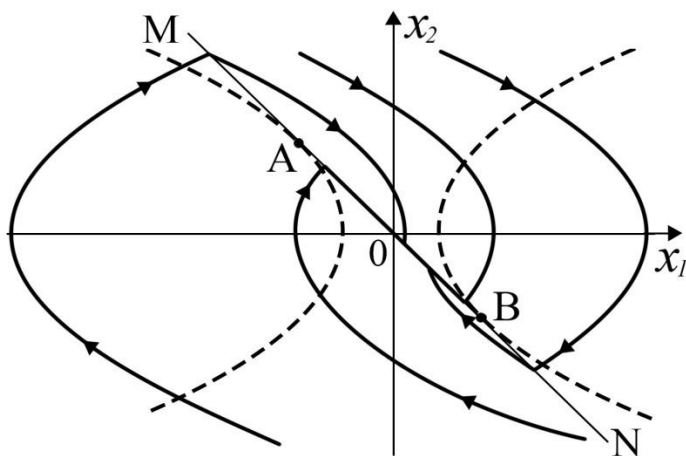


TEORIA SISTEMELOR

Partea 2

Îndrumar de laborator



UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Facultatea Calculatoare, Informatică și Microelectronică

Catedra de Automatică și Tehnologii Informaționale

TEORIA SISTEMELOR

Partea 2

Îndrumar de laborator

Chișinău
Editura "Tehnica-UTM"
2015

CZU 681.5(076.5)

I 99

Îndrumarul de laborator este destinat studenților care își fac studiile cu frecvență la zi la specialitatea 526.3 - *Automatică și Informatică* și studenților cu studiile cu frecvență la zi și frecvență redusă la specialitatea 526.2 - *Tehnologii Informaționale* pentru aprofundarea cunoștințelor la cursul Teoria sistemelor 2.

Îndrumarul include cinci lucrări de laborator în care se vor studia proprietățile elementelor neliniare, discrete, sistemelor automate neliniare și discrete prin simulare pe calculator cu aplicarea pachetelor de programe KOPRAS și MATLAB.

Prin modul de abordare a problemelor propuse se urmărește formarea unor deprinderi necesare pentru studierea proprietăților elementelor neliniare, discrete, sistemelor automate neliniare și discrete la acțiunea semnalelor de referință și perturbații și la modificarea parametrilor elementelor sistemului automat.

Autori: conf. univ., dr. B. IZVOREANU

lector sup., dr. I. FIODOROV

conf. univ., dr. Irina COJUHARI

Redactor responsabil: prof. univ., dr. hab. A. GREMAISCHI

Recenzent: prof. univ., dr. hab. E. GUȚULEAC

DESCRIREA CIP A CAMEREI NAȚIONALE A CĂRȚII

Izvoreanu, B

Teoria sistemelor: Îndrumar de laborator: [în părți] / B. Izvoreanu, I. Fiodorov, I. Cojuhari; red.resp.: A. Gremalschi: Univ. Tehn. a Moldovei, Fac. Calculatoare, Informatică și Microelectronică, Catedra Automatică și Tehnologii Informaționale. – Chișinău: Tehnica-UTM, 2015

ISBN 978-9975-45-331-8.

Partea 2. – 2015.- 60 p. – Bibliogr.: p. 56 (11 tit.) – 50 ex.

ISBN 978-9975-45-332-5.

681.5(076.5)

I 99

Redactor: Eugenia BALAN

Bun de tipar 01.05.15	Formatul hârtiei 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar RISO	Tirajul 50 ex.
Coli de tipar 2,0	Comanda nr. 19

ISBN 978-9975-45-332-5.

© UTM, 2015

Cuprins

Lucrarea 1. Planul fazelor sistemului automat.....	5
Lucrarea 2. Regimul alunecător al sistemului automat.....	12
Lucrarea 3. Corecția sistemelor automate neliniare cu ajutorul elementelor neliniare	19
Lucrarea 4. Analiza sistemelor automate neliniare prin metoda funcției de descriere	23
Lucrarea 5. Analiza sistemelor automate discrete... ..	32
Bibliografie	52
ANEXE	54
Anexa A. Tipuri de neliniarități	54
Anexa B. Proprietățile transformatei z	55
Anexa C. Funcții de timp continue și discrete, imaginea Laplace s și transformata z	57
Anexa D. Funcții de transfer ale elementelor dinamice în transformata Laplace s și transformata z	58

Lucrarea 1

PLANUL FAZELOR SISTEMULUI AUTOMAT

Obiectivul lucrării: studierea metodei de analiză a sistemelor liniare și neliniare în planul fazelor, aprecierea punctelor de echilibru și a ciclurilor-limită în planul fazelor.

1. Noțiuni generale [4-12, 14]

Metoda spațiului fazelor a fost introdusă de Poincare pentru studierea sistemelor mecanice cu unul sau mai multe grade de libertate și de Gibbs la studiul echilibrului chimic. În principiu, se asociază mișcării sistemului considerat un punct care se mișcă simultan cu sistemul într-un spațiu raportat la un sistem de coordonate, alcătuit din variabilele (parametrii) care determină poziția momentană a sistemului și derivatele acestor variabile, denumit spațiul fazelor. Deoarece starea unui sistem fizic de ordinul n , liniar, este complet determinată de variabila de stare aleasă și cele $(n - 1)$ derivate ale acesteia, coordonatele spațiului stărilor sunt $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{n-1}$ și reprezintă variabile de fază. Pentru sistemele cu un singur grad de libertate, spațiul fazelor devine planul fazelor, cu coordonatele x_1 și x_2 - respectiv variabila de ieșire $y = x_1$, caracterizând funcționarea sistemului în regim dinamic și $x_2 = dx_1/dt = \dot{x}_1$ - prima ei derivată în raport cu timpul.

De exemplu, în cazul unui sistem de reglare automată cu parametrul reglat y se aleg variabilele de fază: răspunsul sistemului de reglare automată $y = x_1$ și viteza de variație a răspunsului $dy(t)/dt = dx_1(t)/dt = x_2$. În planul fazelor (x_1, x_2) oricărui punct M îi corespunde o singură stare a sistemului reprezentat. Pentru timpul variabil t , punctul M se deplasează pe o curbă numită *traietorie de fază* (curba din fig. 1.1); această curbă poate fi gradată în valori de timp $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$, permițând

evaluări calitative ale comportării sistemului automat reprezentat. Familia de traiectorii de fază determinate de variația condițiilor inițiale se numește *portret de fază* al sistemului automat.

Desigur, analiza cu ajutorul planului fazelor este limitată la sisteme de ordinul unu sau doi, deoarece derivatele de ordin superior nu pot fi reprezentate grafic, iar un sistem automat de ordin superior nu poate fi complet definit numai prin variabila de stare și prima ei derivată. Având în vedere că, în general, sistemele automate neliniare din multiple aplicații industriale pot fi approximate prin sisteme de ordinul 2, metoda își găsește o anumită aplicabilitate și la studierea acestora.

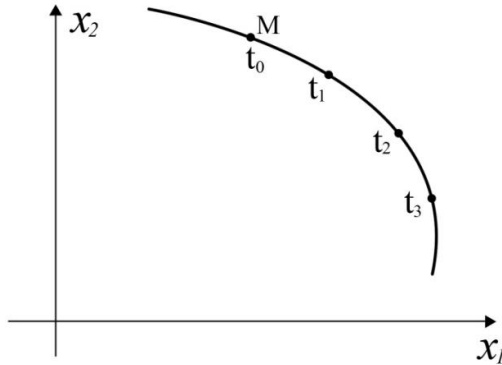


Fig. 1.1. Traiectorie de fază

Fie un sistem automat neliniar de ordinul doi descris cu ecuația:

$$\ddot{y} + f(\dot{y}, y)\dot{y} + g(\dot{y}, y)y = u, \quad (1.1)$$

unde y poate fi mărimea de ieșire a sistemului sau eroarea sistemului ε , funcțiile f și g se consideră funcții analitice (olomorfe), u – mărimea de intrare. Admitem că în (1.1) variabila y este ieșirea sistemului. Introducem variabilele de stare:

$$y = x_1,$$

$$dy/dt = \dot{y} = dx_1/dt = \dot{x}_1 = x_2, \quad (1.2)$$

$$d^2y/dt^2 = \ddot{y} = d^2x_1/dt^2 = \dot{x}_2.$$

Se presupune că ecuația (1.1) admite o singură soluție pentru fiecare pereche de condiții inițiale $x_1(0)$, $x_2(0)$, care poate fi reprezentată printr-o traiectorie de fază unică în planul fazelor (x_1, x_2) .

Expresia (1.1) prin variabile de stare se prezintă în forma:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= \dot{x}_1 = x_2, \\ dx_2/dt &= \dot{x}_2 = -f(x_1, x_2)x_2 - g(x_1, x_2)x_1 + u. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Împărțind ecuația a doua la prima din (1.3) se obține expresia

$$dx_2/dx_1 = -f(x_1, x_2) - g(x_1, x_2)x_1/x_2 + u/x_2, \quad (1.4)$$

care este o ecuație diferențială din care s-a eliminat timpul și care descrie traiectoria de fază a sistemului.

Din expresiile (1.2)-(1.4) se obțin un șir de particularități importante ale planului fazelor:

1. Dacă funcțiile $f(x_1, x_2)x_2$ și $g(x_1, x_2)x_1$ sunt analitice, atunci soluția x_2 este unică în raport cu timpul t în planul (x_1, x_2) și este dictată de condițiile inițiale $x_1(0)$, $x_2(0)$ și de mărimea de intrare $u(t)$. Unicitatea soluțiilor (cu excepția punctelor singulare) în raport cu timpul t indică o traiectorie de fază pentru condițiile inițiale date; printr-un punct al planului fazelor trece o singură traiectorie de fază.

Dacă funcțiile f și g nu sunt analitice, atunci printr-un punct al planului trec mai multe traiectorii de fază. Asemenea puncte se numesc puncte *singulare* sau *critice* ce caracterizează, de asemenea, comportarea unui sistem automat liniar sau neliniar.

2. Pentru cazul când $dx_1/dt = \dot{x}_1 = x_2 > 0$ mărimea lui x_1 crește și constatăm că în partea de sus a planului fazelor pentru timpul t în creștere punctul caracteristic se mișcă pe traiectoria de fază de la stânga la dreapta, iar în semiplanul de jos mișcarea se efectuează de la dreapta la stânga deoarece $dx_1/dt = \dot{x}_1 = x_2 < 0$

și mărimea lui x_1 se micșorează.

3. În punctele $x_1 = 0$ și $f(x_1, x_2) \neq 0$, nu în punctele singulare ale axei absciselor, traiectoriile de fază intersectează axa absciselor sub un unghi drept de sus în jos în semiplanul din dreapta și de jos în sus în semiplanul din stânga.

4. În planul fazelor există puncte de echilibru atunci când $x_1 = 0, f(x_1, x_2) = 0$ sau puncte singulare pe axa absciselor care sunt stabile sau instabile. Dacă toate traiectoriile de fază converg către punctele de echilibru, atunci aceste puncte sunt stabile (fig. 1.2 și 1.4) și, invers, dacă toate traiectoriile de fază pornesc din punctele de echilibru, atunci aceste puncte sunt instabile (fig. 1.3 și 1.5). Dacă traiectoriile de fază din jurul punctelor de echilibru sunt radiale, acestea se numesc *noduri* (fig. 1.2 - nod stabil și fig. 1.3 - nod instabil), iar dacă au forma de spirală, atunci ele se numesc *focare* (fig. 1.4 - focar stabil și fig. 1.5 - focar instabil).

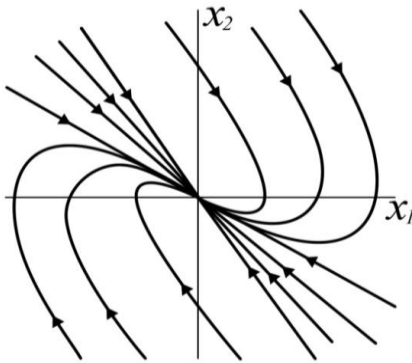


Fig. 1.2. Nod stabil

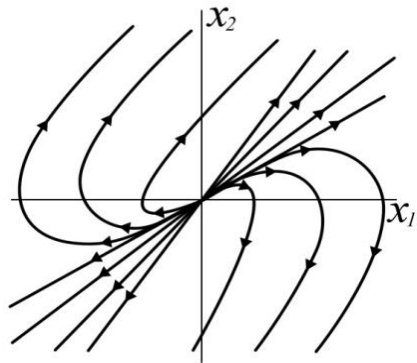


Fig. 1.3. Nod instabil

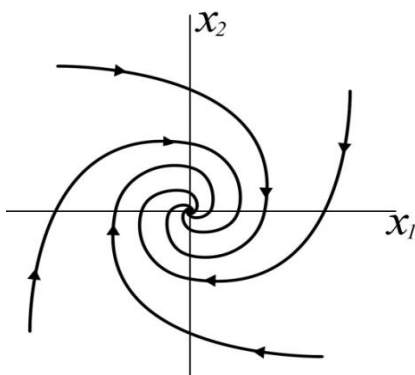


Fig. 1.4. Focar stabil

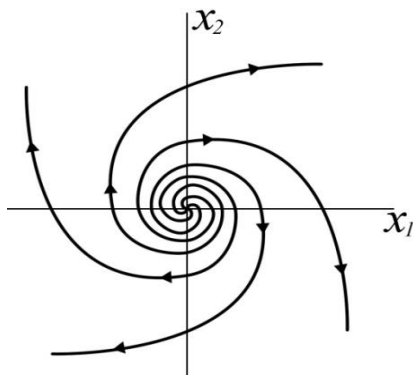


Fig. 1.5. Focar instabil

La reprezentarea în planul fazelor pot să apară una sau mai multe traiectorii de fază închise, numite *cicluri-limită*, de-a lungul cărora mișcarea are un caracter periodic. Spre *ciclurile - limită stabile* tind toate traiectoriile de fază din vecinătate (fig. 1.6), iar de la *ciclurile-limită instabile* pornesc și se depărtează continuu traiectoriile de fază în vecinătate (fig. 1.7).

