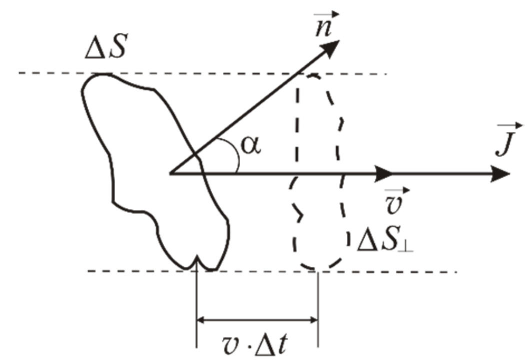
Важной характеристикой переносимой энергии является вектор плотности потока энергии $\vec{J}$.

Волны в упругой среде

Энергия упругой волны. Вектор Умова

Вектор плотности потока $\vec{J}$ численно равен энергии, переносимой через единичную площадку, нормальную к направлению переноса энергии, за единицу времени:

$$J = \frac{\Delta W}{\Delta S_{\perp} \cdot \Delta t}.$$



Через площадку за время Δt будет перенесена энергия ΔW заключенная в объеме цилиндра с основанием $\Delta S_{\perp}$ и высотой $v \cdot \Delta t$ (v – фазовая скорость волны).

Если размеры цилиндра достаточно малы для того, чтобы плотность энергии во всех точках цилиндра можно было считать одинаковой, то ΔW можно найти как произведение плотности энергии на объем цилиндра:

$$\Delta W = w \cdot v \cdot \Delta t \cdot \Delta S_{\perp}.$$

Волны в упругой среде

Энергия упругой волны. Вектор Умова

Вектор плотности потока $\vec{J}$ численно равен:

$$\left.\begin{aligned} J &= \frac{\Delta W}{\Delta S_{\perp} \cdot \Delta t} \\ \Delta W &= w \cdot v \cdot \Delta t \cdot \Delta S_{\perp} \end{aligned}\right\} \Rightarrow J = w \cdot v.$$

Это выражение может быть написано в векторной форме:

$$\vec{J} = w \cdot \vec{v}.$$

Вектор плотности потока энергии был введен в рассмотрение в первые физиком Н. А. Умовым и называется вектором Умова.

Он различен в разных точках пространства, а в данной точке изменяется по гармоническому закону. Его среднее значение равно:

$$\left\langle \vec{J} \right\rangle = \left\langle w \right\rangle \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot v^2.$$

Среднее по времени значение плотности потока энергии называется *интенсивностью волны*.

Волны в упругой среде

Энергия упругой волны. Вектор Умова

Если известен $\vec{J}$ во всех точках произвольной поверхности S, то можно вычислить поток Φ через эту поверхность:

$$\Phi = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{или} \quad \left\langle \Phi \right\rangle = \int_S \left\langle \vec{J} \right\rangle \cdot d\vec{S}.$$

Найдем $\left\langle \Phi \right\rangle$ через одну из волновых поверхностей сферической волны

$$\left.\begin{aligned} \left\langle \Phi \right\rangle &= \left\langle \vec{J} \right\rangle \cdot 4\pi \cdot r^2 \\ \left\langle \vec{J} \right\rangle &= \frac{1}{2} \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\langle \Phi \right\rangle = 2\pi \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot v \cdot A_r^2 \cdot r^2.$$

Так как $\left\langle \Phi \right\rangle = const \Rightarrow A_r^2 \cdot r^2 = const,$ следовательно амплитуда незатухающей сферической волны обратно пропорциональна расстоянию r от источника.

Волны в упругой среде

Принцип суперпозиции. Волновой пакет. Групповая скорость

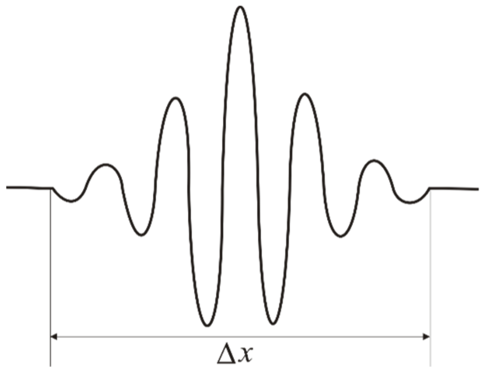
При одновременном распространении нескольких волн амплитуда колебаний, возбуждаемых ими в какой-либо точке среды, равна геометрической сумме каждой из волн в отдельности.

