Колебательное движение
Гармонические колебания и их характеристики

В природе и технике широко распространены колебательные процессы, или колебания.



Колебаниями, или колебательным движением, называется всякое движение или изменение состояния системы, которое характеризуется повторением во времени значений физических величин, определяющих это движение или состояние.

В зависимости от того, какие физические величины колеблются, различают колебания **механические**, **электромагнитные**, **электромеханические** и др.

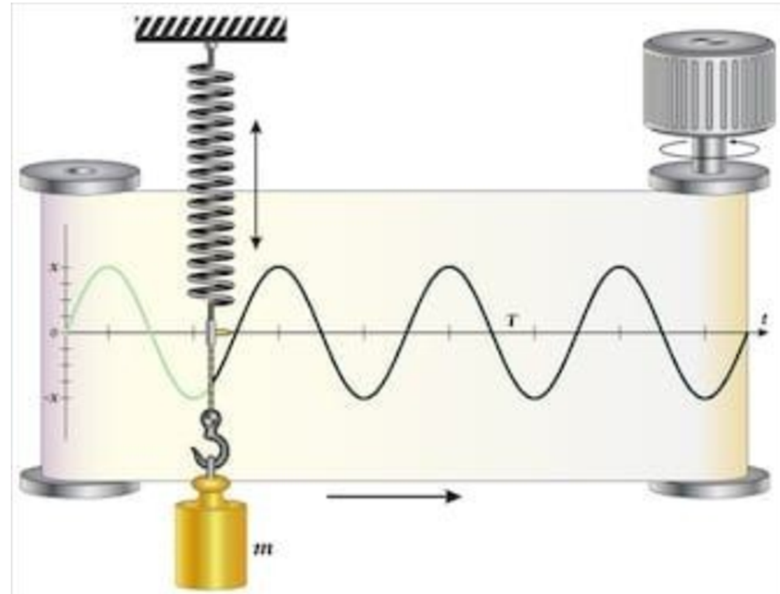
В механических колебаниях, например, повторяются положение, скорость, ускорение и другие физические величины, определяющие состояние тел.

В электромагнитных колебаниях периодически повторяются величины заряда, напряжения и силы тока в электрических цепях с переменным током, напряженностей электрического и магнитного полей вокруг этих цепей.

Колебательное движение

Гармонические колебания и их характеристики

Колебательные процессы качественно различны по своей физической природе, но их количественные закономерности имеют много общего и описываются одними и теми же уравнениями.



Простейшим видом колебаний являются **гармонические колебания**, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса (косинуса).

Гармонические колебания величины $S(t)$ описываются уравнением типа:

$$S(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где A — максимальное смещение колеблющейся величины, называемое **амплитудой колебаний**, ω_0 — **круговая (циклическая) частота**,

$\varphi = (\omega_0 t+\varphi_0)$ – **фаза колебаний** в момент времени t, φ_0 — фаза колебаний в начальный момент времени ($t = 0$).

Колебательное движение
Гармонические колебания и их характеристики

Определенные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени T, называемый **периодом колебания**, за который фаза колебания получает приращение 2π, т. е.

$$\omega_0(t+T)+\varphi_0=\omega_0 t+\varphi_0+2\pi \Rightarrow \omega_0 T=2\pi \Rightarrow \quad T=\frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Величина, обратная периоду колебаний $\nu=\dfrac{1}{T}$, т. е. число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называется **частотой колебаний**.

Сравнивания последние два выражения, получим:

$$\left.\begin{aligned} T&=\frac{2\pi}{\omega_0} \\ \nu&=\frac{1}{T} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega_0=2\pi\nu.$$

Колебательное движение

Дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний

Колебания называются **свободными** (или **собственными**), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему.

Запишем первую и вторую производные по времени от гармонически колеблющейся величины $S(t)$ (скорость и ускорение соответственно):

$$\frac{dS(t)}{dt} = \upsilon(t) = \dot{S}(t) = \frac{d}{dt}\big(A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\big) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(t) = \dot{S}(t) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \upsilon_{\max} = A\omega_0.}$$

$$\frac{d^2 S(t)}{dt^2} = a(t) = \ddot{S}(t) = \frac{d}{dt}\big(-A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)\big) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\boxed{a(t) = \ddot{S}(t) = A\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi\right) \Rightarrow a_{\max} = A\omega_0^2.}$$

Колебательное движение

Дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний

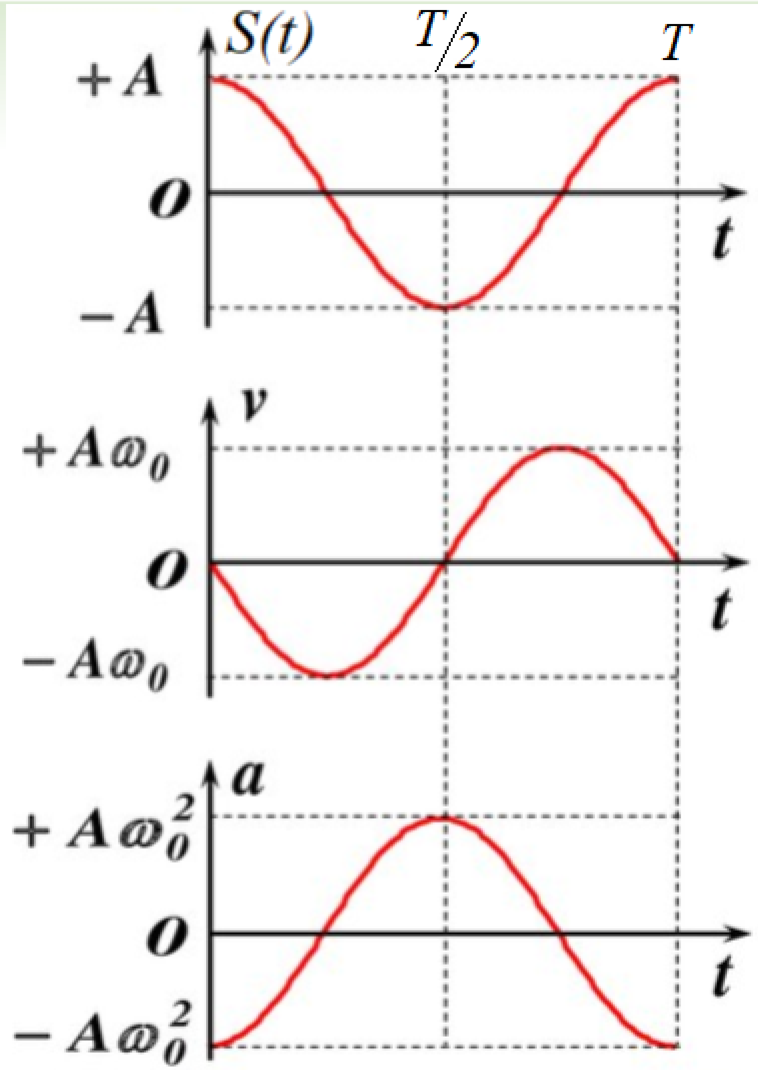
$$\boxed{S(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),}$$

$$\boxed{\upsilon(t) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\boxed{a(t) = A\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi\right)}$$

Фаза скорости $\upsilon(t)$ отличается от фазы $S(t)$ на $\pi/2$, а фаза ускорения $a(t)$ отличается от фазы величины $S(t)$ на π.