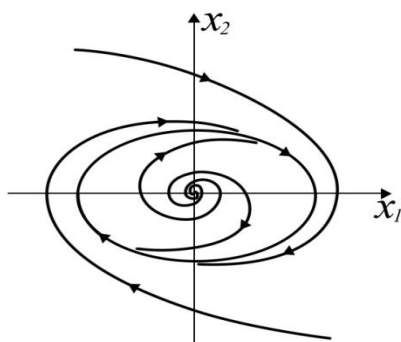


Fig. 1.6. Ciclu-limită stabil

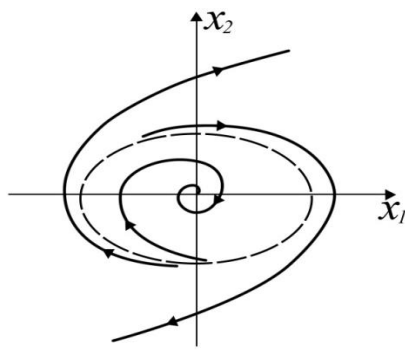


Fig. 1.7. Ciclu-limită instabil

În cazul sistemului automat liniar conservator traiectoriile de fază au forma unor elipse (fig. 1.8), care corespund oscilațiilor neamortizate. Originea, în cazul dat, este un punct singular care nu aparține nici uneia din traiectorii, numit *centru* și este asociat cu echilibrul *neutru*. În alte cazuri ale sistemelor automate liniare, traiectoriile de fază, proprii sistemelor instabile, sunt curbe

deschise cu un singur punct singular - originea, numit *șa* (fig. 1.9).

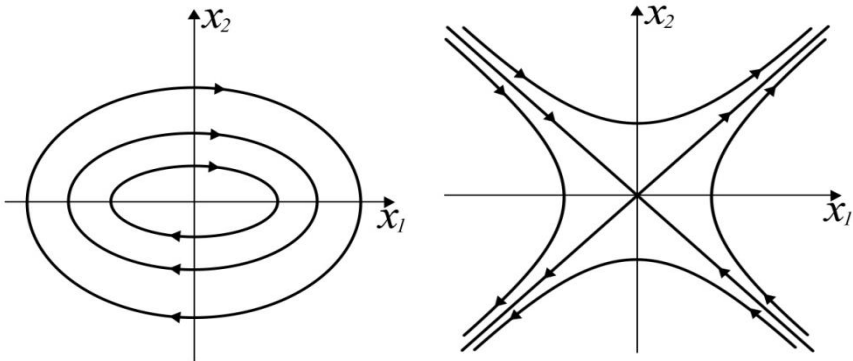


Fig. 1.8. Ciclu-limită elipsă Fig. 1.9. Punctul de echilibru “șa”

În cazul sistemelor neliniare, datorită particularităților acestora în comparație cu cele liniare, la reprezentarea funcționării lor în planul fazelor apar o serie de curbe speciale.

De exemplu, autooscilațiilor specifice sistemelor automate neliniare le corespund în planul fazelor tot elipse, reprezentând ciclurile-limită stabile sau instabile. Pentru un sistem automat neliniar în regim cu autooscilații stabile, ciclul-limită corespunzător este stabil (fig. 1.5). Pentru un răspuns ce caracterizează un sistem neliniar stabil în mic și instabil în mare (fig.1.7), pentru care autooscilațiile sunt instabile, ciclul-limită este instabil. În funcție de comportarea sistemului neliniar, în planul fazelor pot exista și curbe deschise, de genul celor care au fost prezentate, însă asociate cu cicluri-limită.

Tot în cazul sistemelor neliniare se mai întâlnesc și alte curbe speciale în planul fazelor. Să presupunem, de exemplu, că pentru abateri mici de la regimul staționar sistemul poate efectua autooscilații, care depind de condițiile inițiale, iar pentru abateri mari regimul sistemului este aperiodic instabil. În acest caz, în planul fazelor se obțin traiectorii de fază sub forma de elipse și hiperbole, delimitate de prezența unor puncte singulare tip *șa*. La efectuarea lucrării de laborator utilizați pachetele de programe KOPRAS și MATLAB.

2. Mersul lucrării

1. Este dat sistemul automat linear descris cu ecuația diferențială de forma: $\ddot{y}(t) + by(t) = 0$.

Alcătuieți schema modelului matematic al sistemului și simulați-l pe calculator și ridicați traiectoriile de fază $x_2 = f(x_1)$ și răspunsul $y(t)$ pentru diverse condiții inițiale $(x_1(0), x_2(0))$.

2. Un sistem automat linear este descris cu ecuația diferențială de forma:

- 1) $\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = 0$, pentru $a - b < 0$,
- 2) $\ddot{y}(t) - a\dot{y}(t) + by(t) = 0$, pentru $a - b < 0$,
- 3) $\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = 0$, pentru $a - b > 0$,
- 4) $\ddot{y}(t) - a\dot{y}(t) + by(t) = 0$, pentru $a - b > 0$,
- 5) $\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) - by(t) = 0$.

Alcătuieți schema modelului matematic al SAN, simulați-l pe calculator și ridicați traiectoriile de fază $x_2 = f(x_1)$ și răspunsul sistemului $y(t)$ pentru diverse condiții inițiale $(x_1(0), x_2(0))$ și pentru perechile de valori a și b indicate de profesor.

3. Un sistem automat nelinier este descris cu schema structurală din fig. 1.10, simulați-l pe calculator și ridicați traiectoriile de fază $x_2 = f(x_1)$ și răspunsul sistemului $y(t)$ pentru diverse condiții inițiale $(x_1(0), x_2(0))$. Valorile parametrilor funcțiilor de transfer și ale elementului nelinier se numesc de cadrul didactic.

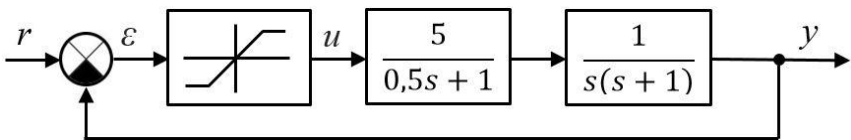


Fig. 1.10. Structura SAN

3. Conținutul referatului

1. Ecuațiile traiectoriilor de fază ale sistemelor.
2. Portretele de fază și graficele răspunsurilor sistemelor.
3. Concluzii.

4. Chestionar

1. Ce se numește traiectorie de fază?

2. Numiți metodele de trasare a traiectoriilor de fază.
3. Ce se numește punct singular?
4. Numiți punctele singulare caracteristice unui sistem liniar de ordinul doi.
5. Care sunt proprietățile principale ale planului de fază?
6. Pentru care sisteme sunt caracteristice ciclurile-limită?
7. Care din ciclurile-limită sunt stabile și care instabile?

Lucrarea 2

REGIMUL ALUNECĂTOR AL SISTEMULUI AUTOMAT

Obiectivul lucrării: studierea regimurilor alunecătoare în sistemele automate neliniare cu releu, ridicarea traiectoriilor de fază și răspunsul sistemului neliniar.

1. Noțiuni generale [6, 9-12, 14]

Realizarea unor performanțe impuse în cadrul unor structuri de sisteme automate neliniare necesită utilizarea unor algoritmi de reglare neliniară pentru diverse regimuri de funcționare a procesului condus. Astfel, pentru realizarea unor performanțe dorite este necesară introducerea în mod intenționat în structura sistemului a unor blocuri funcționale liniare sau neliniare, în funcție de starea procesului și de regimul lui de funcționare.

Sistemul cu structură variabilă este acel sistem la care legăturile între blocurile funcționale se modifică după o anumită lege prescrisă în funcție de starea sistemului.

Schema generală a unui sistem cu structura variabilă este dată în figura 2.1.

În funcție de starea procesului, de nivelul mărimilor de la ieșire, intrare și de perturbații, blocul de modificare a structurii (BMS) comandă prin intermediul elementului de comutare (EC) introducerea în sistem a unui algoritm de reglare liniar sau neliniar,

care este funcție de eroarea $\varepsilon(t)$ sau funcție de ieșirea $y(t)$, sau de intrarea $r(t)$ realizat de regulatorul și elemental de execuție (EE).

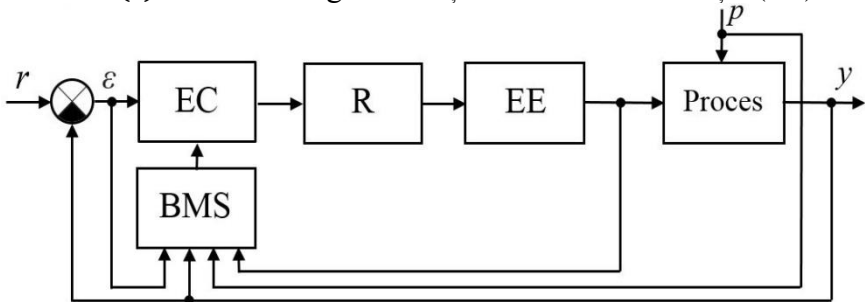


Fig. 2.1. Schema bloc a unui sistem cu structură variabilă

Astfel, în sistem se introduce algoritmul de reglare cel mai potrivit pentru un regim de funcționare al procesului, structura sistemului modificându-se în timpul funcționării pe baza informațiilor culese despre procesul condus.

Prin combinarea mai multor blocuri funcționale BMS se pot obține performanțele cerute sistemului, schimbarea structurii sistemului făcându-se în concordanță cu cerințele de performanță impuse sistemului.

Într-un sistem cu structură variabilă pot fi reunite mai multe proprietăți utile, corespunzătoare fiecăreia din mulțimea de structuri, dar se pot obține și alte noi proprietăți calitativ superioare care nu sunt proprii nici uneia dintre structurile separate.

Un caz particular al acestor sisteme poate servi un sistem cu releu și cu partea liniară alcătuită din două integratoare înseriate. În fig. 2.2 este dată schema structurală a SAN cu releu.

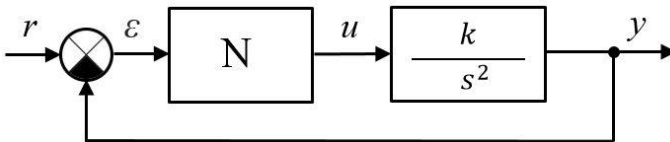


Fig. 2.2. Sistem automat neliniar cu releu

Partea liniară este alcătuită din două integratoare înseriate, iar partea neliniară (N) este un releu. Dacă înlocuim releul cu un

amplificator liniar cu caracteristica $u = f(\varepsilon) = k$, atunci sistemul închis va fi un sistem conservator cu portretul de fază în forma de elipse concentrice. Ecuația sistemului neliniar prin variabilele de stare cu $y = x_1$ are forma:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2, \\ dx_2/dt &= -f(x_1). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Prezentăm ecuația traiectoriilor de fază

$$dx_2/dx_1 = -f(x_1)/x_2. \quad (2.2)$$

În cazul releului ideal cu caracteristica statică

$$f(x_1) = \begin{cases} c, & x > 0, \\ -c, & x < 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

atunci traiectoria de fază (2.2) cu neliniaritatea (2.3) devine

$$dx_2/dx_1 = \pm ck/x_2. \quad (2.4)$$

După integrarea expresiei (2.4) se obțin traiectoriile de fază alcătuite din segmente de parabolă descrise de ecuația

$$x_2^2/2 \pm ckx_1 = C, \quad (2.5)$$

unde C reprezintă condițiile inițiale ale variabilelor de stare.

În (2.5) semnul "+" corespunde semiplanului din dreapta, iar semnul "-" din stânga. Linia de comutație coincide cu axa ordonatelor. Traiectoriile de fază sunt alcătuite din segmente de parabolă și prezintă cicluri limită (fig. 2.3, a).

Introducerea zonei de insensibilitate în caracteristica statică a releului conduce la apariția unui interval de repaos $(-a, a)$, format de liniile de comutație care trec prin punctele $-a$ și a , în limitele căruia traiectoriile de fază sunt paralele axei abscisei. Traiectoriile de fază deasemenea sunt alcătuite din segmente de parabolă și prezintă cicluri limită (fig. 2.3, b).

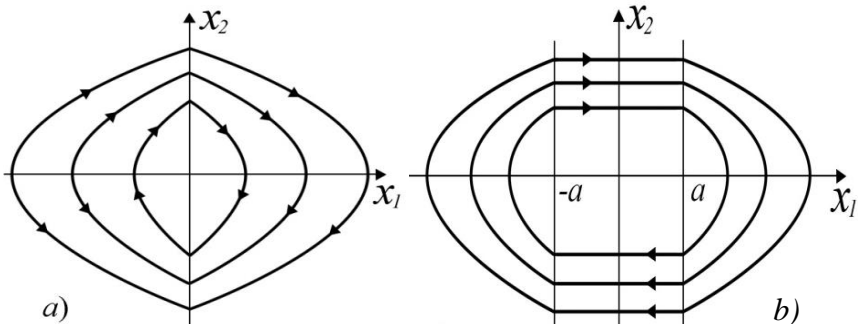


Fig. 2.3. Traiectoriile de fază ale SAN cu releu

Un sistem automat neliniar poate fi stabilizat dacă introducem o reacție cu un coeficient de transfer $\alpha > 0$ adăugătoare după derivata mărimii de ieșire. În schema analizată derivata este egală cu coordonata $x_2 = dx_1/dt$ după care se și efectuează reacția adăugătoare (fig. 2.4). Pentru SAN cu releul ideal se obțin traiectoriile de fază:

$$\begin{aligned} x_2^2/2 + ckx_1 &= C, \quad \varepsilon = x_1 + \alpha dx_1/dt > 0, \\ x_2^2/2 - ckx_1 &= C, \quad \varepsilon = x_1 + \alpha dx_1/dt < 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

În acest caz linia de comutație MN în planul fazelor nu mai coincide cu axa ordonatelor și nici nu este paralelă acesteia, dar se descrie cu expresia $\varepsilon = -(x_1 + \alpha dx_1/dt) = 0$ (fig. 2.5) și este o dreaptă care trece prin origine și este înclinată către axa absciselor sub un unghi egal cu $\arctg(-1/\alpha)$. Pe linia de comutație pot fi evidențiate trei porțiuni caracteristice, limitate de punctele de tangență A și B a liniei de comutație MN cu parabolele trasate cu linii întrerupte. În afara segmentului AB orice traiectorie de fază dintr-o parte a liniei de comutație are prelungire și de cealaltă parte a liniei de comutație. În interiorul segmentului AB traiectoriile de fază se apropie de linia de comutație din ambele părți, întâlnindu-se pe ea. Nimerind pe segmentul AB punctul reprezentativ nu poate ieși de pe acesta, dar nici nu poate rămâne pe acesta, fiindcă viteza mișcării punctului nu este egală cu zero.