Следовательно, волны просто накладываются друг на друга, не возмущая друг друга. Это принцип суперпозиции. Он нарушается при больших интенсивностях волн.

Суперпозиция гармонических волн, частоты которых заключены в некотором интервале $\Delta\omega$, называется волновым потоком.

Чем больше интервал частот $\Delta\omega$, тем уже волновой пакет, так как

$$\Delta x \cdot \Delta k = 2\pi, \left\{ \Delta k = \frac{\Delta\omega}{v} \right\}.$$



При сложении волн разной частоты нужно учитывать дисперсию, зависимость фазовой скорости волны от частоты $v = f(\omega)$ (или от длины волны $v = f(\lambda)$).

Волны в упругой среде

Принцип суперпозиции. Волновой пакет. Групповая скорость

В отсутствии дисперсии все волны, образующие волновой пакет, распространяется с одинаковой скоростью. С такой же скоростью перемещается и весь пакет, форма пакета сохраняется с течением времени.

В диспергирующей среде пакет с течением времени расплывается. Если дисперсия невелика, расплывание происходит не слишком быстро. В таком случае перемещение пакета характеризуется скоростью, называемой групповой.

Групповая скорость – скорость перемещения точки с максимальным значением амплитуды.

В диспергирующих средах групповая скорость отлично от фазовой.

Волны в упругой среде

Принцип суперпозиции. Волновой пакет. Групповая скорость

В качестве примера рассмотрим волновой пакет, образованным сложением двух волн:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= A\cos(\omega t - kx)\\ \xi_2 &= A\cos\left[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x\right]\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \quad \left\{cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right\}\Rightarrow$$

$$\xi = 2A\cos\left(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x\right)\cos(\omega t - kx).$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение гармонической волны, амплитуда которой равна:

$$A_0 = \left|2A\cos\left(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x\right)\right|.$$

Максимальное значение амплитуды соответствует $\cos\varphi = 1$, т.е. $\varphi = 0$.

Волны в упругой среде

Принцип суперпозиции. Волновой пакет. Групповая скорость

Из выше сказанного следует

$$\frac{d\omega}{2}t-\frac{dk}{2}x_{\max}=0\Rightarrow\quad \frac{x_{\max}}{t}=\frac{d\omega}{dk}\quad \text{и так}\quad u=\frac{d\omega}{dk}.$$

Находим связь между групповой скорости и фазовой скорости

$v=\dfrac{\omega}{k}$:

$$u=\frac{d(vk)}{dk}=v+k\frac{dv}{dk}=v+k\frac{dv}{d\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{dk},$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}\Rightarrow\frac{d\lambda}{dk}=-\frac{2\pi}{k^2}=-\lambda\frac{1}{k}$$

$$u=v-\lambda\frac{dv}{d\lambda}.$$

В отсутствии дисперсии $u=v.$

Энергия волны пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому групповая скорость – это скорость переноса энергии.