Таким образом, колебания скорости опережают колебания $S(t)$ на $\pi/2$, а колебания ускорения опережают колебания $S(t)$ на π, т.е. происходят в противофазе с колебаниями $S(t)$.



Колебательное движение

Дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний

Из сравнения уравнений следует:

$$\left.\begin{aligned} S(t) &= A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) \\ \ddot{S}(t) &= -A\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot{S}(t) = -\omega_0^2 S(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{S}(t) + \omega_0^2 S(t) = 0}$$

Последние уравнение является **дифференциальным уравнением гармонических колебаний**. ***Система, совершающая такие колебания, называется линейным гармоническим осциллятором***.

Сила, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m, согласно второму закону Ньютона равна:

$$\left.\begin{aligned} F &= ma \\ a(t) = \ddot{S}(t) &= -\omega_0^2 S(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F = -m\omega_0^2 S(t).$$

Сила F пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону (к положению равновесия).

Колебательное движение

Дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний

Такая зависимость силы от смещения характерна для упругой силы $F = -k \cdot S(t)$. Поэтому силы иной физической природы, удовлетворяющие тому же виду зависимости, называются **квазиупругими**.

Упругие силы являются консервативными. Работа такой силы при бесконечно малом изменении dS равна убыли потенциальной энергии :

$$\left.\begin{array}{l}\delta A = -dW_П \\ \delta A = F \cdot dS\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}dW_П = -F \cdot dS \\ F = kS\end{array}\right\} \Rightarrow dW_П = -kS \cdot dS \Rightarrow$$

$$W_П = -k\int_0^S S \cdot dS = \frac{kS^2}{2}.$$

Гармоническими называются колебания, которые совершаются под действием квазиупругой силы, их потенциальная энергия пропорциональна S^2.

Колебательное движение
Дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний

Учитывая
$$\left.\begin{aligned} &S(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ &W_П = \frac{kS^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow W_П = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Кинетическая энергия материальной точки с массой m:
$$\left.\begin{aligned} &W_К = \frac{m\upsilon^2}{2} \\ &\upsilon(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow W_К = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Обозначая $m\omega_0^2 = k$, механическая энергия колебательного движения

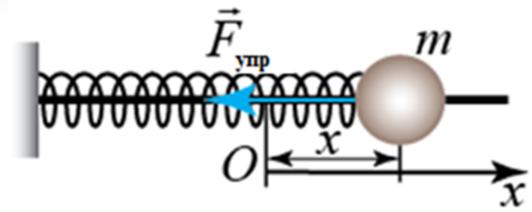
материальной точки примет вид:
$$W = W_К + W_П = \frac{kA^2}{2}(\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)) = \frac{kA^2}{2}.$$

При гармонических колебаниях полная энергия остается неизменной, происходят только взаимные превращения кинетической и потенциальной энергий.

Колебательное движение

Гармонические осцилляторы: пружинный, физический и математический маятники

Пружинный маятник — это груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы $F=-kx$, где k — коэффициент упругости, в случае пружины называемый **жесткостью**.



Уравнение движения маятника:

$$ma = F_{упр.} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

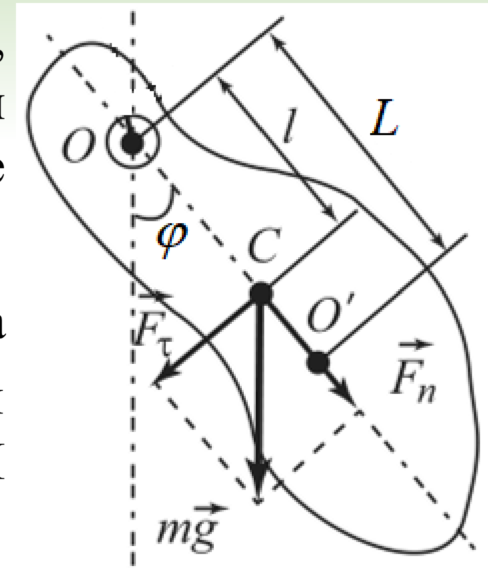
Период колебаний маятника $$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Данная формула справедлива для упругих колебаний, в пределах которых выполняется закон Гука, и масса пружины мала по сравнению с массой груза.

Колебательное движение

Гармонические осцилляторы: пружинный, физический и математический маятники

Физический маятник — это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс C тела.



Если маятник отклонить от положения равновесия на некоторый угол φ, то в соответствии с уравнением динамики вращательного движения твердого тела, момент M возвращающей силы будет равен:

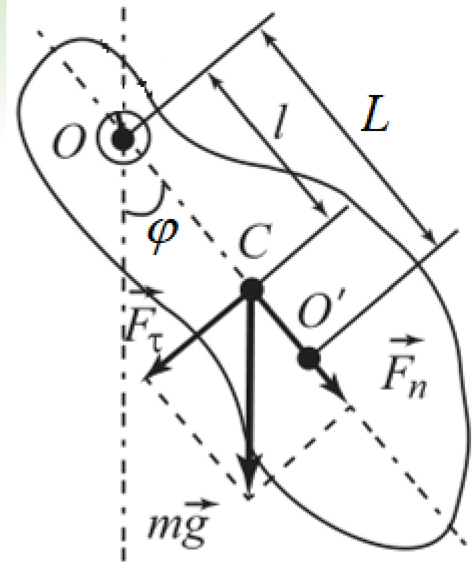
$$\left.\begin{aligned} M &= J\cdot\varepsilon = J\cdot\ddot{\varphi} \\ M &= F_\tau\cdot l = -mgl\sin\varphi \approx \left\{\varphi < 10^\circ\right\} \approx -mgl\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow J\cdot\ddot{\varphi} = -mgl\varphi$$

где J — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку O, l — расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника, F_τ — возвращающая сила (знак минус обусловлен тем, что направления F_τ и φ противоположны).