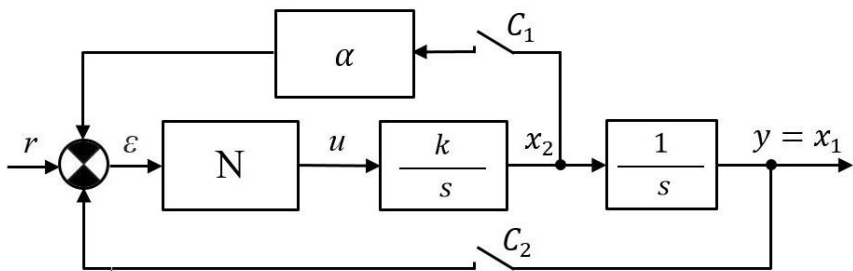


Fig. 2.4. Structura SAN cu releu și reacție după viteză

Viteza mișcării punctului reprezentativ de-a lungul segmentului AB nu este determinată, însă studiile speciale ale acestui fenomen arată că ea este limitată și variază după mărime în jurul valorii ordonatei punctului reprezentativ. Punctul reprezentativ va aluneca în lungul segmentului spre origine care este punct de echilibru de tipul *nod* stabili. Segmentul AB se numește *linia de alunecare*, iar regimul obținut al sistemului se numește *regim alunecător*.

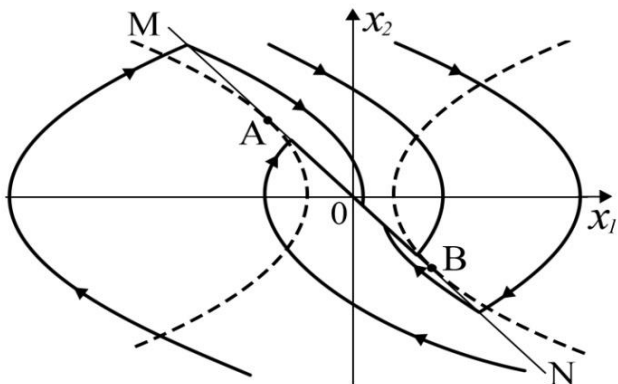


Fig. 2.5. Portretul de fază a SAN cu regim alunecător

Ecuția mișcării în lungul liniei de alunecare este:

$$\alpha dx_1/dt + x_1 = 0. \quad (2.7)$$

După cum reiese din (2.7), mișcarea punctului absolut nu

depinde de parametrii părții liniare și este determinată de gradul de înclinare a liniei de comutație. Acest important fenomen se folosește pentru construirea multor sisteme cu structură variabilă.

Mișcarea precisă pe linia de alunecare e posibilă numai în cazul comutației momentane a releului. În realitate din cauza inerției apare un număr mare de comutații care urmează una după alta și aduce la apariția vibrațiilor de o frecvență înaltă în jurul liniei de comutație. În relele electromecanice așa regim duce la arderea contactelor. De aceea când acest regim a fost descoperit acesta se considera dăunător și se căutau căi pentru a fi evitat. Cu apariția releelor fără contact (relee electronice) așa regimuri au început să fie create artificial cu scopul de a asigura performanțele dorite în sistemele cu parametri instabili.

2. Mersul lucrării

1. Alcătuiți schema modelului matematic a sistemului cu structura din fig. 2.2 și caracteristica elementului nelinier din fig. 2.6,a, simulați-l pe calculator și ridicați traiectoriile de fază și procesele tranzitorii pentru diverse condiții inițiale.

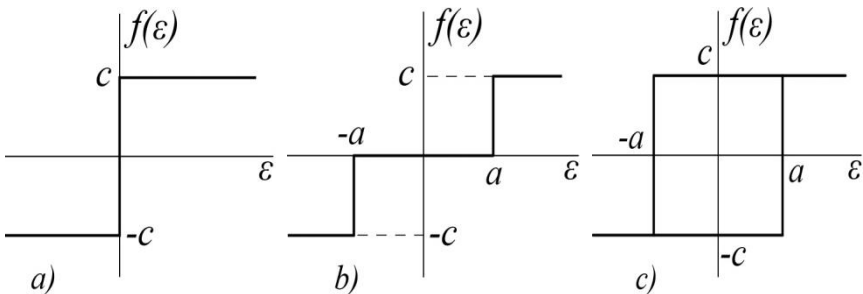


Fig. 2.6. Caracteristici statice de tip releu.

2. Introduceți în schema asamblată în p. 1 reacția după viteză cu valoarea lui α numită de lector (fig. 2.4) și repetați p. 1.

3. Înlocuiți elementul nelinier în schema asamblată în p. 1 cu un element nelinier cu caracteristica dată în fig. 2.6,b și ridicați traiectoriile de fază și procesele tranzitorii pentru diverse condiții inițiale.

4. Introduceți în schema asamblată în p. 3 reacția după viteză cu valoarea lui α de la p. 2, ridicați triaiectoriile de fază și

procesele tranzitorii pentru diverse condiții inițiale.

5. Înlocuiți elementul neliniar în schema asamblată în p. 3 cu un element neliniar cu caracteristica dată în fig. 2.6,c, ridicați traiectoriile de fază și procesele tranzitorii pentru diverse condiții inițiale.

6. Introduceți în schema asamblată în p. 5 reacția după viteză cu valoarea lui α de la p. 2, ridicați traiectoriile de fază și procesele tranzitorii pentru diverse condiții inițiale.

7. Conform datelor obținute în pp. 1-6 pentru traiectoriile de faza apreciați linia de alunecare și performanțele sistemului.

3. Conținutul referatului

1. Schemele structurale ale sistemelor automate neliniare studiate în lucrare.

2. Portretele de fază și procesele tranzitorii ale SAN.

3. Concluzii.

4. Chestionar

1. Dați definiția regimului alunecător. Unde și cu ce scop sunt folosite astfel de regimuri.

2. Definiți condițiile pentru aprecierea frontierelor liniei alunecătoare.

3. Lamuriți influența zonei de insensibilitate în sistemele automate neliniare.

4. Cum se modifică performanțele SAN dacă se introduce o neliniaritate cu histerezis?

5. Determinați ecuațiile traiectoriilor de fază pentru SAN cu structura dată.

Lucrarea 3

CORECȚIA SISTEMULUI AUTOMAT NELINIAR CU AJUTORUL ELEMENTELOR DE CORECȚIE

Obiectivul lucrării: studierea funcționării unui sistem automat neliniar cu reacție neliniară după viteză și a metodelor de corecție a proprietăților SAN utilizând reacția locală.

1. Noțiuni generale [5-11]

Sistemul automat este caracterizat prin performanțele staționare și tranzitorii realizate în timpul funcționării. Prin analiza unui sistem automat se urmărește determinarea performanțelor acestuia și compararea lor cu un set de performanțe impuse prin proiectare. În cazul când anumite performanțe ale sistemului se abat de la valorile prescrise, se impune corecția sistemului. Corecția se poate realiza fie prin modificarea anumitor parametri ai regulatorului, urmărindu-se corectarea performanțelor nerealizate, fie prin introducerea în structura sistemului a unor elemente de compensare (de corecție) alese astfel încât să asigure performanțele dorite ale sistemului automat analizat.

Analizăm câteva exemple. Dacă în sistemul cu astatism de gradul doi includem legătura reacției după ieșire (fig. 3.1-comutatorul C_1 - conectat, iar C_2 - deconectat), atunci în acest sistem se instalează oscilații neamortizate, parametrii cărora sunt definiți de constanta de timp T și condițiile inițiale $x_1(0)$ și $x_2(0)$.

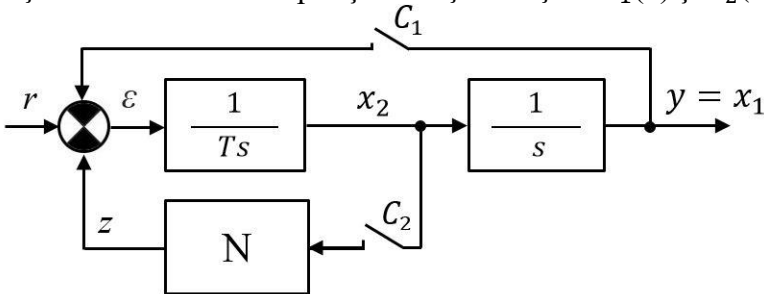


Fig. 3.1. Structura SAN cu corecție neliniară

Aceste oscilații pot fi amortizate dacă se introduce la intrarea

sistemului un semnal proporțional vitezei mărimii de la ieșire, formând reacția negativă după viteza (fig. 3.1 - ambele comutatoare comutate). În practică, din diferite motive (saturația amplificatorului, restricțiile impuse sursei de alimentare etc.) caracteristicile elementelor introduse în legătura inversă sunt neliniare. Caracteristica statică a unui așa element neliniar este dată în fig. 3.2.

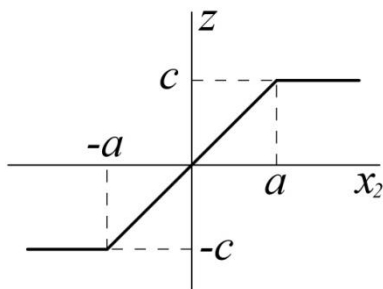


Fig. 3.2. Caracteristica statică cu saturație

Ecuția care descrie mișcarea liberă a sistemului când $r = 0$ prezentat în fig. 3.1 (ambele comutatoare sunt comutate) este:

$$T \frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon = -(x + z), \quad (3.1)$$

$$z = \begin{cases} c, & \text{pentru } y > a, \\ \frac{c}{a}y, & \text{pentru } -a < y < a, \\ -c, & \text{pentru } y < -a, \\ y = \frac{dx}{dt}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Rezultă că în funcție de valoarea mărimii de ieșire y a sistemului se descrie cu trei ecuații diferențiale:

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + x = c, \text{ pentru } y < a, \quad (3.3)$$

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0, \text{ pentru } -a < y < a, \quad (3.4)$$

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + x = -c, \text{ pentru } y < -a. \quad (3.5)$$

Traietoriile de fază pentru acest sistem au forma unor spirale logaritmice înăuntrul zonei pentru $|y| < a$ și forma unor segmente de elipsă pentru $|y| > a$.

Analizăm alt sistem (fig. 3.3, comutatorul C_2 deconectat) în care obiectul cu astatism de gradul întâi este comandat de un regulator bipozițional cu caracteristica din fig. 2.6,*a* ori 2.6,*c*.

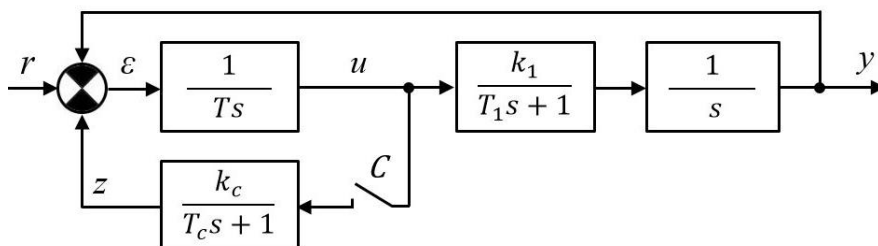


Fig. 3.3. Structura SAN cu corecție liniară

Se cunoaște că utilizarea acestor regulatoare duce la apariția oscilațiilor neamortizate în sistem. Pentru eliminarea oscilațiilor ori reducerea influenței lor la funcționarea sistemului la regulator, în unele cazuri, se aplică o reacție negativă locală. Dacă reacția locală este rigidă, atunci poate fi micșorată considerabil amplitudinea oscilațiilor sau aceste oscilații pot fi lichidate definitiv. Pentru sistemele rapide este nevoie de a lua în considerație inerția reacției locale. În această lucrare, presupunând că elementul legăturii inverse locale este descris cu ecuația unui element cu inerție (întârziere) de ordinal întâi, este necesar de a cerceta influența lui asupra performanțelor sistemului automat.

2. Mersul lucrării

1. Simulați pe calculator sistemul cu structura din fig. 3.1 și caracteristica elementului nelinier din fig. 3.2, ridicați traiectoriile de fază și procesele tranzitorii pentru diverse condiții inițiale pentru următoarele cazuri:

- a) ambele comutatoare sunt deconectate,
- b) comutatorul C_1 - conectat, iar C_2 - deconectat,
- c) ambele comutatoare sunt comutate pentru $a = 0$,
 $a = b$ și $a > b$.

2. Simulați pe calculator sistemul cu structura dată în fig. 3.3

și caracteristica elementului neliniar din fig. 2.6,a, ridicați traiectoriile de fază și procesele tranzitorii pentru diverse condiții inițiale pentru cazul când comutatorul C este deconectat.

3. Conectați comutatorul C și ridicați traiectoriile de fază și procesele tranzitorii pentru trei diverse valori ale parametrilor elementului de corecție (valorile k și T le numește lectorul).

4. Înlocuiți elementul neliniar în schema asamblată în p. 2 cu alt element caracteristica căruia este reprezentată în fig. 2.6,c și repetați pp. 3 și 4.

5. Conform datelor obținute în lucrare prezentați traiectoriile de fază și procesele tranzitorii ale sistemului studiat. Apreciați performanțele sistemelor și analizați influența parametrilor elementelor de corecție asupra performanțelor.

3. Conținutul referatului

1. Schemele structurale ale sistemelor studiate în lucrare.
2. Portretele de fază și graficele proceselor tranzitorii ale sistemelor studiate.
3. Concluzii.

4. Chestionar

1. Scrieți ecuațiile traiectoriilor de fază pentru sistemul prezentat în fig. 3. 1.
2. Cum se modifică traiectoriile de fază în sistemul din fig. 3.1 după conectarea comutatorului C_2 ?
3. Cum influențează parametrii caracteristicii elementului neliniar din fig. 3.2 asupra performanțelor sistemului?
4. Cum se modifică traiectoriile de fază în sistemele din fig. 3.3 după conectarea comutatorului C ?
5. Cum influențează parametrii elementului reacției în sistemul din fig. 3.3 asupra performanțelor lui?
6. Lamuriți metodele de corecție ale sistemelor neliniare.

Lucrarea 4

ANALIZA SISTEMELOR AUTOMATE NELINIARE PRIN METODA FUNCȚIEI DE DESCRIERE

Obiectivul lucrării: studierea metodelor de analiză a sistemelor neliniare prin aproximarea răspunsului în frecvență a unui sistem neliniar cu prima armonică și cercetarea influenței parametrilor părții liniare asupra amplitudinii și frecvenței oscilațiilor la ieșirea sistemului.

1 Noțiuni generale [4-14]

Una dintre metodele de analiză a sistemelor neliniare constă în aproximarea răspunsului în frecvență a unui sistem neliniar cu prima armonică în cazul când la intrarea acestuia se aplică un semnal sinusoidal. O asemenea metodă este cunoscută ca metoda liniarizării armonice sau metoda funcției de descriere.