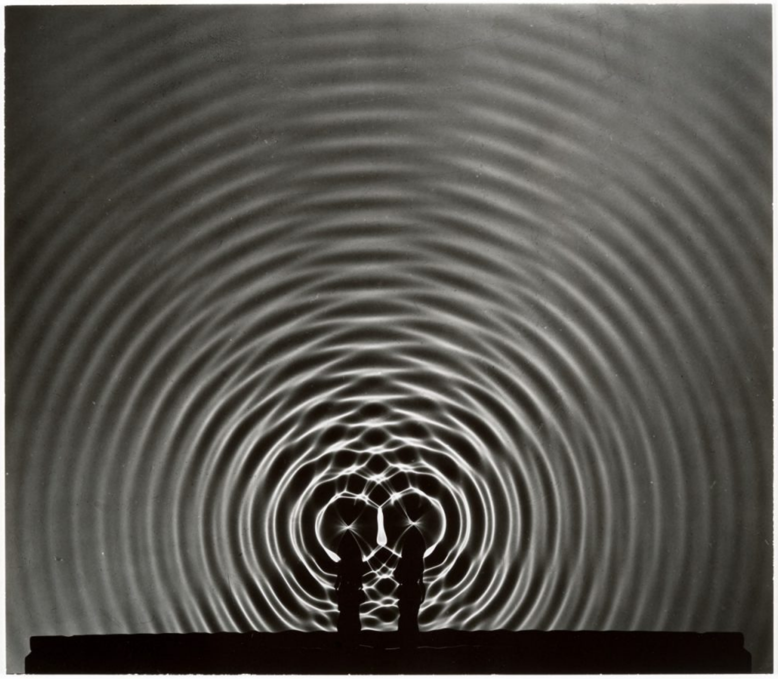
Волны в упругой среде

Интерференция волн. Стоячие волны

Одним из важных явлений, наблюдаемых в одинаковом направлении, является *интерференция волн*.

Если колебания, обусловленные отдельными волнами в каждой точке среды, обладают постоянной разностью фаз, то волны называются *когерентными*.

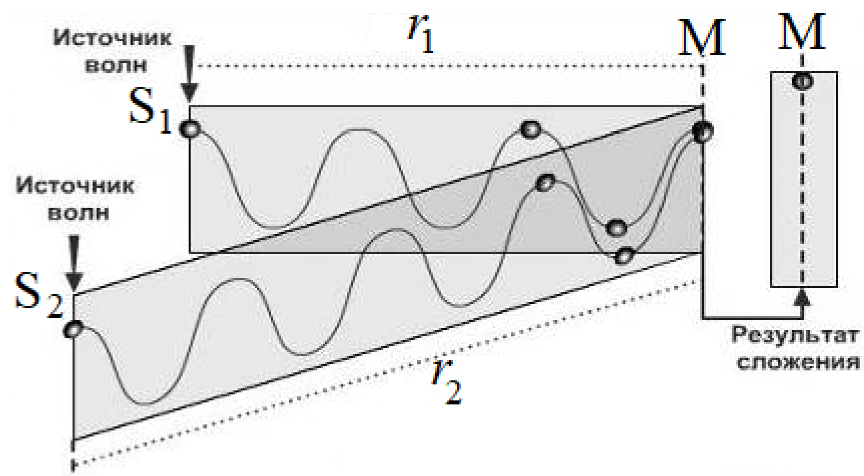
Интерференцией называется явление наложений когерентных волн, при котором происходит устойчивые во времени перераспределение колебаний в пространстве, в результате которого в одних местах колебания усиливаются, в других – ослабляются.



Волны в упругой среде

Интерференция волн. Стоячие волны

Рассмотрим суперпозицию двух гармонических волн, распространяющихся от двух источников S_1 и S_2 в однородной среде



$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 r_1) = A_1 \cos\varphi_1$$

$$\xi_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 r_2) = A_2 \cos\varphi_2$$

Для простоты начальные фазы $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Согласно принципу суперпозиции в точке M будут происходить колебания: $\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos\varphi$, где

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$ а $$\varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 r_2 - k_1 r_1).$$

Если волны некогерентные: $\omega_1 \neq \omega_2$, то $\langle A^2 \rangle = A_1^2 + A_2^2$.

Волны в упругой среде

Интерференция волн. Стоячие волны

Поскольку интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды, то результирующая интенсивность волн равна сумме интенсивностей накладывающийся волн.

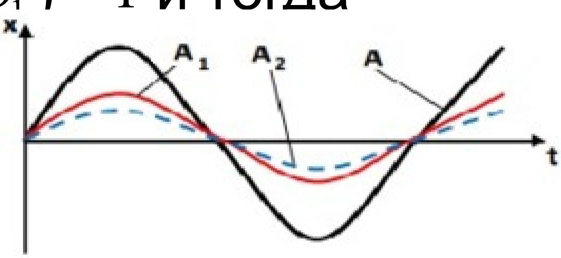
Если волны когерентны, т.е. $\omega_1 = \omega_2 = \omega \Rightarrow k_1 = k_2 = k,$ то получим $\varphi_2 - \varphi_1 = -k\left(r_2 - r_1\right).$

Обозначаем $\left(r_2 - r_1\right) = \Delta -$ геометрическая разность хода и тогда $\varphi_2 - \varphi_1 = -k\Delta.$