Колебательное движение

Гармонические осцилляторы: пружинный, физический и математический маятники

$$J\cdot\ddot{\varphi}=-mgl\varphi \Rightarrow J\cdot\ddot{\varphi}+mgl\varphi=0 \Rightarrow \ddot{\varphi}+\frac{mgl}{J}\varphi=0$$



Сравнивая последнее уравнение с $\ddot{S}+\omega_0^2 S=0$ имеем:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{mgl}{J}},$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

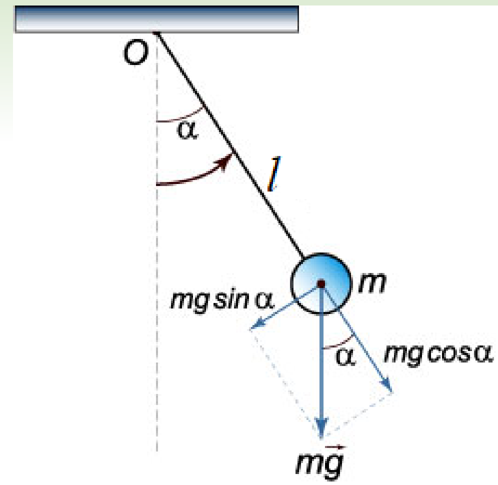
где $L = J/(m\cdot l)$ — **приведенная длина** физического маятника.

Точка O' на продолжении прямой OC, отстоящая от оси подвеса на расстоянии приведенной длины L, называется **центром качаний** физического маятника.

Колебательное движение

Гармонические осцилляторы: пружинный, физический и математический маятники

Математический маятник — частный случай физического маятника, масса которого сосредоточена в одной точке — центре масс.



Момент инерции математического маятника $J = ml^2$

где l — длина маятника.

Из формулы периода физического маятника следует:

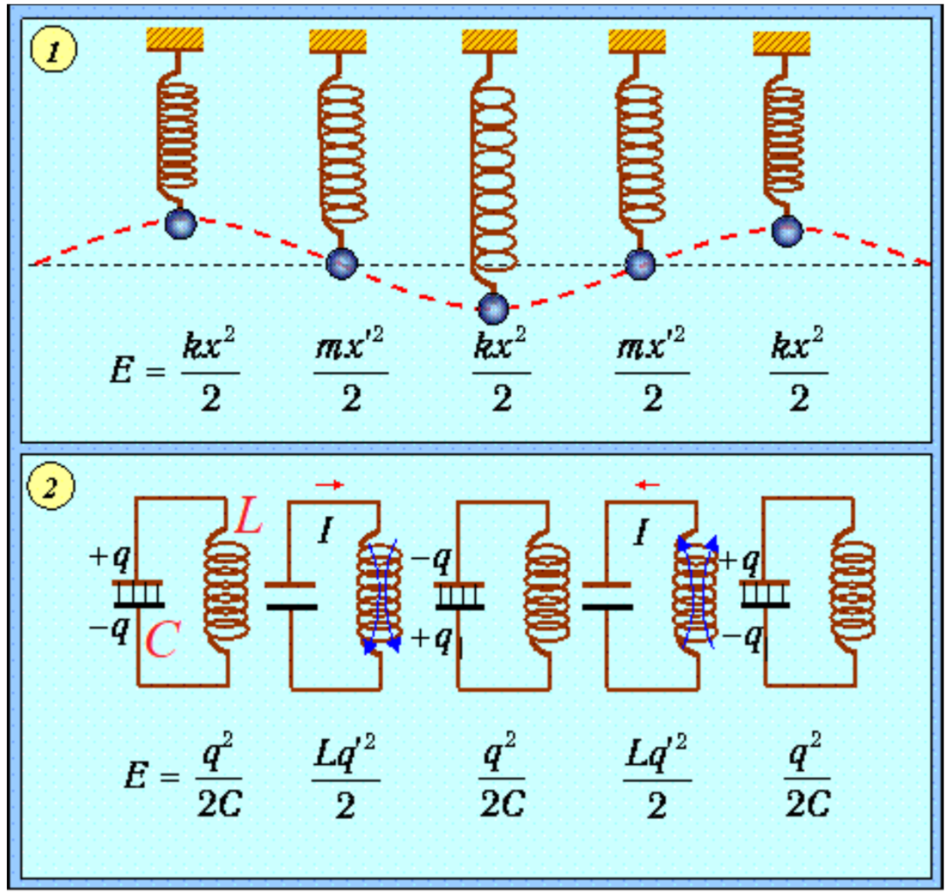
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Сравнивая формулы для периода колебаний физического и математического маятника, видим, что *приведенная длина физического маятника —это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний физического маятника*.

Колебательное движение

Гармонические осцилляторы: колебательный контур

При изучении механических колебаний было установлено, что они сопровождаются непрерывным превращением потенциальной энергии осциллятора в кинетическую и обратно.



Замкнутый контур, состоящий из конденсатора C и катушки индуктивности L, называемый **колебательным контуром**, также является источником колебаний, но сопровождаемых превращениями энергии электрического поля в энергию магнитного поля и обратно.

Такие колебания называются **свободными электромагнитными колебаниями**.

Колебательное движение

Гармонические осцилляторы: колебательный контур

Схожесть электромагнитных и механических колебаний заключается в едином характере изменения величин, их описывающих, и объясняется аналогичностью условий, необходимых для их возникновения.

В таблице представлены механические и электрические физические величины, а также соответствие между ними для изучаемых колебаний.

Механические колебания		Электромагнитные колебания
Смещение $x = A\cos\omega t$	$\longleftrightarrow$	Заряд $q = q_m \cos\omega t$
Скорость $\upsilon = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$	$\longleftrightarrow$	Сила тока $i = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$
Ускорение $a = \dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$	$\longleftrightarrow$	Скорость изменения силы тока $\dfrac{\Delta i}{\Delta t}$
Сила F	$\longleftrightarrow$	Напряжение U
Масса m	$\longleftrightarrow$	Индуктивность L
Жесткость k	$\longleftrightarrow$	Величина, обратная емкости $1/C$
Потенциальная энергия $kx^2/2$	$\longleftrightarrow$	Энергия электрического поля $q^2/(2C)$
Кинетическая энергия $m\upsilon^2/2$	$\longleftrightarrow$	Энергия магнитного поля $Li^2/2$

Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в контуре:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Решение данного уравнения имеет вид:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

Колебательное движение
Гармонические осцилляторы: колебательный контур

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где q_m — амплитуда колебаний заряда конденсатора с циклической частотой ω_0, называемой **собственной частотой контура**, т. е.