Metoda este aplicabilă oricărei categorii de neliniarități, în condițiile în care într-un sistem pot fi separate toate neliniaritățile de partea liniară a sistemului (fig. 4.1), iar partea liniară se comportă ca un filtru trece jos. În aceste condiții, răspunsul în frecvență a sistemului neliniar poate fi aproximat cu precizie de prima armonică din dezvoltarea în serie Fourier a ieșirii părții neliniare, având la intrare acestuia o funcție sinusoidală.

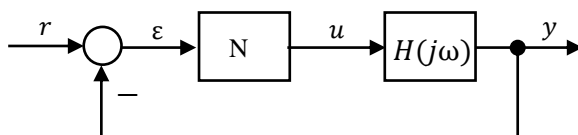
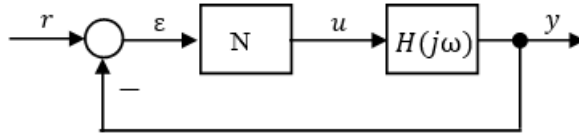


Fig. 4.1. Structura sistemului automat neliniar



Dacă la intrarea unui element neliniar se aplică un semnal sinusoidal $u = A \sin \omega t$, atunci la ieșirea lui se obține o funcție a cărei dezvoltare în serie Fourier este:

$$x = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k\omega t, \quad (4.1)$$

în care coeficienții seriei Fourier se calculează cu relațiile cunoscute:

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(u) d(\omega t),$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(u) \sin k\omega t d(\omega t), \quad (4.2)$$

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(u) \cos k\omega t d(\omega t).$$

Pentru neliniaritățile simetrice în raport cu originea planului coeficientul B_0 din dezvoltarea în serie Fourier este egal cu zero.

În baza metodei liniarizării armonice se neglijează toate armonicile de frecvență superioară din dezvoltarea în serie Fourier și ieșirea elementului neliniar se aproximează cu prima armonică descriă cu relația :

$$x(t) = B_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t. \quad (4.3)$$

Pentru a defini funcția de descriere, exprimăm valorile sinusului și cosinusului ca funcții ale valorii instantanee a semnalului de intrare $u(t) = A \sin \omega t$ și în rezultat se obține:

$$\sin \omega t = u/A, \quad \cos \omega t = pu/(A\omega), \quad (4.4)$$

unde $p = d/dt$ este operatorul de derivare.

Funcția de descriere se determină ca raportul transferului mărimii de ieșire către mărimea de intrare:

$$N(A) = \frac{x(t)}{u} = \frac{B_1}{A} + \frac{C_1 p}{A\omega_1}. \quad (4.6)$$

Dacă în relația (4.6) introducem notațiile:

$$q(A) = B_1/A, \quad q'(A) = C_1/A, \quad (4.7)$$

atunci se obține funcția de descriere în forma:

$$N(A) = q(A) + q'(A)p/\omega. \quad (4.8)$$

Funcția de descriere poate fi scrisă în mod similar ca funcția de transfer în domeniul frecvențelor, cu observația că atât partea reală, cât și partea imaginară depind de amplitudinea A semnalului sinusoidal de intrare. Partea imaginară a funcției de descriere există numai pentru neliniarități de tip histerezis (neliniarități neunivoce).

Cunoașterea funcției de descriere pentru un sistem neliniar permite analiza performanțelor sistemului prin metode cunoscute din analiza sistemelor liniare continue.

Pentru un element neliniar de tip releu cu zonă de insensibilitate și histerezis se calculează funcția de descriere într-o manieră similară. Astfel, pentru neliniaritatea din figura 4.2, a ieșirea elementului neliniar dată în figura 4.2, b se calculează cu relația (4.3), iar funcția de descriere se definește cu relația (4.6).

Ținând seama de zona de insensibilitate și de mărimea histerezisului, se calculează mărimile de conectare u_2 și de deconectare u_1 ale releului și funcția de descriere a neliniarității după relațiile:

$$u_1 = A \sin \omega t_1,$$

$$u_2 = A \sin(\pi/\omega_1 - t_2)\omega_1, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} q(A) &= B_1/A = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1 t_1}^{\omega_1 t_2} c \sin \omega_1 t d(\omega_1 t) = \\ &= \frac{2c}{A} (\cos \omega_1 t_1 - \cos \omega_1 t_2). \end{aligned} \quad (4.10)$$

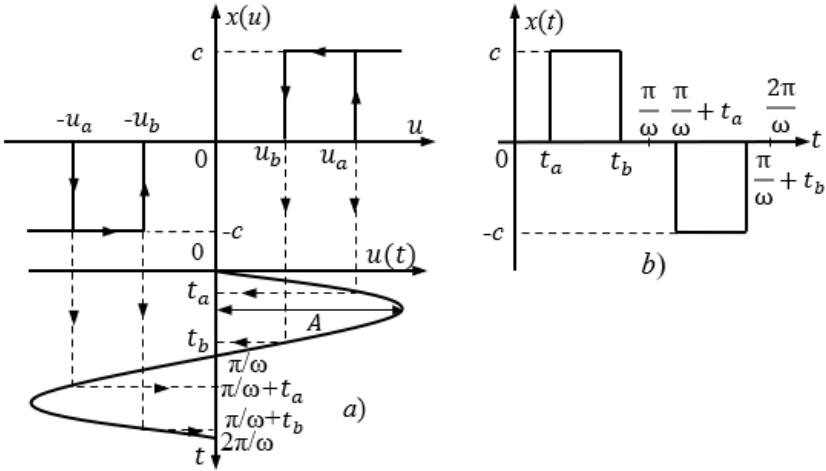


Fig. 4.2. Neliniaritate de tip relee cu histerzis:

a - caracteristica statică; *b* - răspunsul elementului la semnal sinusoidal

Partea reală a funcției de descriere se obține dacă în (4.10) includem (4.9):

$$q(A) = \frac{2}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{u_1}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{u_2}{A}\right)^2} \right]. \quad (4.11)$$

În mod similar se obține și partea imaginară a funcției de descriere:

$$q'(A) = C_1/A = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} x(u) \cos \omega_1 t d(\omega_1 t) =$$

$$= (2\pi/A) \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} c \cos \omega_1 t d(\omega_1 t) \quad (4.12)$$

sau după calcularea integralei și înlocuirea valorilor corespunzătoare pentru funcția $\sin \omega t_1$ și $\sin \omega t_2$ se obține:

$$q'(A) = \frac{2c}{\pi A} (u_1 - u_2). \quad (4.13)$$

Coefficienții $q(A)$ și $q'(A)$ se numesc coeficienții liniarizării armonice ai neliniarității.

Substituind în relația (4.6) cu relațiile (4.11) și (4.13), se obține funcția de descriere a sistemului nelinier cu caracteristica statică prezentată în figura 4.2, a :

$$N(A) = \frac{2c}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{u_1}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{u_2}{A}\right)^2} \right] - j \frac{2c}{\pi} \frac{u_1 - u_2}{A^2}. \quad (4.14)$$

Menționăm că pentru un releu ideal cu caracteristica univocă funcția de descriere se obține din (4.14) dacă se înlocuiește $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$:

$$N(A) = \frac{4c}{\pi A}. \quad (4.15)$$

Pentru un releu cu zonă de insensibilitate și fără histerezis se obține numai partea reală a funcției de descriere, iar $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}$ conduce la expresia:

$$N(A) = \frac{4c}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{u_1}{A}\right)^2} \right]. \quad (4.16)$$

Rezultă că funcția de descriere este definită în raport cu amplitudinea intrării A și parametrii caracteristici ai neliniarității c și \mathbf{u}_1 .

O formă normalizată a funcției de descriere în unele aplicații este preferată, în care parametrii .

În Anexa A sunt date exemple de neliniarități și coeficienții lor

de liniarizare armonică.

Metoda liniarizării armonice fiind o metodă aproximativă va conduce la obținerea performanțelor sistemelor neliniare cu un grad de precizie limitat. Cu cât partea liniară a sistemului are o comportare de filtru trece jos mai bună, cu atât rezultatele obținute sunt mai aproape de valorile lor reale.

Dacă într-un sistem automat neliniar din fig. 4.1 partea liniară este descrisă prin funcția de transfer

$$G(s) = C(s)/D(s), \quad (4.17)$$

iar partea neliniară este descrisă prin funcția de descriere $N(A)$, atunci funcția de transfer generală a sistemului automat se definește în domeniul frecvențelor sub forma:

$$G(A, j\omega) = \frac{N(A)G(j\omega)}{1+N(A)G(j\omega)}. \quad (4.18)$$

Condiția pentru apariția oscilațiilor întreținute în sistem este obținută din ecuația caracteristică a sistemului automat neliniar în forma standard și se numește ecuația balanței armonice:

$$L(A, j\omega) = 1 + N(A)G(j\omega) = 0. \quad (4.19)$$

Dacă în sistemul automat neliniar în forma standard există oscilații întreținute și acestea se aproximează la nivelul fundamentalei, atunci amplitudinea A și pulsația ω satisfac ecuația balanței armonice (4.19).

Utilizând ecuația caracteristică (4.19) a sistemului automat neliniar, se aplică două metode de determinare a autooscilațiilor și a parametrilor amplitudinea A și pulsația ω .

1. *Metoda algebrică.* Dacă se înlocuiește în (4.19) f.d.t. a părții liniare cu raportul a două polinoame $C(j\omega)/D(j\omega)$ din (4.17), atunci se obține expresia:

$$L(A, j\omega) = D(j\omega) + N(A)C(j\omega) = 0. \quad (4.20)$$

Expresia (4.20) poate fi egală cu zero numai în cazul când partea reală și cea imaginară în același timp vor fi egale cu zero. Prin urmare, expresia (4.20) se divizează într-un sistem cu două ecuații alcătuite din partea reală și imaginară cu necunoscutele amplitudinea A și frecvența ω autooscilațiilor:

$$X(A, \omega) = \operatorname{Re}L(A, j\omega) = 0, \quad (4.21)$$

$$Y(A, \omega) = \operatorname{Im}L(A, j\omega) = 0. \quad (4.22)$$

În rezultatul soluției sistemului de ecuații (4.21)-(4.22) se apreciază parametrii amplitudinea A și pulsația ω oscilațiilor obținute.

Stabilitatea soluțiilor periodice din (4.21)-(4.22) pot fi apreciate în ipoteza că funcțiile $X(A, \omega)$ și $Y(A, \omega)$ sunt derivabile în (A_0, ω_0) din următoarea inegalitate:

$$S_0 = \left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial A} \right)_{A_0} \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} - \left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial A} \right)_{A_0}. \quad (4.23)$$

Oscilația întreținută caracterizată prin perechea (A_0, ω_0) , ca soluție a ecuației (4.20), este limită stabilă dacă $S_0 > 0$, limită instabilă dacă $S_0 < 0$ și limită semistabilă dacă $S_0 = 0$.

Dacă funcția de descriere $N(A)$ și f.d.t. $H(j\omega)$ sunt expresii complexe, atunci este dificil de găsit pe cale analitică soluțiile ecuațiilor (4.21)-(4.22). În aceste cazuri se utilizează metode grafice.

2. *Metoda grafo-analitică.* Din expresia (4.19) se obține:

$$H(j\omega) = -\frac{1}{N(A)} = -G_N(A), \quad (4.24)$$

în care $G_N(A)$ se numește *loc invers* al funcției de descriere.

Prezentarea grafică a locului de transfer $H(j\omega)$ și a locului invers $G_N(A)$ în planul complex (fig. 4.3) permite de a determina parametrii autooscilațiilor și a verifica stabilitatea sistemelor automate neliniare descrise prin modele liniarizate obținute prin metoda liniarizării armonice.

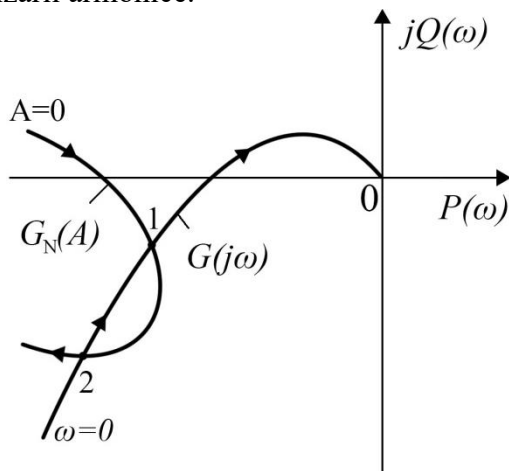


Fig. 4.3. Planul complex

În figura 4.3 punctele 1 și 2 de intersecție a celor două locuri de transfer determină existența autooscilațiilor în sistem cu amplitudine și frecvență corespunzătoare în punctul 1 (ω_1, A_1) și punctul 2 (ω_2, A_2). Din analiza autooscilațiilor existente în punctele 1 și 2 rezultă că punctul 1 corespunde unor autooscilații instabile, iar punctul 2 corespunde unor autooscilații stabile. În punctul 1 de intersecție de pe locul de transfer $G_N(A)$, oscilațiile ce apar ca urmare a intersecției celor două locuri de transfer, vor avea o amplitudine mai mare odată cu creșterea amplitudinii A a semnalului sinusoidal. Prin creșterea amplitudinii A a semnalului se intră în zona de instabilitate a sistemului automat neliniar.

Condiția necesară și suficientă ca un sistem automat neliniar să fie stabil (respectiv existența și stabilitatea soluțiilor periodice) este când locul invers de transfer $G_N(A)$ să intersecteze locul de transfer al părții liniare $H(j\omega)$ a sistemului în punctul 2, când esă

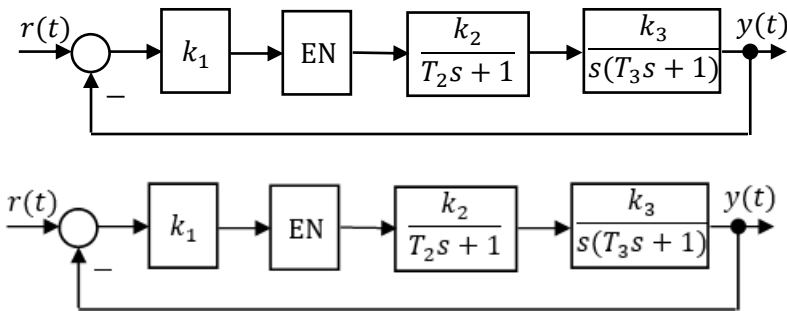
din intersecție și locul de transfer $H(j\omega)$ este parcurs de la frecvențe joase înspre frecvențe înalte.