Как видно, разность фаз не зависит от времени. В данном случае в точке М будут наблюдаться гармонические колебания, амплитуда которых зависит от $\left(\varphi_2 - \varphi_1\right).$

При $\varphi_2 - \varphi_1 = 2m \cdot \pi \left\{m = 0, 1, 2...\right\} \Rightarrow \cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = 1$ и тогда

$$A^2 = A_1^2 + 2A_1A_2 + A_2^2 \Rightarrow A^2 = \left(A_1 + A_2\right)^2 \Rightarrow$$



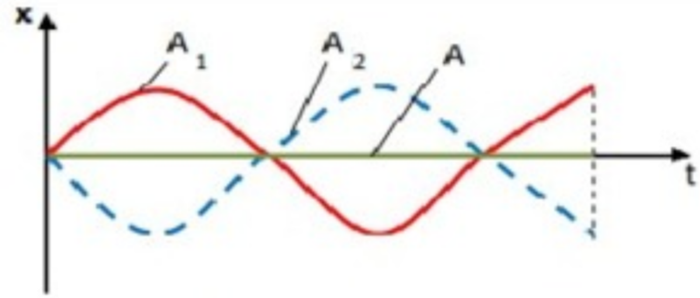
$A = A_1 + A_2$ - амплитуда максимальна.

Волны в упругой среде

Интерференция волн. Стоячие волны

Если $\varphi_2 - \varphi_1 = (2m+1)\pi \, \{m = 0,1,2...\} \Rightarrow \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$ и тогда

$$A^2 = A_1^2 - 2A_1A_2 + A_2^2 \Rightarrow A^2 = (A_1 - A_2)^2 \Rightarrow$$



$A = |A_1 - A_2|$ - амплитуда минимальна.

Для данных случаях соответствует геометрические разности хода:

$$\Delta = \pm\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{k} = \pm\frac{2m\pi}{k} = \pm 2m\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \Delta = \pm 2m\frac{\lambda}{2} \text{ - } max,$$

$$\Delta = \pm\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{k} = \pm\frac{(2m+1)\pi}{k} = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2} \text{ - } min.$$

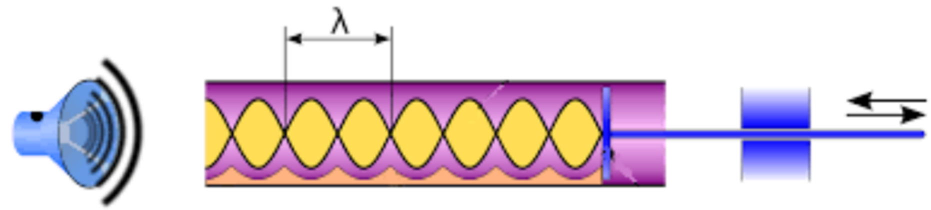
Таким образом, если геометрическая разность кратна четному числу полуволн, то образуется максимум интерференции, если нечетному – минимум.

Волны в упругой среде

Интерференция волн. Стоячие волны

Частным, но очень важным случаем интерференции является *стоячие волны*.

Практически стоячие волны возникают при отражении волн от преград.



Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу отраженная волна, налагая, дают стоячую волну.

Итак, две плоские волны распространяются в противоположных направлениях:

$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx), \xi_2 = A\cos(\omega t + kx)$ (для простоты $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$).

В результате сложения образуется волна

$$\xi = \left|2A\cos kx\right| \cos \omega t.$$

Как видно, амплитуда этой волны изменяется по гармоническому закону, но она не зависит от времени.