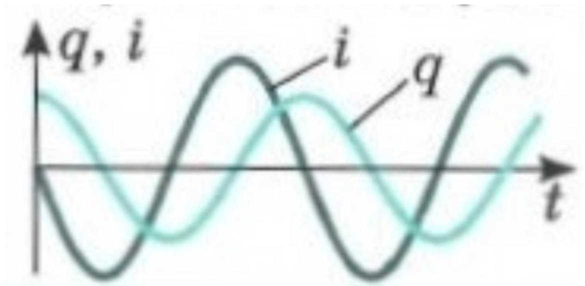
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \qquad \text{и периодом} \qquad T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Сила тока в колебательном контуре

$$I = \dot{q} = -\omega_0 \cdot q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 \cdot q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}).$$

Напряжение на конденсаторе $U_c = \dfrac{q}{C} = \dfrac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$

Таким образом, колебания тока I опережают по фазе колебания заряда q и напряжения U_c на $\pi/2$, т.е., когда ток достигает максимального значения, заряд и напряжение обращаются в нуль, и наоборот.



Колебательное движение

Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения

Часто тело участвует в двух или нескольких колебаниях.

В таких случаях необходимо найти результирующее колебание, иными словами, колебания необходимо сложить.

По принципу суперпозиции эти колебания рассматриваются как независимые, и результирующее смещение находится в каждый момент времени как векторная сумма смещений отдельных колебаний.

В случае сложения колебаний, направленных вдоль одной прямой, результирующее смещение равно алгебраической сумме смещений отдельных колебаний.

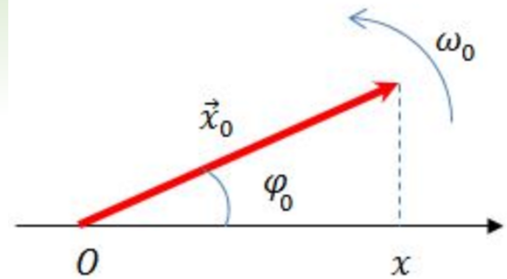
Сложим гармонические колебания одного направления и одинаковой частоты:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2).$$

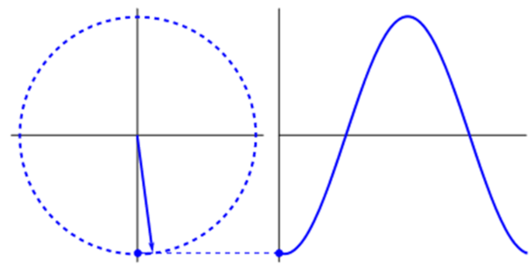
Колебательное движение

Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения

Сложение нескольких гармонических колебаний становится нагляднее, если изображать колебания в виде векторов на плоскости. Полученная таким образом схема называется **векторной диаграммой**.



Гармоническое колебание может быть задано с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебаний, направление вектора образует с осью OX угол, равный начальной фазе колебаний, а угловая скорость вращения вектора равна его циклической частоте.



Координата проекции вектора на ось OX изменяется со временем по закону:

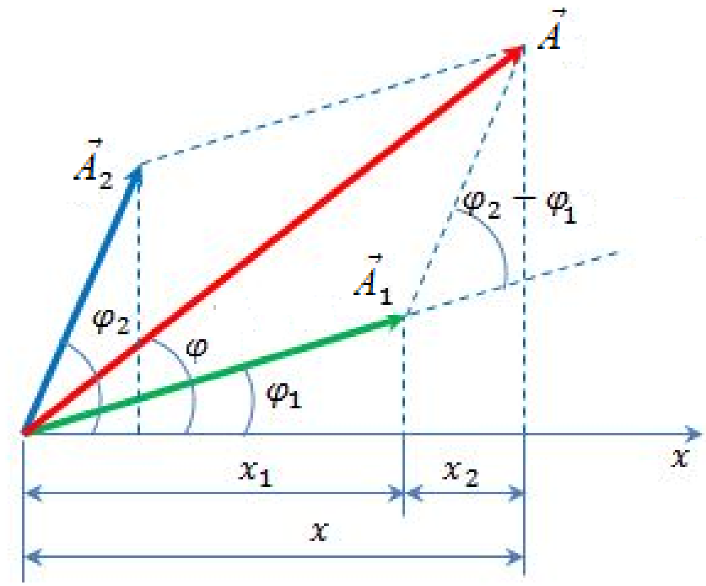
$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Колебательное движение

Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения

Смещение x результирующей колебания равно сумме смещений x_1 и x_2 т.е.

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$



Из рисунка видно, что вектор A представляет собой результирующую амплитуду колебаний. Он вращается с той же угловой скоростью ω_0 и начальной фазой (φ_2-φ_1) . По теореме косинусов

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз (φ_2-φ_1) складываемых колебаний.

Рассмотрим частные случаи:

1) $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm 2m\pi$ (m=0,1,2,…)$\rightarrow$cos $(\varphi_2 - \varphi_1) = 1 \rightarrow A = A_1 + A_2$

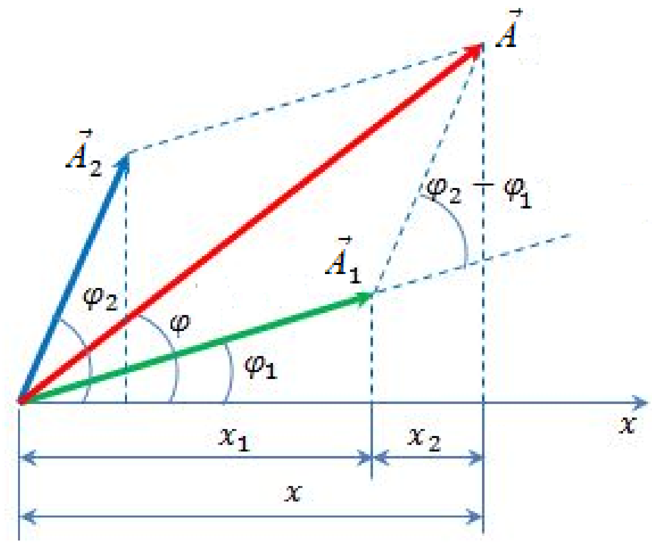
2) $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm(2m+1)\pi$ (m=0,1,2,…)$\rightarrow$cos $(\varphi_2 - \varphi_1) = -1 \rightarrow A = |A_1 - A_2|$