2 Mersul lucrării

1. Alcătuiți schema modelului matematic pentru simularea pe calculator a sistemului automat neliniar cu structura din fig. 4.4 și caracteristica elementului neliniar din fig. 2.6, *a*. Valorile parametrilor funcțiilor de transfer și ale neliniarității sunt date în tabelul 4.1.

Tabelul 4.1. Parametrii sistemului automat neliniar

Nr. crt.	k_1	k_2	k_3	T_1, s	T_2, s	a	c
1	1... 10	2,5	25	0,5... 2,5	1,8	0,8	1,5
2	1... 10	4	42	0,5... 2,5	2,1	1	1,9
3	1... 10	1	50	0,5... 2,5	3,5	0,9	1,7
4	1... 10	3,2	65	0,5... 2,5	2,9	0,5	1,3
5	1... 10	2,9	70	0,5... 2,5	4,3	1,1	1,8
6	1... 10	5,2	80	0,5... 2,5	5,1	0,7	1,4



2. Asamblați schema modelului sistemului automat neliniar pe calculator și apreciați amplitudinea A și frecvența ω la ieșirea sistemului pentru diverse valori ale coeficientului de amplificarea $1 < k_1 < 10$ și a constantei de timp a elementului de corecție $0,5 < T_1 < 2,5$ (valorile se numesc de lector). După datele experimentale se completează tabelul 4.2.

3. Înlocuiți elementul neliniar în schema sistemului neliniar

asamblată în p.2 cu un element neliniar cu caracteristica dată în fig. 2.6, b și repetați p. 2 și cu datele experimentale completați tabelul 4.3.

4. Înlocuiți elementul neliniar în schema sistemului neliniar asamblată în p. 2 cu un element neliniar cu caracteristica dată în fig. 4.2, a și repetați p. 2.

5. Conform datelor obținute în pp. 2-4 și tabelele 4.2-4.4 trasați graficile funcțiilor $A = f(k_1)$, $A = f(T_1)$, $\omega = f(k_1)$, $\omega = f(T_1)$.

Tabelul 4.2. Datele experimentale ale sistemului cu relev ideal

Nr. crt.	Variația coeficientului k_1				Variația constantei T_1			
	k_1	A	T, s	ω, s^{-1}	T_1, s	A	T, s	ω, s^{-1}
1								
2								
3								
4								
5								

Tabelul 4.3. Datele experimentale ale SA cu relev cu insensibilitate

Nr. crt.	Variația coeficientului k_1				Variația constantei T_1			
	k_1	A	T, s	ω, s^{-1}	T_1, s	A	T, s	ω, s^{-1}
1								
2								
3								
4								
5								

Tabelul 4.4. Datele experimentale ale sistemului cu relev cu histerezis

Nr. crt.	Variația coeficientului k_1				Variația constantei T_1			
	k_1	A	T, s	ω, s^{-1}	T_1, s	A	T, s	ω, s^{-1}
1								
2								
3								
4								

3 Conținutul referatului

1. Schemele structurale ale sistemelor automate neliniare studiate.
2. Parametrii autooscilațiilor apreciați după metodele 1 și 2.
3. Graficele funcțiilor $A = f(k_1)$, $A = f(T_1)$, $\omega = f(k_1)$, $\omega = f(T_1)$.
4. Concluzii.

4 Chestionar

1. În ce constă esența liniarizării armonice?
2. Cum pot fi apreciați parametrii autooscilațiilor?
3. Cum modifică variația valorii coeficientului de transfer parametrii autooscilațiilor?
4. Cum modifică variația valorii constantei de timp parametrii autooscilațiilor?
5. Cum modifică performanțele sistemului neliniar introducerea unei caracteristici cu histerezis?
6. Cum poate fi apreciată stabilitatea autooscilațiilor?

Lucrarea 5

ANALIZA SISTEMELOR AUTOMATE DISCRETE

Obiectivul lucrării: analiza proprietăților sistemului automat discret (sistem cu eșantionare și sistem numeric) prin alegerea perioadei de eșantionare la acțiunea semnalelor de intrare și analiza influenței perioadei de eșantionare asupra performanțelor sistemului.

1 Noțiuni generale [1-12]

Cu dezvoltarea intensivă a tehnicii de calcul și aplicarea acesteia în automatica industrială larg sunt utilizate sistemele automate discrete de conducere. Menționăm două tipuri de sisteme automate discrete (SAD):

1. Sisteme care sunt discrete după natura fizică și informația în aceste sisteme există numai în momentele discrete de timp. Exemple de SAD de această categorie sunt sistemele de radiolocație cu diverse obiecte (de detectare și conducere (urmărire)). Există mai multe fenomene fizice și biologice, procese sociale și economice, dinamica acestora adecvat se poate descrie numai cu modele discrete.

2. Sisteme în care informația există în timp continuu, dar intenționat (special) se discretizează (se eșantionează) pentru obținerea a unor noi proprietăți în comparație cu sistemele continue. Aceste proprietăți pot fi: realizarea simplă, fiabilitate ridicată, ridicarea preciziei, dimensiuni reduse și costuri mici. Dezvoltarea vertiginoasă a tehnicii de calcul și utilizarea pe scară largă a microprocesoarelor în sistemele cu conducere automată ridică și mai mult interesul pentru SAD.

Sistemul automat discret este alcătuit din unul sau mai multe elemente discrete, la ieșirea cărora semnalul este prezentat în timp discret ca o succesiune de impulsuri și elemente continue liniare și/sau neliniare semnalele cărora sunt în timp continuu. Elementul discret este elementul la intrarea căruia se aplică semnalul continuu, iar la ieșirea lui se obține semnalul discret. Procedura de

transformare a semnalului continuu $x(t)$ în semnal discret se numește *cuantizare*. Se evidențiază trei tipuri de cuantizare:

- Cuantizarea în nivel (amplitudine) transformă semnalul continuu în forma de semnal continuu-discret cu cuanta $h = \Delta x = x_{i+1} - x_i$.

- Cuantizarea în timp care se numește *eșantionare* transformă semnalul continuu de la intrare $x(t)$ într-o succesiune de impulsuri (tren de impulsuri).

- Cuantizarea în nivel și timp transformă semnalul continuu în cuante apropiate valorilor semnalului continuu în momentele discrete de timp și prioritate se dă momentelor de timp.

Cuantizarea în nivel este o operație neliniară asupra funcției discretizate, iar eșantionarea este o funcție liniară asupra funcției discretizate.

SAD care conține elemente de cuantizare în nivel sunt sisteme neliniare de tip releu.

SAD care conține elemente de eșantionare în timp sunt sisteme liniare.

SAD care conține elemente de cuantizare în nivel și în timp se numesc *sisteme automate numerice* (SAN).

SAD de tipul releu și numerice sunt sisteme neliniare.

Vom studia numai sisteme liniare cu eșantionare pentru care axa timpului se discretizează și $t = kT$, unde $k = 0, 1, 3, \dots$ este șirul de numere reale, $T = \Delta t = t_{i+1} - t_i$ – perioada de eșantionare (de repetare).

Operația de eșantionare transformă semnalul continuu $x(t)$ într-o succesiune de impulsuri (tren de impulsuri) $x(kT)$, la care amplitudinea (fig. 5.1, a), durata (fig. 5.1, b) sau perioada de eșantionare (fig. 5.1, c) este funcție de amplitudinea semnalului continuu de intrare la momentele de eșantionare. Această transformare a semnalului de către eșantionor se tratează ca proces de modulație a succesiunii de impulsuri conform legii de modificare a semnalului de intrare, iar eșantionorul - ca modulator de impulsuri. Astfel, se modulează parametrii impulsului: amplitudinea x_i , durata impulsului τ_i și perioada de eșantionare T sau frecvența $\omega_e = 2\pi/T$.

Se utilizează următoarele tipuri de modulații a succesiunii de impulsuri:

- Modulația în amplitudine (fig. 5.1, *d*) la care amplitudinea impulsului este egală cu amplitudinea semnalului de intrare la momentul de eșantionare, iar durata și perioada impulsului sunt constante:

$$x_i = x(t), \tau_i = \text{const}, T = \text{const}.$$

- Modulația în durată (fig. 5.1, *e*) la care durata impulsului este proporțională cu amplitudinea semnalului de intrare la momentul de eșantionare, iar amplitudinea și perioada impulsului sunt constante:

$$\tau_i = x(t), x_i = \text{const}, T = \text{const}.$$

- Modulația în frecvență (fig. 5.1, *f*) la care frecvența impulsului este proporțională cu amplitudinea semnalului de intrare la momentul de eșantionare, iar amplitudinea și durata impulsului sunt constante:

$$\omega_e = x(t), x_i = \text{const}, \tau_i = \text{const}.$$

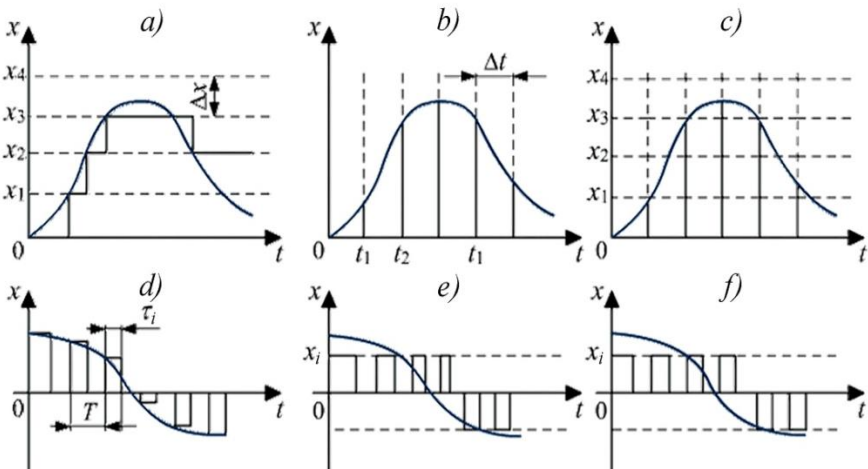


Fig. 5.1. Tipuri de cuantizări a semnalului și tipuri de modulații a impulsurilor

Prezentăm schema funcțională tipică a sistemului automat cu eșantionare din fig. 5.2, *a*, în care elementele funcționale sunt: E_1 , E_2 și E – eșantionoare, C – comparatorul, EE – element de execuție, OR – obiectul de reglare, iar elemente EE și OR în conexiune serie formează partea fixată (PF). Această structură se poate generaliza pentru multe cazuri de conectare a eșantionorului. Eșantionoarele E_1 și E_2 care se regăsesc în elementul de referință și în reacție pot fi substituite cu un singur eșantionor E (fig. 5.2, *b*), care se plasează în canalul direct după comparator, iar PF cu elementul de reținere ER înseriat cu PF formează partea continuă a sistemului cu eșantionare. Eșantionorul, care discretizează semnalul în timp, se prezintă ca un modulator cu modulație a impulsurilor în amplitudine (fig. 5.3, *a*). Modulatorul multiplică semnalul de bază (succesiunea de impulsuri cu amplitudinea egală cu unu, care sunt produse de generatorul de impulsuri (GI)) cu semnalul de intrare care se modulează (fig. 5.3, *b*).

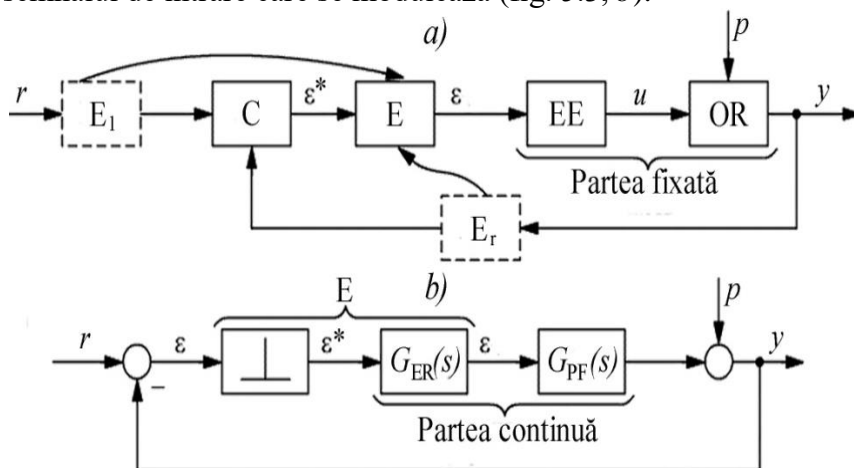


Fig. 5.2. Schema bloc funcțională a SAD.

La valori mari a cuantei de discretizare în nivel SAN este un sistem neliniar, iar la valori mici a cuantei de discretizare în nivel SAN poate fi descris ca sistem liniar cu eșantionare cu modulație în amplitudine. SAN au o largă utilizare în automatică în comparație cu sistemele continue, datorită următoarelor priorități:

- Elementul discret sau calculatorul ca element discret (regulatorul) poate fi folosit pentru conducerea concomitentă cu mai multe procese (obiecte), unde acesta ciclic cu perioada de eșantionare se conectează la fiecare obiect pentru al conduce.

- Elementele discrete și calculatorul ca componente ale SAN au o precizie mai ridicată la prelucrarea semnalelor, dimensiuni mai mici, mase mai mici și costuri reduse, au fiabilitate mai ridicată și protecție mai ridicată la semnale de tip zgomot. Pe calculator pot fi realizați algoritmi sofisticăți de conducere cu procesele industriale.

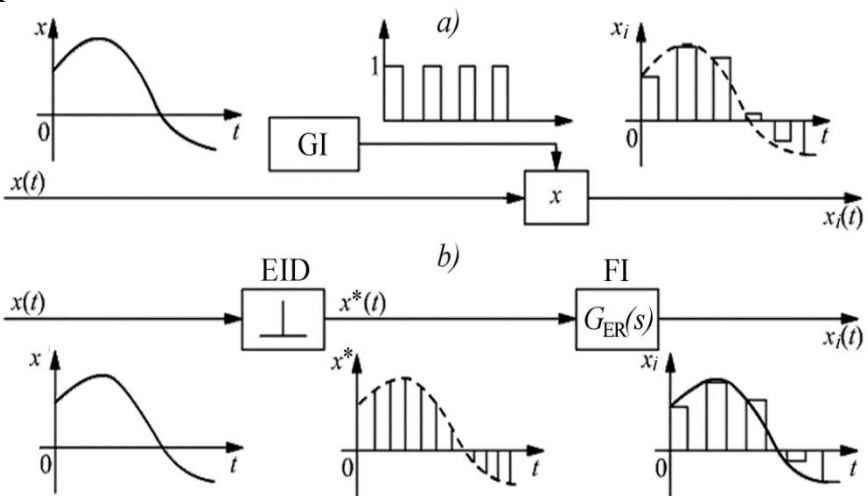


Fig. 5.3. Schema structurală a elementului de eșantionare și procedura de eșantionare a semnalului.

