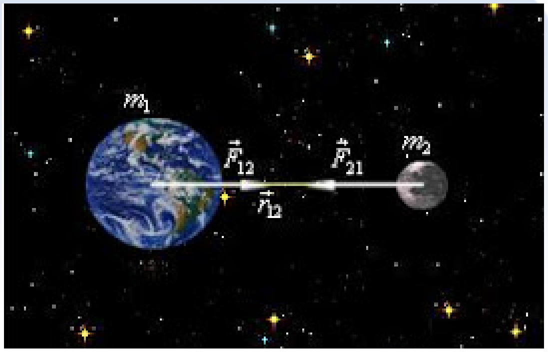
Электричество и магнетизм

Электрическое поле в вакууме

1. Электрическое поле и его характеристики

1.1. Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда

В механике рассматривается один из фундаментальных видов взаимодействия – **гравитационное**, обусловленные наличием у частиц массы.



Кроме массы, элементарные частицы материи обладают неотъемлемых свойств, обуславливающих возможность вступить в другие виды взаимодействия – **электромагнитные и ядерные**.

Скалярная величина, характеризующая способность частицы вступить в электромагнитное взаимодействия, получила название **электрического заряда**.

Под этим понимают, что частица, имеющая заряд, взаимодействует с определенной силой с другой частицей (частицами), также обладающей зарядом.

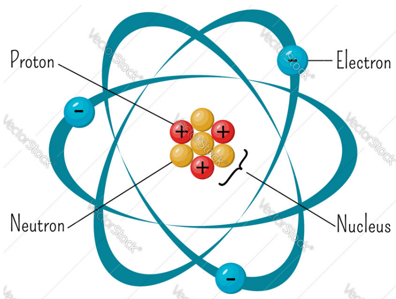
1.1. Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда

Опыт показывает, что существуют два качественно различных вида электрического заряда – **положительные и отрицательные**.

Одноименные заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются.

Абсолютная величина электрического заряда всех элементарных частиц одинакого и равна $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Такой заряд называется **элементарным**. Элементарной частицы, несущий **отрицательный элементарный заряд**, является **электрон**, **положительный – протон**.



Обе эти частицы являются составляющими атомов и молекул, из которых состоят все тела.

Макроскопическое тело тоже может быть заряженным положительно или отрицательно. Это значит, что оно содержит в избытке определенный электрический заряд.

1.1. Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда

Американский физик Р. Милликен экспериментально доказал, что электрический заряд любого тела является целым кратным элементарному заряду $|e|$:

$$q = \pm N|e|, \text{ где } N = 0,1,2,...$$

Факт, выраженный этой формулой, означает, что электрический заряд квантуется, т.е. может принимать только определенные дискретные значения.

Современная физическая теория доказывает, что N может принимать дробные значения, равные ⅓ и ⅔. Частицы, несущие дробный заряд $e/3$ и $2e/3$, получили название **кварков**. В свободном состоянии такие частицы не обнаружены.

Так ка заряд – неотъемлемое, неуничтожимое свойства, то какого бы ни было взаимодействие между зарядами **изолированной**, или **замкнутой системы** (*которое не обменивается с окружающими телами заряда*) ее суммарный электрический заряд остается неизменным с течением времени.

Суммарный заряд означает алгебраическую сумму зарядов:

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = const$$

Это утверждение называется **законом сохранения электрического заряда**.

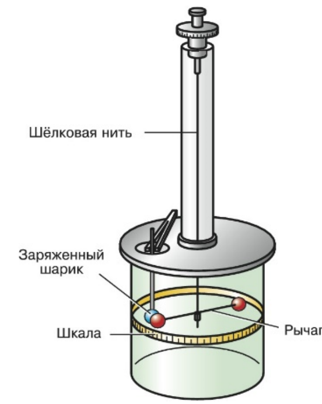
В заключении заметим, что **электрический заряд релятивистки инвариантен** – *величина заряда не зависит от выбора системы отсчета*.

1.2. Закон Кулона

Рассмотрим **взаимодействие статических электрических зарядов**, т.е. *неподвижных или перемещаются настолько медленно, что силы взаимодействия практически не зависят от скорости движения зарядов*.

<u>Взаимодействия точечных зарядов.</u>

Точечным зарядом ***q*** называется заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями до других заряженных тел, с которыми данное взаимодействует.

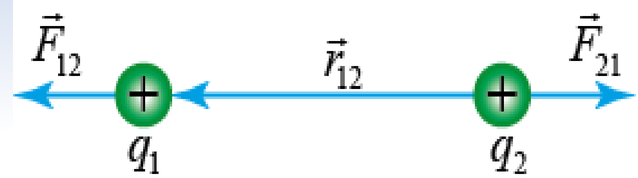


Закон взаимодействия точечных зарядов был установлен экспериментально в 1785 г. французским ученым Ш. Кулоном:

Сила взаимодействия двух точечных зарядов направлена вдоль прямой, соединяющей заряды, она прямо пропорциональна величинам взаимодействующих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

1.2. Закон Кулона

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$



Сила величина векторная. В векторной форме закон Кулона принимает вид:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r},$$

где $\vec{F}_{12}$ -сила, действующая на заряд q_1 со стороны q_2, $\vec{r}_{12}$ - радиус-вектор, определяющий положения заряда q_1 относительно q_2 , r – расстояние между зарядами.