Колебательное движение

Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения

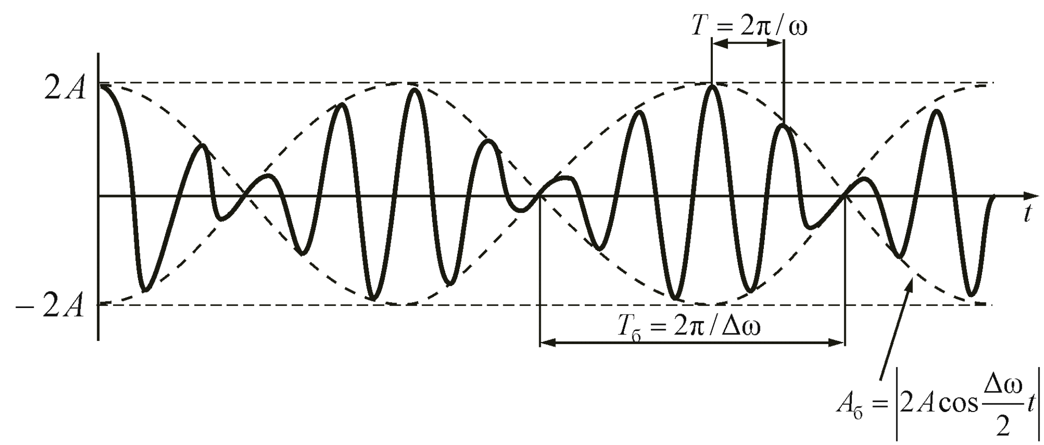
Начальная фаза результирующего колебания определяется из выражения.

$$tg\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}.$$



Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте.

Периодические изменения амплитуды колебания, возникающего при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются **биениями**.



Колебательное движение

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты ω, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей X и Y.

Для простоты начало отсчета выберем так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю:

$$x = A\cos\omega t$$

$$y = B\cos(\omega t + \varphi), \quad где \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

Уравнение траектории результирующего колебания находим, исключая из данных выражений параметр t.

$$\left.\begin{aligned} \cos\omega t &= \frac{x}{A} \\ \cos(\omega t + \varphi) &= \frac{y}{B} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} &\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ &\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Колебательное движение

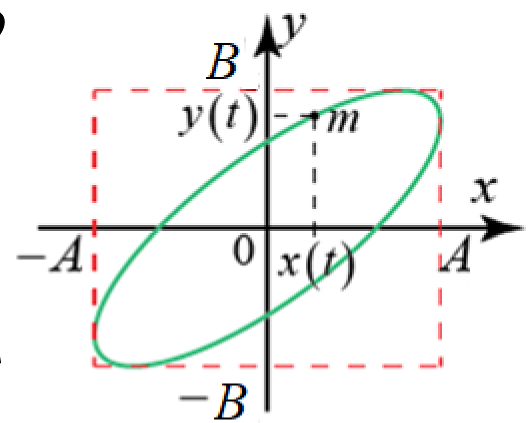
Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{A} &= \cos\omega t \\ \frac{y}{B} &= \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad \left.\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\varphi - \sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}\sin\varphi\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi + \frac{x^2}{A^2}\cos^2\varphi = \left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)\sin^2\varphi \Rightarrow \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi + \frac{x^2}{A^2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \sin^2\varphi$$

$$\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi$$

Траектория результирующего колебания имеет форму **эллипса**, а такие колебания называются **эллиптически поляризованными**.



Ориентация осей эллипса и его размеры зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз φ.

Колебательное движение

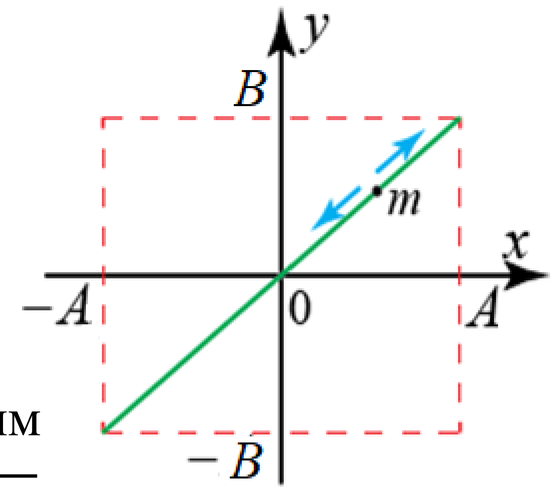
Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим частные случаи.

➢ $\varphi = m\pi$ $(m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$

$$\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \cos\varphi = \pm 1 \\ \sin\varphi = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x}{A} \mp \frac{y}{B} = 0 \Rightarrow$$

$$y = \pm\frac{B}{A}x.$$



В данном случае эллипс вырождается в отрезок прямой.

Результирующее колебание является гармоническим колебанием с частотой ω и амплитудой $A_{рез} = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Такие колебания называются **линейно поляризованными**.

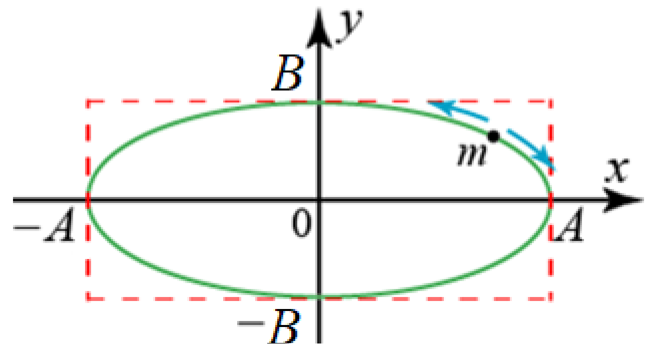
Колебательное движение

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

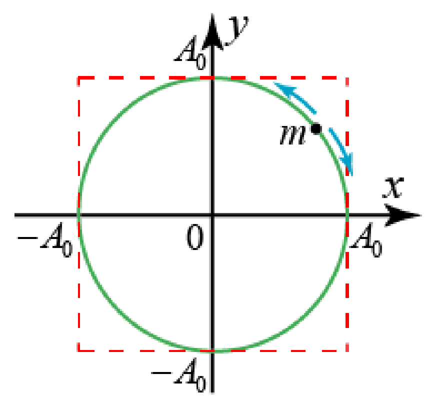
➢ $\varphi = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ *(m=0,±1, ±2, ±3,…)*

$$\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам.



Кроме того, если $A=B=A_0$, то эллипс вырождается в окружность.



Такие колебания называются **циркулярно поляризованными** или **колебаниями, поляризованными по кругу**.