În continuare vom analiza sistemele discrete cu modulație în amplitudine (SDMA).

Pentru o prezentare mai simplă SDMA este recomandat ca elementul real de discretizare de prezentat ca element echivalent constituit din conexiune serie a elementului ideal de discretizare (EID) și elementul de formare sau de reținere (ER) a impulsurilor. EID transformă semnalul continuu $x(t)$ într-o succesiune de impulsuri de tip $\delta(t)$ (Dirac) cu perioada de eșantionare T , aria cărora este egală cu amplitudinea semnalului de intrare la

momentul de eșantionare. Elementul de reținere sau demodulatorul formează din succesiunea de impulsuri ideale o succesiune de impulsuri reale amplitudinea cărora este egală sau proporțională valorilor instantanee ale semnalului de intrare. În practică ER formează o succesiune de impulsuri de formă dreptunghiulară ca cea mai simplă figură geometrică cu amplitudinea unitară și cu durata $\tau_i = \gamma/T$, unde γ este durata relativă ($0 \leq \gamma \leq 1$) a impulsului.

Răspunsul ER la impuls unitar $\delta(t) = 1$ este funcția pondere $w(t)$ a acestui element, iar funcția de transfer a ER este:

$$G_{ER}(s) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-st} dt. \quad (5.1)$$

ER este element continuu și este recomandat ca acesta să fie înseriat părții fixate (fig. 5.2) și această conexiune formează partea continuă a SAD cu f.d.t.:

$$G_{PC}(s) = G_{ER}(s)G_{PF}(s). \quad (5.2)$$

În domeniul timpului impulsul dreptunghiular se obține din diferența a două semnale unitare: primul semnal este prezentat pozitiv, iar al doilea semnal este inversat (negativ) și deplasat la mărimea τ_i .

Modelul matematic al impulsului în timp se descrie cu funcția pondere:

$$w(t) = 1(t) - 1(t - \tau_i), \quad (5.3)$$

iar f.d.t. este

$$G_{ER}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-s\tau_i} = \frac{1}{s}(1 - e^{-s\tau_i}). \quad (5.4)$$

Dacă durata impulsului τ_i este cu mult mai mică decât constantele mai mici de timp ale părții fixate, atunci ER se poate aproxima cu un element ideal cu f.d.t. $1/T$.

Dacă durata impulsului $\tau_i = T$, atunci ER (5.4) formează impulsuri dreptunghiulare pe durata perioadei de eșantionare cu

amplitudinea egală cu valoarea semnalului de intrare de la momentul de eșantionare și în aceste cazuri ER se numește *element de fixare* sau *de memorare* cu f.d.t.:

$$G_{ER}(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT}). \quad (5.5)$$

Deoarece fixarea valorii instantanee a semnalului la nivel constant la ieșirea ER poate fi tratată ca o operație de extrapolare cu polinom de ordin zero și ER se numește *extrapolator de ordin zero* sau *element de reținere de ordin zero* (EROZ).

Deoarece ER are o influență puternică asupra proprietăților sistemului discret este necesar de a analiza proprietățile frecvențiale ale acestuia. Elementul ideal de eșantionare se prezintă ca un generator de armonici suplimentare cu frecvența de eșantionare $\omega_e = 2\pi/T$. Spectrul $X(j\omega)$ a semnalului $x^*(t)$ eșantionat cu modulație în amplitudine este egală cu suma spectrelor deplasate a semnalului continuu de la intrare $x(t)$:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_e)], \quad (5.6)$$

unde $X(j\omega)$ este spectrul semnalului de intrare (fig. 5.4, a). Din relația (5.6) rezultă că toate amplitudinile sunt reduse de T ori și ED este echivalent după proprietățile lui cu un element ideal cu coeficientul $1/T$.

În caz general spectrul $X^*(j\omega)$ se deosebește de spectrul $X(j\omega)$, deoarece acesta conține componenta de baza ($k=0$), care coincide cu $X(j\omega)$, dar și componentele suplimentare ($k=\pm 1; \pm 2, \dots$) care apar ca rezultat al discretizării.

Dacă lățimea benzii semnalului discretizat este $\omega_x < \omega_e/2$, atunci componentele suplimentare în banda de bază a frecvențelor ($-\omega_e/2, +\omega_e/2$) nu vor deforma forma spectrului $X(j\omega)$ (fig. 5.4, b) și relația (5.6) devine

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} X(j\omega). \quad (5.7)$$

Trebuie semnalat faptul că prezența acestor componente în spectrul (5.6) impune utilizarea lor la reconstruirea semnalului continuu după eșantioanele acestuia.

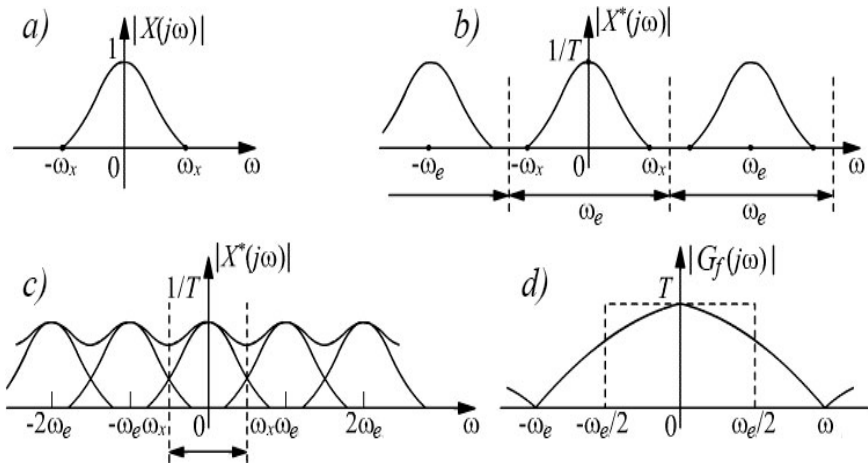


Fig. 5.4. Amplitudinile spectrelor semnalelor de intrare și de ieșire a elementului ideal de eșantionare și funcția amplitudine-frecvență a EROZ.

Dacă frecvența de eșantionare este înaltă și $\omega_x > \omega_e/2$, atunci în banda de bază spectrul $X(j\omega)$ este deformat de componentele aderente cu $k\pm 1$ (fig. 5.4, c). Când semnalul continuu $x(t)$ are spectrul limitat de frecvență ω_x și frecvența de eșantionare $\omega_e \geq 2\omega_x$, atunci în baza teoremei de eșantionare perioada de eșantionare se alege din condiția:

$$T = 0,5 \frac{2\pi}{\omega_x}. \quad (5.8)$$

Dacă semnalul continuu $x(t)$ este discretizat la condiția (5.8), atunci și spectrul lui $X(j\omega)$ în banda de bază $(-\omega_e/2, +\omega_e/2)$ nu este deformat de componentele aderente și spectrul poate fi reconstruit în forma continuă cu aplicarea elementului de formare ca filtru ideal de frecvență joasă cu locul de transfer $G_f(j\omega)$ (fig. 5.4, d, linia punctată):

$$|G_f(j\omega)| = \begin{cases} T, & \text{când } |\omega| < \omega_e, \\ 0, & \text{când } |\omega| \geq \omega_e. \end{cases} \quad (5.9)$$

Dar filtrul (5.9) fizic nu este realizabil și atunci în practică se folosește fixatorul (5.5) cu locul de transfer

$$|G_{ER}(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right|, \quad (5.10)$$

care esențial diferă de forma dreptunghiulară a funcției amplitudine-frecvență $|G_f(j\omega)|$ din (5.9).

În rezultat, acest fixator real (5.10) introduce o deformare a spectrului $X(j\omega)$ în banda de bază și conține și armonici ale componentelor aderente cu frecvența $\omega_x > \omega_e/2$.

În cazul când frecvența de eșantionare $\omega_e \gg \omega_x$, atunci fixatorul (5.5) se aproximează cu un element cu timp mort cu f.d.t.:

$$G_{ER}(s) \approx T e^{-sT/2}. \quad (5.11)$$

În aceste cazuri SAD (fig. 5.1) se poate studia ca sistem continuu descris cu f.d.t. (5.2) și (5.11), având în vedere că elementul echivalent al fixatorului reduce rezerva de stabilitate a sistemului.

Pentru a simplifica procedura de analiză a dinamicii sistemului discret elementul de reținere ER se recomandă de aproximat cu element cu inerție de ordinul unu cu f.d.t.:

$$G_{ER}(s) \approx \frac{T}{Ts+1}, \quad (5.12)$$

care este cu atât mai precisă cu cât este mai mare frecvența de eșantionare ω_e .

La determinarea frecvenței de eșantionare minimală admisibilă a sistemului închis frecvența ω_x este frecvența de lucru a părții continue a sistemului.

Deoarece spectrele semnalelor de intrare și a sistemului lent se reduc (se micșorează) și la valori finite a frecvenței ω_x nu sunt nule (fig. 5.6, a), în practică frecvența de eșantionare se alege din condiția:

$$\omega_e = (5 \cdots 10)\omega_x, \quad (5.13)$$

iar banda spectrului ω_x se determină ca 5-10% a zonei de intensitate a spectrului.

Modelul matematic al SAD cu modulație în amplitudine

Descrierea matematică și analiza SAD cu MA esențial se simplifică dacă toate semnalele atât a părții discrete cât și a părții continue se prezintă ca semnale eșantionate în momentele de timp $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$ și fiecare semnal continuu $x(t)$ se prezintă ca semnal eșantionat $x(kT)$ la momentele de eșantionare

$$x^*(t) = x(kT) = x(t)|_{t=kT}, \quad (5.14)$$

iar între momentele de eșantionare semnalul este nul. Succesiunea de impulsuri pe intervalul de timp $0 < t < \infty$ se prezintă:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT), \quad (5.15)$$

unde $\delta(t - kT)$ este δ -funcția deplasată, care există numai la momentele de eșantionare $t=kT$, iar în intervalul dintre momentele de eșantionare este nulă.

Aplicând transformata Laplace la expresia (5.15) obținem

$$X^*(s) = L\{x^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT}, \quad (5.16)$$

care se numește *transformata Laplace discretă*.

Expresia (5.16) conține componenta e^{-skT} care este o expresie transcendentă și $X^*(s)$ și funcțiile de transfer respective sunt funcții iraționale pe argumentul s și caculele devin dificile.

Pentru a transforma expresia (5.16) în expresie rațională se utilizează transformata z care este

$$z = e^{sT} \quad (5.17)$$

și expresia (5.16) cu substituția (5.17) ia forma

$$X(z) = Z\{x^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}. \quad (5.18)$$

Expresia (5.18) prezintă transformata z a succesiunii de impulsuri $x(kT)$.

Proprietățile de bază ale transformatei z sunt prezentate în Anexa B.

Pentru cele mai utilizate funcții cu timp continuu și funcții de transfer în s transformatele în z pot fi obținute folosind tabele (Anexa C).

Pentru a obține transformata z de la funcția de timp $x(t)$ fiecare componentă discretă $x(kT)$ se înmulțește cu z^{-k} și șirul obținut se însumează.

Pentru a determina semnalul $x(t)$ de la transformata $X(z)$ cunoscută aceasta se prezintă în șir după puterile în descresștere ale lui z^{-k} și coeficienții obținuți ai șirului prezintă valorile ordonatelor în momentele de eșantionare $x(kT)$ a semnalului $x(t)$.

Modelul matematic al SAD deschis

Admitem că schema bloc structurală a SAD prezentată în fig. 5.5 este alcătuită din EID și partea continuă cu f.d.t. $G(s)$. Dinamica sistemului discret este descrisă de semnalul de intrare $x^*(t)$, ($X(z)$) și semnalul de ieșire $y^*(t)$, ($Y(z)$) la momentele de eșantionare kT (în acest scop la ieșire este conectat cu linie întreruptă eșantionorul fictiv). În acest caz proprietățile SAD deschis se descriu cu funcția de transfer discretă, prezentată prin raportul a două polinoame în z $C(z)$ și $D(z)$:

$$G_d(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{C(z)}{D(z)}. \quad (5.19)$$

F.d.t. discretă se calculează după funcția pondere a părții continue cu relația:

$$G(z) = Z\{w(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} w(kT)z^{-k}. \quad (5.20)$$

Pentru a determina f.d.t. discretă $G(z)$ după f.d.t. a părții continue $G(s)$ fără a calcula funcția pondere $w(t)$ a acesteia se utilizează tabele (Anexa D).

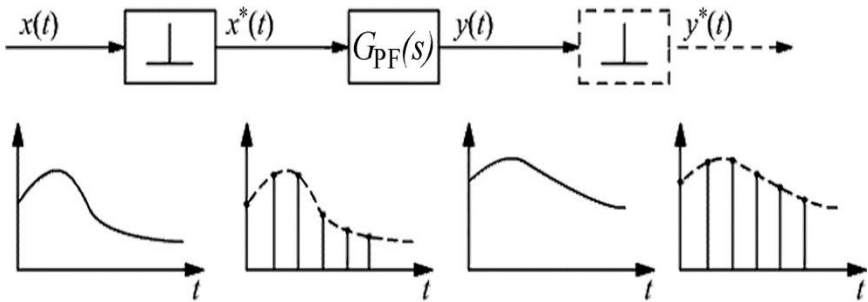


Fig. 5.5. Schema bloc structurală a SAD deschis.

Dacă în SAD deschis este utilizat elementul de discretizare real EROZ cu f.d.t. (5.5), atunci f.d.t. discretă a sistemului se calculează cu relația:

$$\begin{aligned} G_d(z) &= Z\left\{\frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s)\right\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z} Z\{h(t)\}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

unde $h(t)$ este procesul (răspunsul) indicial la semnal treaptă unitară aplicată la intrarea sistemului.