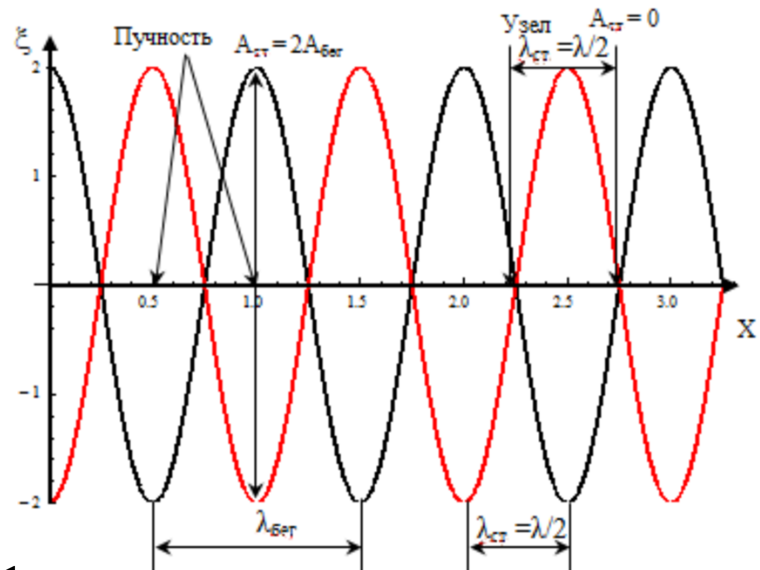
Волны в упругой среде

Интерференция волн. Стоячие волны

Следовательно, положение максимумов и минимумов неподвижны, т.е. скорость распространения волны равна нулю. Поэтому она и называется стоячей волной.

Точки, в которой амплитуда волны максимальна, называется *пучностями*, а в которых амплитуда волны равна нулю – *узлами*.

Найдем их положение. Для этого запишем



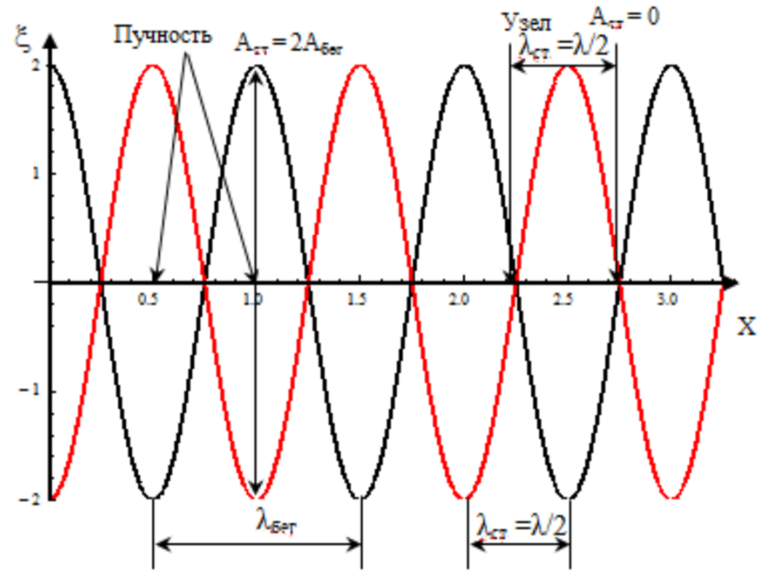
$$A_{cm} = \left|2A\cos\frac{2\pi\cdot x}{\lambda}\right|,\ A_{cm} = 2A \Rightarrow \cos\frac{2\pi\cdot x}{\lambda} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = m\pi\ \{m = 0,1,2...\} \Rightarrow x_{пучн} = m\frac{\lambda}{2}.$$

Волны в упругой среде

Интерференция волн. Стоячие волны

Когда амплитуда стоячей волны минимальна имеем



$$A_{cm} = \left|2A\cos\frac{2\pi\cdot x}{\lambda}\right|,\ A_{cm} = 0 \Rightarrow$$

$$\cos\frac{2\pi\cdot x}{\lambda} = 0 \Rightarrow$$

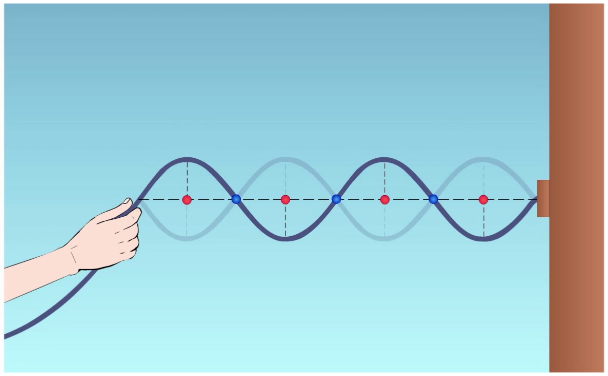
$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow x_{узл} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}.$$

Разность между соседними узлами или пучностями – это длина стоячей волны

$$\lambda_{cm} = (m+1)\frac{\lambda}{2} - m\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda_{cm} = \frac{\lambda}{2}.$$

Волны в упругой среде

Интерференция волн. Стоячие волны



В закрепленной с обоих концов натянутой струне при возбуждении колебаний устанавливается стоячая волна, в точках закрепления струны образуются узлы.