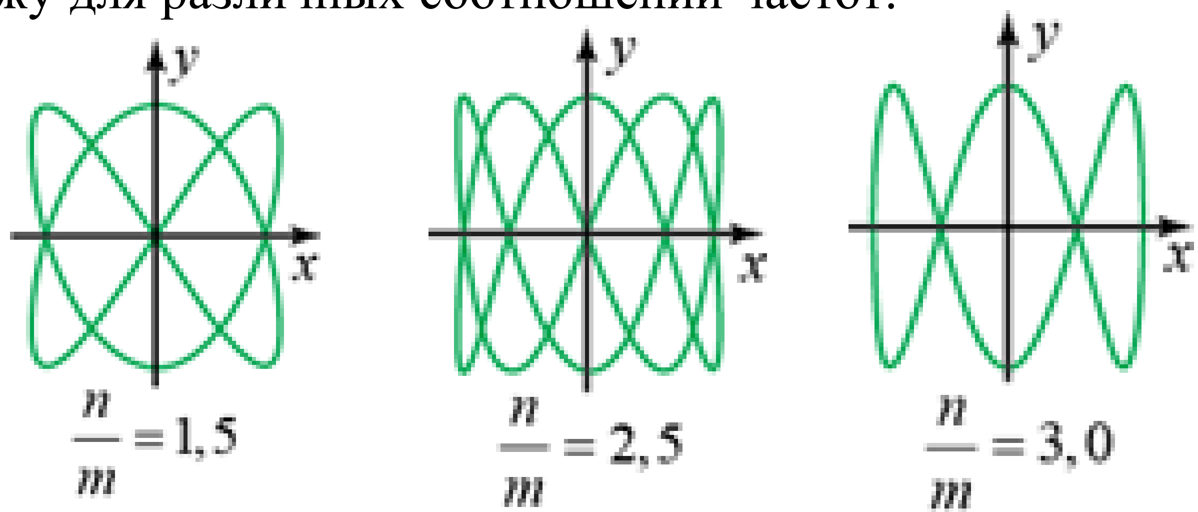
Колебательное движение
Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то замкнутая траектория результирующего колебания довольно сложна.

Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются **фигурами Лиссажу** .

Примеры фигур Лиссажу для различных соотношений частот:

$$\begin{cases} x = A_1 \sin\left(m\omega_0 t + \varphi_1\right), \\ y = A_2 \sin\left(n\omega_0 t + \varphi_2\right), \end{cases}$$



Затухающие и вынужденные колебания
Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

Собственные колебания, рассмотренные ранее без учета сил сопротивления, представляют собой идеализацию свободных колебаний.

В реальных условиях на колеблющуюся систему всегда действуют силы сопротивления.

При этом часть энергии упорядоченного движения системы переходит в энергию неупорядоченного движения (тепловую). Этот процесс называется **диссипацией (рассеянием) энергии**, а колеблющаяся система – **диссипативной.**

Поскольку энергия осциллятора прямо пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, то при ее убыли уменьшается и амплитуда.

Колебания, амплитуда которых уменьшается со временем, называются **затухающими колебаниями**.

Затухание обусловлено в основном трением (механические системы) и сопротивлением (в электромагнитных колебательных контурах).

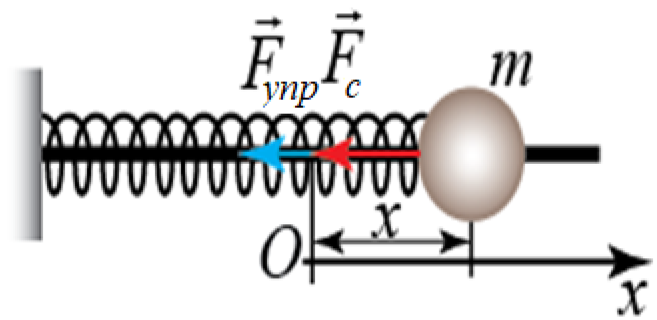
Затухающие и вынужденные колебания
Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

Закон затухающих колебаний определяется свойствами колебательных систем.

Обычно рассматривают **линейные системы** — идеализированные реальные системы, в которых параметры, определяющие физические свойства системы, в ходе процесса не изменяются.

Линейными системами являются, например, пружинный маятник при малых растяжениях пружины (когда справедлив закон Гука), колебательный контур, индуктивность, емкость и сопротивление которого не зависят ни от тока в контуре, ни от напряжения.

Получим дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний на примере реального пружинного маятника, совершающего колебания в среде с сопротивлением (простейший случай - трение о воздух).



Пусть масса маятника m, коэффициент упругости пружины k, сила сопротивления, действующая на маятник, $F_c = -r\upsilon$, υ - скорость маятника, r - коэффициент сопротивления среды, в которой находится маятник.

Затухающие и вынужденные колебания
Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

Второй закон Ньютона в нашем случае запишется так:

$$ma = -F_{упр} - F_c \Rightarrow m\ddot{S} = -kS - r\dot{S} \Rightarrow m\ddot{S} + r\dot{S} + kS = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{S} + \frac{r}{m}\dot{S} + \frac{k}{m}S = 0 \Rightarrow \qquad \ddot{S} + 2\beta\dot{S} + \omega_0^2 S = 0.$$

Это и есть **дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы**, где S — колеблющаяся величина, описывающая тот или иной физический процесс, $2\beta = \frac{r}{m} = const$ — **коэффициент затухания**, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – циклическая частота свободных незатухающих колебаний колебательной системы. Она называется **собственной частотой** колебательной системы.

Решение уравнения рассмотрим в виде

$$S(t) = \lambda(t)e^{-\beta t}.$$

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

Дифференцируя функцию $S(t)$, получаем:

$$\dot{S}=\frac{d}{dt}(\lambda e^{-\beta t})=\dot{\lambda}e^{-\beta t}-\lambda\beta e^{-\beta t}=e^{-\beta t}\left(\dot{\lambda}-\lambda\beta\right);$$

$$\ddot{S}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\lambda}e^{-\beta t}-\lambda\beta e^{-\beta t}\right)=\ddot{\lambda}e^{-\beta t}-\dot{\lambda}\beta e^{-\beta t}-\dot{\lambda}\beta e^{-\beta t}+\lambda\beta^2 e^{-\beta t}\Rightarrow$$

$$\ddot{S}=e^{-\beta t}\left(\ddot{\lambda}-2\dot{\lambda}\beta+\lambda\beta^2\right).$$

Подставляя эти выражения в **дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний,** получаем:

$$e^{-\beta t}\left(\ddot{\lambda}-2\dot{\lambda}\beta+\lambda\beta^2\right)+2\beta e^{-\beta t}(\dot{\lambda}-\lambda\beta)+\omega_0^2 e^{-\beta t}\lambda=0\Rightarrow$$

$$\ddot{\lambda}-2\dot{\lambda}\beta+\lambda\beta^2+2\dot{\lambda}\beta-2\lambda\beta^2+\omega_0^2\lambda=0\Rightarrow$$

$$\ddot{\lambda}-\lambda\beta^2+\omega_0^2\lambda=0\Rightarrow$$

Затухающие и вынужденные колебания
Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\ddot{\lambda}+\left(\omega_0^2-\beta^2\right)\lambda=0.$$