Menționăm că pentru SAD de ordin ridicat calculul exact a f.d.t.d. este dificil. În practică pentru determinarea f.d.t.d. a SAD se utilizează metode de aproximație de la $G(s)$ la $G(z)$. Aceste metode se bazează pe substituirea derivatei din ecuația diferențială cu diferențe finite:

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &\approx \frac{\Delta y(t_i)}{\Delta t} = \frac{\Delta y(t_i)}{T} = \\ &= \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{T} = \frac{y(kT) - y((k-1)T)}{T}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Dacă în ecuația diferențială a integratorului:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx x(t) \quad (5.23)$$

utilizăm diferența finită de mai sus se obține ecuația cu diferențe finite a integratorului:

$$y(kT) = y((k-1)T) + Tx(kT) \quad (5.24)$$

și expresia operatorică este:

$$Y(z) = Y(z)z^{-1} + TX(z). \quad (5.25)$$

La calculul apoximativ a f.d.t. discretă a integratorului se utilizează metodele de aproximare bazate pe substituția variabilei s din f.d.t. continuă cu variabila z :

Metoda de integrare după dreptunghi cu avans:

$$s = \frac{z-1}{T} = \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}. \quad (5.26)$$

Metoda de integrare după dreptunghi cu întârziere:

$$s = \frac{z-1}{Tz} = \frac{1-z^{-1}}{T}. \quad (5.27)$$

Metoda de integrare după trapeții (Tustin):

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)} = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}. \quad (5.28)$$

Dacă frecvența de discretizare $\omega_e \gg \omega_t$, unde ω_t este frecvența de tăiere a părții continue, atunci f.d.t.d., calculată după metodele de aproximare prezentate mai sus, este apropiată de f.d.t. a părții continue. Rezultă că proprietățile frecvențiale ale părții discrete sunt echivalente cu proprietățile părții continue descrisă de locul de transfer $G(j\omega)/T$. Aseastă condiție de echivalență, de regulă este satisfăcută, dacă cea mai mică constantă de timp a părții continue este mai mare ca perioada de eșantionare.

Prezentarea aparatului matematic de descriere a sistemelor discrete cu utilizarea transformatei z și a ecuațiilor cu diferențe finite este recomandat de utilizat pentru simularea pe calculator a sistemelor continue. Transferul de la f.d.t. $G(s)$ la f.d.t.d. $G(z)$ se efectuează prin aplicarea relațiilor de aproximare (5.26)-(5.28). Dacă însă pentru simularea pe calculator a părții continue se utilizează f.d.t.d. calculată precis după funcția pondere sau calculată după tabele, atunci preventiv este necesar de calculat f.d.t.d., care stabilește legătura dintre înfășurătoarele semnalelor discrete de intrare și ieșire exprimată prin relația:

$$G'(z) = TG(z), \quad (5.29)$$

unde componenta T este un factor de amplificare care compensează reducerea amplitudinii semnalului de elementul de eșantionare a sistemului discret (această componentă nu există în sistemul continuu).

În formă generalizată f.d.t. discretă a SAD se prezintă ca relația a două polinoame în operatori cu avans:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (5.30)$$

sau în operatori cu întârziere:

$$G(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{X(z^{-1})} = \frac{b_0z^{m-n} + b_1z^{m-1-n} + \dots + b_mz^{-n}}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}. \quad (5.31)$$

Pentru f.d.t. discretă a SAD ecuația operațională la condiția $a_0=1$:

$$Y(z) + a_1Y(z)z^{-1} + \dots + a_nY(z) = b_0X(z)z^{m-n} + b_1X(z)z^{m-1-n} + \dots + b_mX(z)z^{-n}. \quad (5.32)$$

Ecuția recursivă la condiția $a_0=1$:

$$\begin{aligned} y(kT) + a_1y((k-1)T) + \dots + a_n((k-n)T) = \\ = b_0x((k+m-n)T) + b_1x((k+m-1-n)T) + \dots \\ + b_mx((k-n)T). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Ecuția recursivă (5.33) se aplică pentru descrierea SAD sau sistemului continuu discretizat pentru calculul numeric realizat pe calculator.

Funcția de transfer a SAD închis

Dacă structura SAD închis este prezentată ca un canal direct cu EID conectat înaintea părții continue și sistemul este închis cu reacție unitară, atunci f.d.t. discretă a sistemului închis pe canalul intrare-ieșire se descrie cu relația:

$$G_i(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_d(z)}{1+G_d(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (5.34)$$

Funcția de transfer a erorii SAD închis se prezintă

$$G_\varepsilon(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+G_d(z)} = \frac{B_\varepsilon(z)}{A_\varepsilon(z)}. \quad (5.35)$$

Structura și caracteristicile sistemului automat numeric

Tehnici avansate de conducere automată prezintă utilizarea calculatoarelor (microprocesoarelor, regulatoare numerice) în

regim de conducere directă când calculatorul este conectat în conturul sistemului, care funcționează în timp real cu procesul industrial și elaborează algoritmi de conducere care prin elementele de execuție acționează asupra obiectului. Totodată calculatorul este și element funcțional de formare a semnalului de referință și în calitate de sumator (comparator).

Schema funcțională și structurală convenționale ale sistemului automat numeric monovariabil sunt prezentate în fig. 5.6, a, b.

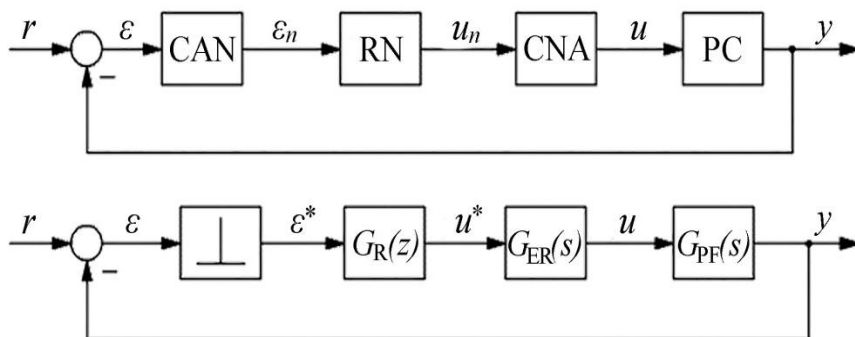


Fig. 5.6. Schemele funcțională și structurală convenționale ale SAN.

Dacă partea continuă și algoritmi realizați pe calculator sunt liniari, atunci sistemul automat numeric (SAN) se analizează ca sistem cu discretizare în amplitudine – sistem eșantionat. În schema bloc structurală a SAN (fig. 5.6, b) partea continuă este prezentată ca f.d.t. a părții fixate $G_{PF}(s)$. Convertorul analog-numeric (CAN) se prezintă ca un element ideal cu eșantionare în timp a semnalului continuu a erorii $\varepsilon(t)$ (discretizarea în nivel, datorită cuantei mici, se neglijează) și la ieșirea căruia se obține semnalul discret a erorii $\varepsilon^*(t)$ transmis în continuare calculatorului cu f.d.t. discretă $G_c(z)$, care îl prelucrează conform algoritmului de conducere și, în rezultat, se obține semnalul mărimii de conducere $u^*(t)$. Semnalele $\varepsilon(kT)$ și $u(kT)$ reale se prezintă ca o succesiune de coduri (cifre). Perioada de eșantionare T a elementului de

discretizare se alege în concordanță cu perioada de verificare a traductoarelor din conturul respectiv.

Convertorul numeric-analog (CNA) se prezintă ca element de reținere de ordinul zero (EROZ) descris cu f.d.t. $G_{ER}(s)$ (5.5) ca element cu funcționare în timp continuu.

Partea liniară continuă în SAN se prezintă ca conexiune serie a elementului de reținere $G_{ER}(s)$ cu partea fixată $G_{PF}(s)$ și se obține f.d.t. echivalentă $G_{PE}(s) = G_{ER}(s)G_{PF}(s)$, iar în transformata z cu f.d.t. discretă $G_{PE}(z) = Z\{G_{ER}(s)G_{PF}(s)\}$.

Funcționarea CAN, a calculatorului și CNA se sincronizează de la taimer. Semnalele de intrare se transmit în calculator prin multiplexoare, iar ieșirile din calculator prin demultiplexoare. Timpul de prelucrare a informației în calculator este mai mic decât perioada de eșantionare.

Realizarea algoritmului numeric de prelucrare a informației în calculator dintre mărimea de intrare $\varepsilon^*(t)$ și mărimea de ieșire $u^*(t)$ se prezintă prin f.d.t.d. $G_R(z)$, care se numește *filtru discret sau regulator numeric*.

Funcția de transfer în operatori cu avans a SAN închis se descrie cu relația:

$$G_0(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_R(z)G_{PE}(z)}{1+G_R(z)G_{PE}(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\dots+b_m}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n} \quad (5.36)$$

sau în operatori cu întârziere:

$$G_0(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{R(z^{-1})} = \frac{b_0z^{m-n}+b_1z^{m-1-n}+\dots+b_mz^{-n}}{a_0+a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}. \quad (5.37)$$

Pentru f.d.t. discretă a SAN ecuația operațională la condiția $a_0=1$ este:

$$Y(z) + a_1Y(z)z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}Y(z) = b_0R(z)z^{m-n} + b_1R(z)z^{m-1-n} + \dots + b_mR(z)z^{-n}. \quad (5.38)$$

Ecuația recursivă la condiția $a_0=1$:

$$\begin{aligned}
& y(kT) + a_1 y((k-1)T) + \dots + a_n((k-n)T) = \\
& = b_0 r((k+m-n)T) + b_1 r((k+m-1-n)T) + \dots \\
& \quad + b_m r((k-n)T). \tag{5.39}
\end{aligned}$$

Funcția de transfer discretă a regulatorului numeric se prezintă în forma cu operatori de întârziere:

$$G_R(z^{-1}) = \frac{U(z^{-1})}{E(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + b_r z^{-r}}{p_0 - p_1 z^{-1} - \dots - p_s z^{-s}}. \tag{5.40}$$

Ecuția operațională a regulatorului este

$$\begin{aligned}
& U(z^{-1})(p_0 - p_1 z^{-1} - \dots - p_s z^{-s}) = \\
& = E(z^{-1})(q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + b_r z^{-r}). \tag{5.41}
\end{aligned}$$

În domeniul timpului mărimea de conducere se exprimă cu relația recurentă:

$$u(k) = \frac{1}{p_0} \sum_{i=0}^r q_i \varepsilon(k-i) - \frac{1}{p_0} \sum_{i=0}^r p_i u(k-i). \tag{5.42}$$

Mărimea de conducere discretă curentă $u(k)$ se calculează cu valorile curente și anterioare ale erorii și cu valorile anterioare ale mărimii de conducere.

Metoda prezentată mai sus permite de a sintetiza SAD optimal după rapiditate în timp. Procesul optimal se realizează în baza alegerii amplitudinilor semnalului de conducere pe durata timpului impus sistemului. În sistemele cu releu procesul optimal în timp minimal se realizează prin selectarea momentelor de schimbare a semnului semnalului de conducere cu amplitudine continuă.

Utilizarea calculorului în SAN permite de a realiza algoritmi sofisticăți de conducere și, astfel, a obține procese tranzitorii în sistem, care nu pot fi realizate în sisteme continue.

Pentru sinteza regulatorului numeric (realizat pe calculator) în SAN cu proces tranzitoriu cu timp finit impus $t_n = kT$ ($k=n$ este

ordinul sistemului sau a părții fixate care este determinată de proprietățile obiectului de conducere) se utilizează relația (5.36), în care se admite că f.d.t. a SAN este construită pe baza performanțelor impuse și f.d.t. a PF cunoscută și atunci din relația (5.36) obținem f.d.t. a regulatorului

$$G_R(z) = \frac{G_0(z)}{1-G_0(z)} \frac{1}{G_{PF}(z)} = \frac{Q(z)/k_f}{z^l - P(z)/k_f}, \quad (5.43)$$

unde $l=n$, $Q(z)$ și $P(z)$ sunt polinoamele f.d.t. a regulatorului, k_f - coeficientul de transfer a PF, coeficientul de transfer al regulatorului $k_R = \frac{1}{k_f}$ în regim staționar.

În cazul când perioada de eșantionare T tinde la zero ($T \rightarrow 0$) proprietățile SAD tind către proprietățile sistemului continuu. În acest caz f.d.t. a SAD deschis se prezintă ca conexiune serie a elementului ideal (eșantionorul se descrie ca amplificator) și PF.

Principiul discret de reglare se aplică pentru procese lente, care are avantajul de a aplica semnale cu amplitudine mare, ceea ce dă posibilitatea de a utiliza echipamente mai simple, care nu conduc la modificarea proprietăților dinamice ale OR (proceselor) în comparație cu principiul continuu de conducere care conduc la modificarea proprietăților obiectului de reglare.

În fig. 5.7 se dă un exemplu de realizare a elementului real de discretizare: *a*) - schema de principiu electrică; *b*) - semnalul de intrare $x(t)$ și semnalele discretizate $x^*(t)$, $x_i(t)$, C - elementul ideal de discretizare cu perioada T , ER - elementul de reținere.

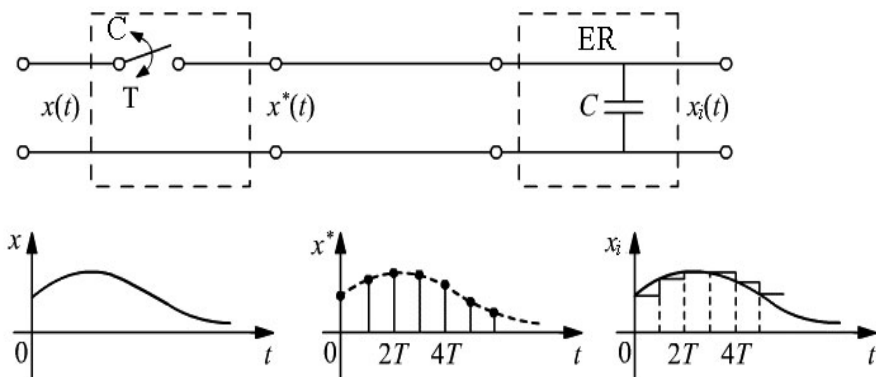


Fig. 5.7. Exemplu de realizare a elementului real de discretizare.