Поэтому в струне возбуждаются только такие колебания, половина длины волны которых укладывается на струне целое число раз:

$$l = m\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda_m = \frac{2l}{m} \;\; \{m = 0, 1, 2 \ldots\} \Rightarrow$$

$$\nu_m = m\frac{v}{2l},$$

где v – фазовая скорость распространения волны, ν_m – собственные частоты, ν_1 (m = 1) – основная частота (гармоника). Колебания струны – наложение разных гармоник.

Волны в упругой среде

Интерференция волн. Стоячие волны

Колебания струны примечательны тем, что для них по классическим представлениям получаются дискретные значения одной из характеристик (частоты). Для классической физики дискретность – исключение. Как правило классические величины могут изменятся непрерывно. В квантовой физике дискретность скорее правило, чем исключение.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Электромагнитные волны

Тема 1: Волновое уравнение электромагнитных волн

Одним из самых важных следствий теории Максвелла является вывод о существовании электромагнитного поля. При изменение во времени электрического поля возникает изменяющееся в пространстве магнитное поля, что приводит к появлению изменяющегося в пространстве электрического поля и наоборот изменяющееся во времени магнитное поле порождает изменяющееся в пространстве электрическое поле, приводит к появлению изменяющееся в пространстве магнитного поля.

Это взаимно зависимость электрического и магнитного полей – следствие явления электромагнитной индукции и наличия тока смещения. Она существует и в отсутствии свободных зарядов и токов проводимости.

Таким образом, если возбудить с помощью колеблющихся зарядов переменное электромагнитное поле, то в окружающем заряды пространстве возникает последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точки. Этот процесс будет происходить периодически во времени и пространстве и, следовательно, представляет собой волну.

Существование электромагнитных волн было впервые предсказано Фарадеем в 1832 году, подтверждено теоретически в 1865 Максвеллом и экспериментально получено Герцем в 1887-1888.

Тема 1: Волновое уравнение электромагнитных волн

Покажем, что из уравнений Максвелла следует волновое уравнение, полученное ранее. В отсутствие свободных зарядов и токов проводимости для сред с $\varepsilon = const$ и $\mu = const$ уравнение Максвелла принимают вид:

$$\left.\begin{array}{ll} rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & rot\,\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ div\,\vec{D} = 0, & div\,\vec{B} = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

и $$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H} \qquad (2)$$

С учетом уравнений (2) соотношении (1) принимают вид:

$$\left.\begin{array}{ll} rot\,\vec{E} = -\mu\mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}, & rot\,\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ div\,\vec{E} = 0, & div\,\vec{H} = 0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Электромагнитные волны

Тема 1: Волновое уравнение электромагнитных волн

Применим оператор rot к первому уравнению (3):

$$rot\left(rot\,\vec{E}\right) = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(rot\,\vec{H}\right)$$

или $rot\left(rot\,\vec{E}\right) = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ $\left\{ rot\,\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\}$

Напомним, что $rot\,\vec{A} = \left[\vec{\nabla}\,\vec{A}\right]$; $div\,\vec{A} = \vec{\nabla}\,\vec{A}$, а $\left[\vec{a}\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a}\,\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)$.

Тогда: $rot\,rot\,\vec{E} = \left[\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\vec{E}\right]\right] = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\,\vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E} \Rightarrow \left\{\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\,\vec{E}\right) = 0\right\} \Rightarrow$

$$rot\,rot\,\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$$

С учетом этого запишем $-\nabla^2\,\vec{E} = -\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ или $\Delta\,\vec{E} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ (4).