Решение данного уравнения зависит от знака коэффициента перед искомой величиной λ. Рассмотрим случай, когда этот коэффициент положителен:

$$\omega^2=\omega_0^2-\beta^2>0.$$

Тогда получим уравнение типа:

$$\ddot{\lambda}+\omega^2\lambda=0,$$

решением которого является функция

$$\lambda(t)=A_0\cos(\omega t+\varphi).$$

Таким образом, решение **дифференциального уравнения свободных затухающих колебаний** в случае малых затуханий $\omega_0^2\gg\beta^2$:

$$S(t)=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi),$$

где $A=A_0e^{-\beta t}$ – **амплитуда затухающих колебаний**, а A_0 — начальная амплитуда.

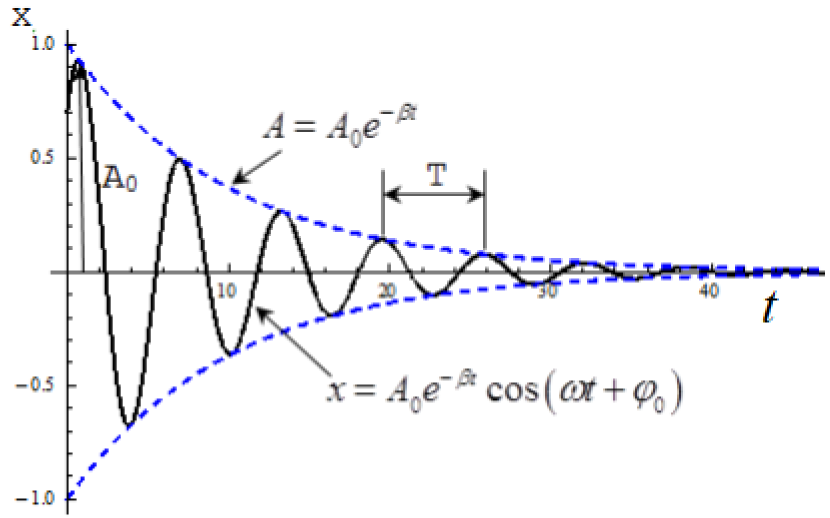
Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – **циклическая частота** затухающих колебаний.

Период затухающих колебаний: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$.

Затухающие колебания при строгом рассмотрении не являются периодическими. Поэтому о периоде затухающих колебаний можно говорить, когда β мало.

Затухающие колебания можно рассматривать как гармонические колебания, амплитуда которых изменяется по экспоненциальному закону $A = A_0 e^{-\beta t}$.



Характеристики затухающих колебаний

Если $A(t)$ и $A(t+T)$ — амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, то отношение

$\dfrac{A(t)}{A(t+T)}$ – называется **декрементом затухания**, а его логарифм

$\delta = \ln\dfrac{A(t)}{A(t+T)}$ – **логарифмическим декрементом затухания**.

Используя $A = A_0 e^{-\beta t}$ получим:

$$\delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta (t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T \Rightarrow$$

$$\delta = \beta T.$$

Затухающие и вынужденные колебания
Характеристики затухающих колебаний

Промежуток времени τ, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз, называется **временем релаксации**.

Если $A = A_0 e^{-\beta\tau}$ и $\frac{A_0}{A} = e$ тогда $e = e^{\beta\tau} \Rightarrow \beta\tau = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\tau}.$

Следовательно, коэффициент затухания β - это физическая величина, обратная промежутку времени τ, в течение которого амплитуда убывает в e раз.

Пусть N — число колебаний, после совершения которых амплитуда уменьшается в e раз. Тогда

$$\tau = NT,\ \delta = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}.$$

Следовательно, логарифмический декремент затухания δ - это физическая величина, обратная числу колебаний N, по истечении которых амплитуда убывает в e раз.

Для характеристики колебательной системы пользуются понятием **добротности**.

Добротностью колебательной системы называется безразмерная величина Q, равная произведению 2π на отношение энергии $W(t)$ колебаний системы в произвольный момент времени t к убыли этой энергии за промежуток времени, равный условному периоду затухающих колебаний:

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}.$$

Так как энергия $W(t)$ пропорциональна квадрату амплитуды, то

$$Q = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = 2\pi \frac{A_0^2 e^{-2\beta t}}{A_0^2 e^{-2\beta t} - A_0^2 e^{-2\beta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta}}.$$

При малых значениях логарифмического декремента затухания $(\delta \ll 1)$ $1 - e^{-2\delta} \approx 2\delta$ добротность колебательной системы

$$Q \approx \frac{\pi}{\delta}.$$

При этом $\omega \approx \omega_0$, т.е. условный период T затухающих колебаний практически равен периоду T_0 свободных незатухающих колебаний, так что

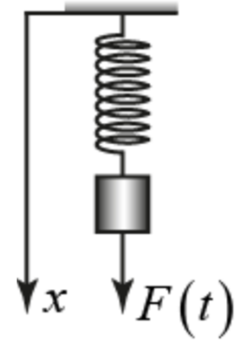
$$Q \approx \frac{\pi}{\delta} \approx \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

Затухающие и вынужденные колебания
Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

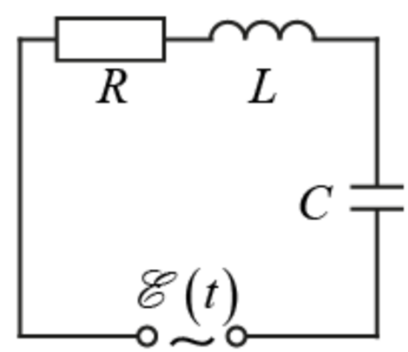
В диссипативной системе энергия колебаний постепенно переходит в энергию хаотического движения атомов и молекул и колебания затухают.

Незатухающие колебания можно получить, если на систему оказывать внешнее периодическое воздействие. В этом случае колебания будут не свободными, а **вынужденными**.

Например, вынужденные механические колебания можно возбудить, если к грузу, подвешенному на пружине, прикладывать периодическую силу $F(t)$, называемую **вынуждающей силой**.



В электрическом осцилляторе роль внешнего воздействия может выполнять переменная э.д.с. $\varepsilon(t)$, включенная в цепь колебательного контура.