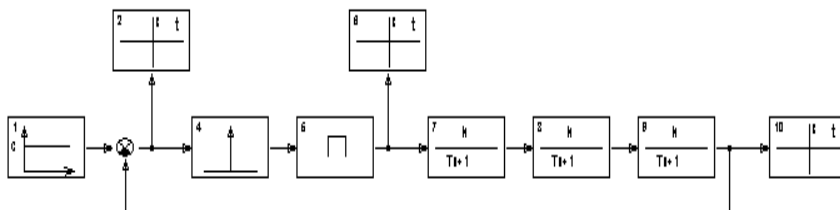
2. Mersul lucrării

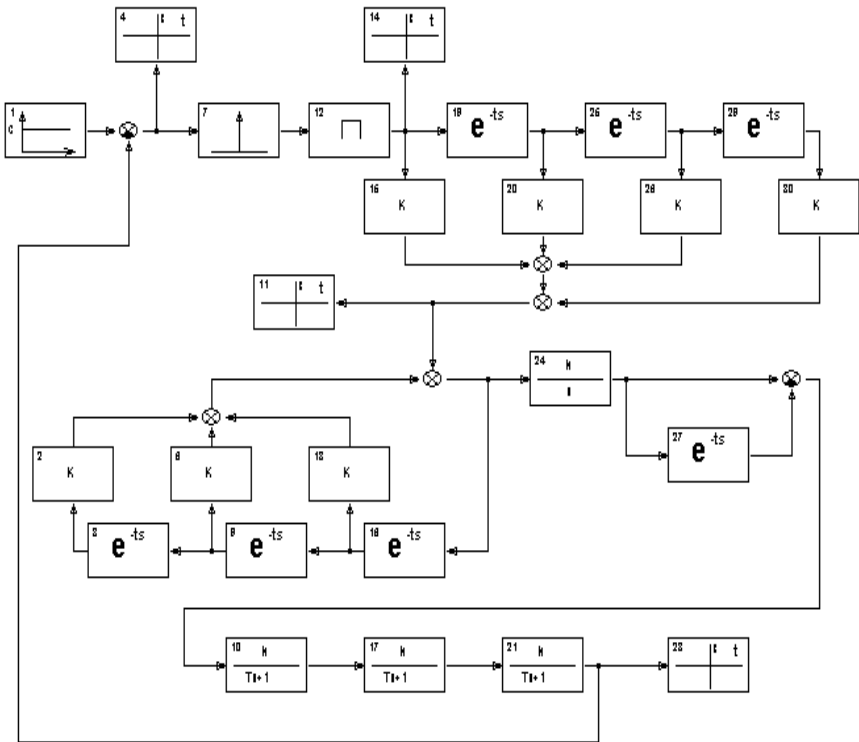
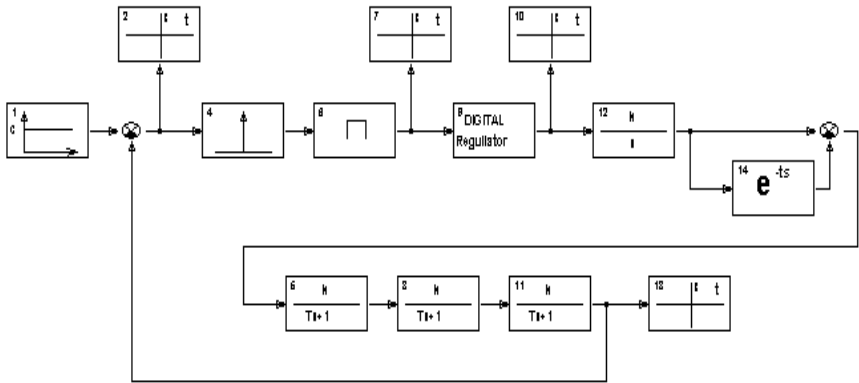
1. Simulați pe calculator structura SAL din fig. 5.8. Valorile parametrilor funcțiilor de transfer se numesc de lector. Aplicați semnalul de intrare treaptă unitară și ridicați procesul tranzitoriu.

2. Simulați pe calculator structura SAD din fig. 5.8 și repetați p. 1. Valorile parametrilor funcțiilor de transfer și ale perioadei de eșantionare se numesc de lector.

3. Modificați perioada de eșantionare

4. Simulați pe calculator structura SAD din fig. 5.8 și repetați p. 1. Valorile parametrilor funcțiilor de transfer și ale perioadei de eșantionare se numesc de lector.





3. Conținutul referatului

1. Schemele structurale ale sistemelor automate studiate.
2. Procesele tranzitorii ale sistemelor studiate.
3. Concluzii.

4. Chestionar

1. Ce prezintă discretizarea unui semnal?
2. Tipurile de modulație a parametrilor impulsului.
3. Cum se calculează perioada de eșantionare?
4. Cum influențează stabilitatea modificarea perioadei de eșantionare asupra stabilității și performanțelor sistemului?

Bibliografie

1. КУО, Б. *Теория и проектирование цифровых систем управления*. М.: Машиностроение, 1986. 448 с.
2. ДЫННИКОВ, А. И. *Цифровые системы управления*. М.: МФТИ, 2006. 196 с.
3. АСТРЕМ, К.; ВИТЕНМАРК, Б. *Системы управления с ЭВМ*. М.: Мир, 1987. 480 с.
4. БАЛАБАНОВ, А. А. *КОПРАС – Техника компьютерного моделирования автоматических систем*. К.: ТУМ, 2004. Т. 1. 390 с. ISBN 9975-9771-4-8.
5. ИВАЩЕНКО, Н.Н. *Автоматическое регулирование*. М.: Машиностроение, 1978. 736 с.
6. КИМ, Д. П. *Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 464 с. ISBN 5-9221-0534-5.

7. КИМ, Д. П.; ДИМИТРИЕВА Н. Д. *Сборник задач по теории автоматического управления. Линейные системы.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 168 с. ISBN 978-5-9221-0873-7.

8. ЛУКАС В. А. *Теория автоматического управления.* М.: Недра, 1990. 416 с. ISBN 5-247-01027-2.

9. ПАНТЕЛЕЕВ, А. В.; БОРТАКОВСКИЙ, А. С. *Теория управления в примерах и задачах.* М.: Высшая школа, 2003. 583 с.

10. *Теория автоматического управления.* Под ред. В. Б. ЯКОВЛЕВА. М.: Высшая школа, 2005. 567 с. ISBN 5-06-004096-8.

11. *Теория автоматического управления: Нелинейные системы управления при случайных воздействиях.* Под ред. А. В. НЕТУШИЛА. М.: Высшая школа, 1983. 432 с.

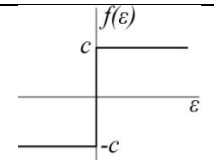
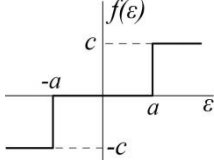
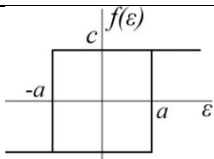
12. *Теория автоматического управления. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления.* Под ред. А. А. ВОРОНОВА. М.: Высшая школа, 1986. Ч. 2. 504 с.

13. VOICU, M. *Introducere în automatică.* Iași: Editura Dosoftei, 1998. 237 p.

14. Гайдук, А. Р. *Теория автоматического управления.* М.: Высшая школа, 2010. 415 с.

ANEXE
Anexa A

Tipuri de neliniarități

Nr. crt.	Caracteristica statică a elementului neliniar	Coeficienții liniarizării armonice	
		$q(a)$	$q'(a)$
1		$\frac{4c}{\pi a}$	0
2		$\frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, cu $a \geq b$.	0
3		$\frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, cu $a \geq b$.	$-\frac{4cb}{\pi a^2}$, cu $a \geq b$.

$f(\varepsilon)$

4		$\frac{2c}{\pi a} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{mb^2}{a^2}} \right)$, cu $a \geq b$.	$-\frac{2cb}{\pi a^2} (1-m)$, cu $a \geq b$.
5		$\frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right)$, cu $a \geq b$.	0
6		$\frac{3B}{4} A^2$	0

Anexa B

Proprietățile transformatei z

Proprietățile prezentate derivă din proprietățile șirurilor și a serilor de puteri, obținute de relația de definiție a transformatei z. Prezentăm principalele proprietăți.

1. *Liniaritatea.* Oricare ar fi șirurile $f_1(k)$, $f_2(k)$ și constantele reale α_1 , α_2 obținem

$$Z\{\alpha_1 f_1(k) \pm \alpha_2 f_2(k)\} = \alpha_1 F_1(z) \pm \alpha_2 F_2(z).$$

2. *Teorema deplasării în real a argumentului originalului.* Dacă $f(k)$ este un șir și $F(z) = Z(f(k))$ transformatele ale șirurilor deplasate cu un pas înainte respectiv înapoi, definite prin operatorul q cu avans cu un pas

$$g = qf(k) = \begin{cases} g(k) = f(k+1), & k \geq 0, \\ g(k) = 0, & k < 0 \end{cases}$$

și introducem operatorul invers, notat cu q^{-1} de deplasare înapoi cu un pas (de întârziere cu un pas)

$$g = q^{-1}f(k) = \begin{cases} g(0) = 0, \\ g(k) = f(k-1), \end{cases} \quad k \geq 1,$$

atunci vom obține

$$\begin{aligned} Z(qf(k)) &= z(F(z) - f(0)), \\ Z(q^{-1}f(k)) &= (F(z) - f(0)). \end{aligned}$$

Prin inducția matematică ultimele relații se generalizează pentru orice $m > 0$, natural, finit

$$\begin{aligned} Z(q^m f(k)) &= z^m \left(F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{-k} \right), \\ Z(q^{-m} f(k)) &= z^{-m} (F(z) - f(0)). \end{aligned}$$

În relația prezentată înmulțirea la z^{-m} corespunde reținerii semnalului discret pe m perioade de eșantionare.

Aseastă proprietate este deosebit de utilă pentru rezolvarea ecuațiilor cu diferențe finite prin mijloace operaționale.

3. *Transformata z a șirului diferențelor.* Pentru șirul diferențelor definite

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$$

obținem utilizând proprietatea 2)

$$Z(\Delta f(k)) = (z-1)Z(f(k) - f(0)) = (z-1)F(z) - f(0).$$

4. *Transformata z a șirului $g(k)$ al sumelor parțiale.* Fie un șir arbitrar. Definim șirul $g(k)$ al sumelor parțiale ale lui $f(k)$ prin

$$g(k) = \sum_{i=0}^{k-1} f(i) = \Delta^{-1}f(k)$$

și interpretăm operatorul de sumare ca inversul operatorului diferență. Atunci transformata z a șirului $g(k)$ este dată de relația

$$G(z) = Z(g(k)) = \frac{Z(f(k))}{z-1} = \frac{F(z)}{z-1}.$$

5. *Transformata z a produsului de convoluție.*

Fie $g = f_1 * f_2$ șirul produs de convoluție, definit

$$g(k) = (f_1 * f_2)(k) = \sum_{i=0}^k f_1(k-i)f_2(i), k \geq 0$$

a șirurilor f_1, f_2 de transformate $F_1(z), F_2(z)$

$$G(k) = Z[(f_1 * f_2)(k)] = F_1(z) F_2(z).$$

6. *Teorema valorii inițiale a originalului.* Fiind dată transformata $F(z)$ a șirului $f(k)$, valoarea acestuia din momentul $k=0$ este

$$\lim_{k=0} f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z).$$

7. *Teorema valorii finale a originalului.* Dacă șirul $f(k)$ este convergent și are ca transformată z pe $F(z)$ atunci

$$\lim_{k=\infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z).$$

Anexa C

Funcții de timp continue și discrete, imaginea Laplace s și transformata z

Nr. crt.	Denumirea funcției	Original $f(t)$	Imaginea $G(s)$	Original $f(kT)$	Imaginea $G(z)$
1	Delta impuls	$\delta(t)$	1	$\delta(kT)$	$z^{-0} = 1$
2	Treaptă unitară	$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
3	Funcție rampă	t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
4	Funcție pătratică	t^2	$\frac{2!}{s^3}$	$(kT)^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
5	Funcție polinomială	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{n-1} (kT)^{n-1}$	$\frac{1}{n-1} \frac{T^{n-1} z(z+1)}{(z-1)^n}$
6	Exponențială	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$e^{\alpha kT}$	$\frac{z}{z+e^{\alpha T}}$
7	Exponențială	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha kT}$	$\frac{z}{z-d}, d = e^{-\alpha T}$

8	Sinusoidă	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega kT$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
9	Cosinusoidă	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega kT$	$\frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
10	Produsul exponentei cu sinusoidă	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha kT} \sin \omega kT$	$\frac{z d \sin \omega T}{z^2 - 2zd \cos \omega T + d^2}$
11	Produsul exponentei cu cosinusoidă	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha kT} \cos \omega kT$	$\frac{z d \cos \omega T}{z^2 - 2zd \cos \omega T + d^2}$

Anexa D

Funcții de transfer în transformata Laplace s și transformata z pentru elemente dinamice

Nr. crt.	$G(s)$	$G(z)$
1	k	k
2	$\frac{k}{s}$	$\frac{kz}{z - 1}$
3	$\frac{k}{s^2}$	$\frac{kTz}{(z-1)^2}$
4	$\frac{k}{T_0 s + 1}$	$\frac{k}{T_0} \frac{z}{(z - e^{-T/T_0})}$
5	$\frac{k}{s(T_0 s + 1)}$	$\frac{k(1 - e^{-T/T_0})z}{(z - 1)(z - e^{-T/T_0})}$
6	$\frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$\frac{k(e^{-T/T_1} - e^{-T/T_2})}{T_1 - T_2} \frac{z}{(z - e^{-T/T_1})(z - e^{-T/T_2})}$

7	$\frac{k}{(T_0s + 1)^2}$	$\frac{kT e^{-T/r_0}}{T_0^2} \frac{z}{(z - e^{-T/r_0})^2}$
8	$\frac{k}{s^2(T_0s + 1)}$	$k \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{T_0(1 - e^{-T/r_0})z}{(z-1)(1 - e^{-T/r_0})} \right]$
9	$\frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$k \left[\frac{z}{z-1} + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \frac{z}{z - e^{-T/r_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} \frac{z}{z - e^{-T/r_2}} \right]$
10	$\frac{k}{s^2(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$k \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(T_1 + T_2)z}{z-1} - \frac{T_1^2}{T_2 - T_1} \frac{z}{z - e^{-T/r_1}} + \frac{T_2^2}{T_2 - T_1} \frac{z}{z - e^{-T/r_2}} \right]$
11	$\frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$	$k \left[\frac{T_1^2}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)} \frac{z}{z - e^{-T/r_1}} + \frac{T_2^2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)} \frac{z}{z - e^{-T/r_2}} + \frac{T_3^2}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)} \frac{z}{z - e^{-T/r_3}} \right]$
12	$\frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$	$k \left[\frac{z}{z-1} - \frac{T_1^2}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)} \frac{z}{z - e^{-T/r_1}} - \frac{T_2^2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)} \frac{z}{z - e^{-T/r_2}} - \frac{T_3^2}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)} \frac{z}{z - e^{-T/r_3}} \right]$