Тема 1: Волновое уравнение электромагнитных волн

Аналогично $$\Delta \vec{H} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (5).$$

Видно, что уравнении (4) и (5) совпадают с дифференциальным волновым уравнением

$$\Delta\xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

если $$\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 = \frac{1}{\upsilon^2}$$

или $$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}} \Rightarrow \upsilon = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 3\cdot 10^8\ \frac{м}{c}. \qquad (6)$$

Электромагнитные волны

Тема 2: Характеристики электромагнитных волн

1) Скорость электромагнитных волн в вакууме равна скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. В самом деле,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Этот результат позволил Максвеллу выдвинуть гипотезу об электромагнитной природе света.

2) Любой электромагнитный волновой процесс может быть представлен как суперпозиция плоских монохроматических электромагнитных волн.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\,\vec{r} + \alpha\right)$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\,\vec{r} + \alpha\right) \qquad (7)$$

или в комплексной форме

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cdot e^{i\left[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha\right]}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 \cdot e^{i\left[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha\right]} \qquad (8).$$

Тема 2: Характеристики электромагнитных волн

При подстановке (7) или (8) в (4) и (5) убедимся, что они являются решением волнового уравнения, при этом фазовая скорость волны равна

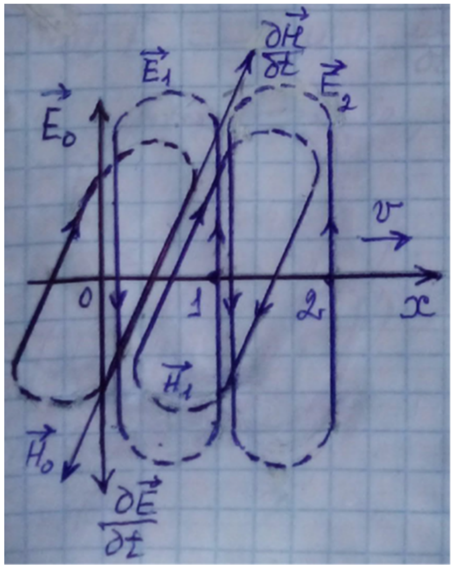
$$v = \frac{\omega}{k} \quad (9).$$

3) Электромагнитная волна непременно состоит из двух полей: электрического и магнитного.

4) Электромагнитные волны поперечны.

Пункты 3) и 4) непосредственно следуют из уравнений Максвелла:

$$rot\,\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad rot\,\vec{H} = \varepsilon\,\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$



Пусть в некоторой точке О создано электрическое поле $\vec{E}_0$. Если его специально не поддерживать, то оно будет убывать, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ направлен вниз. Линии магнитного поля $\vec{H}_0$ направлен по часовой стрелки. Это поле $\vec{H}_0$ также будет убывать, оно создает вихревое электрическое поле $\vec{E}_1$. Линии $\vec{E}_1$ направлены против часовой стрелки.

Электромагнитные волны

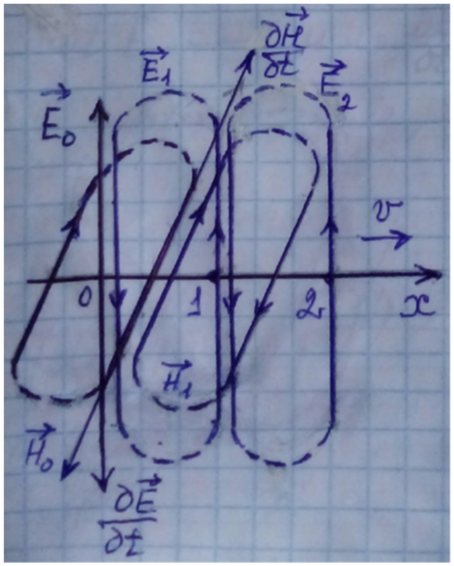
Тема 2: Характеристики электромагнитных волн

Поле $\vec{E}_1$ уничтожит поле $\vec{E}_0$ в точке О но появится в соседней точке 1. Исчезая в точке 1, $\vec{E}_1$ приведет к появлению магнитного поля $\vec{H}_1$, которое уничтожит поле $\vec{H}_0$ и обнаружится в более удаленной точке и т.д.

Таким образом вместо первоначального поля $\vec{E}_0$ мы получим электрическое и магнитное поля, взаимно связанные друг с другом и распространяющиеся в пространстве, т.е. электромагнитную волну.

Как видно, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны, причем оба перпендикулярны скорости распространения волны.

Этот результат непосредственно следует из уравнений Максвелла.