Затухающие и вынужденные колебания
Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Таким образом, на осциллятор, совершающий вынужденные колебания, действует периодическое внешнее воздействие.

В частности, это периодическое воздействие может изменяться по гармоническому закону:

$$F(t) = F_0 \cos\omega t, \qquad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos\omega t.$$

С учетом этой силы, закон движения для пружинного маятника запишется в виде:

$$m\ddot{S} = -kS - r\dot{S} + F_0 \cos\omega t \Rightarrow m\ddot{S} + r\dot{S} + kS = F_0 \cos\omega t$$

Используя $2\beta = \dfrac{r}{m}$ и $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, придем к уравнению

$$\ddot{S} + 2\beta\dot{S} + \omega_0^2 S = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

Аналогично, для электрического колебательного контура

$$\ddot{S} + 2\beta\dot{S} + \omega_0^2 S = \frac{\varepsilon_0}{L}\cos\omega t,$$

где $2\beta = \dfrac{R}{L}$ и $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Таким образом, для любого гармонического осциллятора дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$\ddot{S} + 2\beta\dot{S} + \omega_0^2 S = f_0 \cos\omega t,$$

где $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$ – отношение амплитуды вынуждающей силы к массе в механическом осцилляторе, а $f_0 = \dfrac{\varepsilon_0}{L}$ – отношение амплитудного значения внешней вынуждающей э.д.с. к индуктивности в электрическом осцилляторе, ω - частота внешнего воздействия, β и ω_0 - коэффициент затухания и собственная частота осциллятора.

Ищем частное решение в виде:

$$S(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где A- амплитуда установившихся вынужденных колебаний, ω - частота с которой происходят колебания, φ_0 – сдвиг фаз между внешним воздействием и колебанием системы.

Затухающие и вынужденные колебания
Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Задача заключается в нахождении амплитуды A и начальной фазы φ_0.

Запишем первую и вторую производные по времени от гармонически колеблющейся величины $S(t)$ (скорость и ускорение соответственно):

$$\dot{S} = \frac{d}{dt}\left(A\cos(\omega t + \varphi_0)\right) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}),$$

$$\ddot{S} = \frac{d}{dt}\left(-A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)\right) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi).$$

Подставляем полученные уравнении в дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

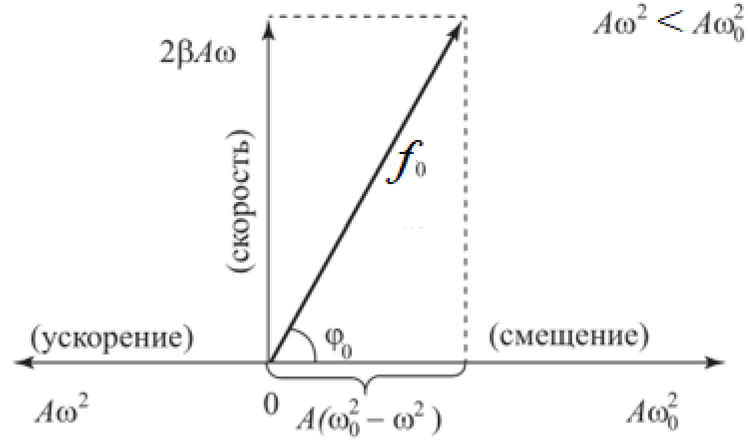
$$A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) + 2\beta A\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) + \omega_0^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = f_0\cos\omega t.$$

Данное уравнение показывает, что сумма трех одинаково направленных гармонических колебаний с амплитудами $A\omega^2$, $2\beta\omega A$, $\omega_0{}^2A$, одинаковой циклической частотой ω и различными начальными фазами $(\varphi_0+\pi)$, $(\varphi_0+\pi/2)$ и φ_0 должна совпадать с гармоническим колебанием, происходящим по закону $f_0\cos\omega t$.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Для сложения этих колебаний воспользуемся методом векторных диаграмм.

Из рисунка видно, что амплитуда A установившихся вынужденных колебаний и сдвиг фаз φ_0 зависят от соотношения между циклической частотой вынужденных колебаний ω и собственных колебаний ω_0, а также от коэффициента затухания β:



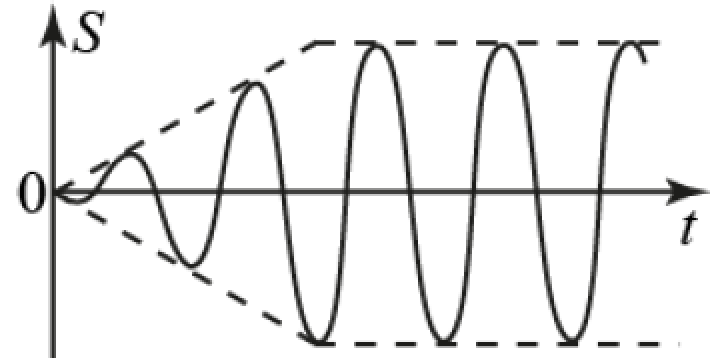
$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \qquad tg\varphi_0 = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний прямо пропорциональна f_0 и уменьшается с увеличением коэффициента затухания β.

Затухающие и вынужденные колебания
Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Процесс установления вынужденных колебаний можно объяснить следующим образом.

Как только осциллятор начнет испытывать внешнее воздействие, его амплитуда начинает расти. С ростом амплитуды колебаний возрастают и потери энергии колебаний.



Однако, через некоторое время, называемое **временем установления** вынужденных колебаний, потери энергии колебаний полностью компенсируются внешним источником энергии и устанавливаются вынужденные колебания с постоянной амплитудой A.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний зависит от частоты ω внешнего воздействия. При некоторой частоте ω, вполне определенной для данного осциллятора, амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения.

Найдем частоту установившихся вынужденных колебаний $\omega_{\text{рез}}$, при которой амплитуда смещения A достигает наибольшего значения.

Из уравнения $A = \dfrac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$ видно, что при $\omega = \omega_{\text{рез}}$ должно быть минимальным подкоренное выражение, т.е.

$$\frac{d}{d\omega}\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right] = 0 \Rightarrow -4\omega_{рез}\left(\omega_0^2 - \omega_{рез}^2\right) + 8\beta^2\omega_{рез} = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

- резонансная циклическая частота.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Из условии $\omega = \omega_{рез}$ имеем, что максимальная амплитуда

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты возмущающей силы к значению $\omega_{рез}$ называется **явлением резонанса**.

Соответственно графики зависимости A от ω называются резонансными кривыми.

По мере увеличения коэффициента затухания β пики на резонансных кривых сглаживаются (при малых β амплитуда $A_{макс}$~$1/\beta$), а резонансная частота ω уменьшается.