Для плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль *X* производная по *Y* и по *Z* равны нулю. Получаем, что составляющие полей E_x и H_x не зависит ни от *X*, ни от *t*.

Остаются уравнения

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}; \qquad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad (10)$$

Тема 2: Характеристики электромагнитных волн

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}; \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \qquad (11)$$

Если первоначально создано поле E_y, то это поле создает магнитное H_z, изменение которого создает поле E_y и т.д. Ни поле E_z, ни H_y при этом не возникают.

Возьмем: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_z}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad (12)$$

и $$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \qquad (13).$$

Это волновое уравнение, если $\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 = \frac{1}{v^2}$.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Электромагнитные волны

Тема 2: Характеристики электромагнитных волн

Простейшим решением этих уравнений являются:

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha) \qquad (14)$$

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha) \qquad (15)$$

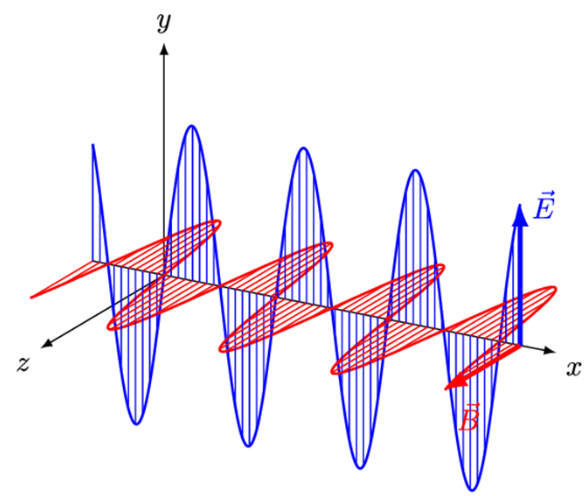
При подставки (14) и (15) в (10) мы получим $E_m\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_m\sqrt{\mu\mu_0}$ (16).

Колебания электрического и магнитного векторов происходят с одинаковой частотой и синфазно (α_1 и α_2).

В векторном виде электромагнитная плоская волна имеет вид

$$\vec{E} = E_m \cos(\omega t - kx); \quad \vec{H} = H_m \cos(\omega t - kx). \qquad (17)$$

Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ образуют с направлением скорости $\vec{v}$ правовинтовую систему:



Тема 3: Энергия электромагнитных волн

Распространение электромагнитных волн сопровождается переносом энергии. Очевидно, эта энергия состоит из энергии электрического и магнитного полей. В отсутствии дисперсии фазовая скорость распространения волны равна v.

Объёмная плотность энергии электромагнитного поля равна

$$\omega = \omega_E + \omega_H = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \qquad (18)$$

С учетом того, что $E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}$ можно написать

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{EH}{2}\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} = \frac{EH}{2v}.$$

Таким образом,

$$\omega = \frac{EH}{v} \qquad (19)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Электромагнитные волны

Тема 3: Энергия электромагнитных волн

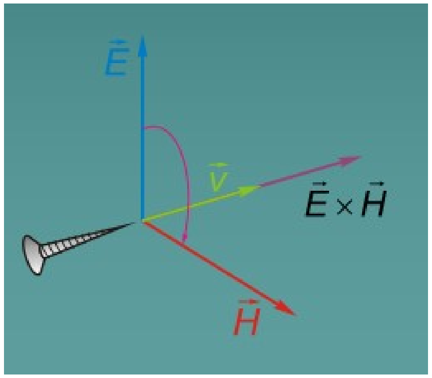
Вектор плотности потока энергии электромагнитной волны называется вектором Пойнтинга

$$S = \omega v = EH \qquad (20)$$

$$\vec{S} = \omega \cdot \vec{v} \qquad (21)$$

Вектор Пойнтинга направлен так же, как вектор $\vec{v}$.

А векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{v}$ связаны правилом правого винта, следовательно



$$\vec{S} = \left[\vec{E} \cdot \vec{H}\right] \qquad (22)$$

Поскольку векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ изменяются со временем по закону косинуса, то модуль вектора $\vec{S}$ изменяется по закону квадрата косинуса. Поэтому

$$\left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle = \frac{1}{2} EH \qquad (23)$$