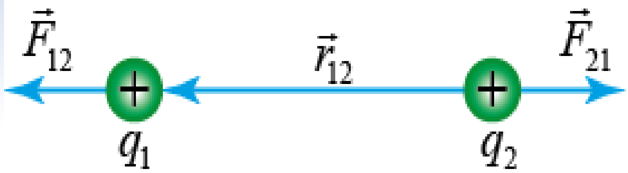
Из рисунка видно, что сила $\vec{F}_{12}$ совпадает с направлении $\vec{r}_{12}$, она положительна для одноименных зарядов. Итак, сила отталкивания двух одноименных зарядов положительна.

В соответствии с третьем законом Ньютона сила, действующая на заряд q_2 со стороны q_1 :

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

1.2. Закон Кулона

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$



Коэффициент пропорциональности ***к*** зависит от выбора системы единиц измерения.

В *СИ*: $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\,\text{м}^2} = \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$ – електрическая постоянная

Таким образом, закон Кулона может быть записан следующим образом:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}$$

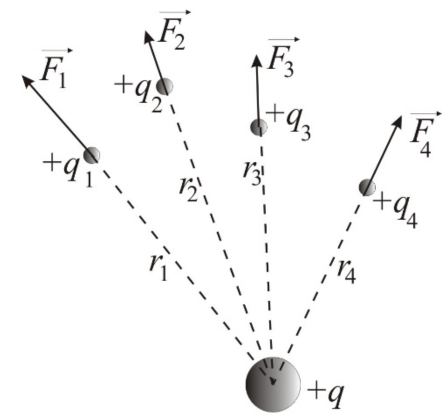
Такая форма записи называется *рационализованной*. Она упрощает расчёт.

1.3. Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции

В законе Кулона ничего не сказано о том, каким образом осуществляется взаимодействие точечных зарядов. Согласно современным представлениям взаимодействие между заряженными телами (точечными зарядами), осуществляется посредствами особого вида материи, называемого *полем*.

Взаимодействие статистических электрических зарядов осуществляется посредством *электростатических полей*.

Неподвижный заряд $\boldsymbol{q}$ создает в окружающем пространстве электрическое поле.



Если мы вносим заряды $q_1, q_2, ..., q_i, ..., q_n$ то на них будет действовать разные силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_i, ..., \vec{F}_n$, причем эти силы не зависит от наличие других зарядов, следует сила не является характеристикой поля заряда $\boldsymbol{q}$.

Однако, отношения $\frac{F_1}{q_1}, \frac{F_2}{q_2}, ..., \frac{F_i}{q_i}, ..., \frac{F_n}{q_n}$ будет зависеть только от величины заряда $\boldsymbol{q}$ и положения точки поля, в которую помещен заряд.

1.3. Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции

Эта величина, очевидно, и будет характеризовать поле заряда $\boldsymbol{q}$ в соответствующей точке.

Воспользуемся пробным зарядом $q_{пр}$. На него будет действовать кулоновская сила:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q \cdot q_{пр}}{r^3}\vec{r}$$

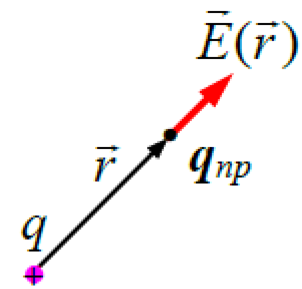
Разделим ее на $q_{пр}$:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad [E] = \frac{Н}{Кл} = \frac{В}{м}$$

$\vec{E}$ – напряженность электрического поля точечного заряда $\boldsymbol{q}$. Это силовая характеристика этого поля.

Напряженность электрического поля численно равна силе, действующей на единичный пробный заряд, помещенный в данную точку поля.

Направление вектора $\vec{E}$ совпадает с направлением силы действующий на положительный заряд, помещенный в данную точку поля.



1.3. Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции

Подчеркнем, что пробный заряд не должен изменять поле, в которое он вносится.

Формула $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}$ справедливо для пробного заряда любого знака.

Если пробный заряд отрицателен, векторы $\vec{E}$ и $\vec{F}$ имеют противоположные направления.

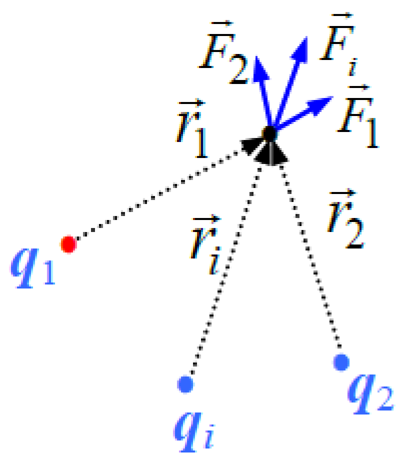
На точечный заряд $\boldsymbol{q}$ помещенный в поле известной напряженности $\vec{E}$ действует сила:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

Основной задачей электростатики является нахождение напряженности поля, создаваемого системой электрического зарядов, если известно распределение этих зарядов.

Рассмотрим систему точечных зарядов $q_1,\ q_2,\ \ldots, q_i, \ldots, q_n$. Поместим в некоторую точку поля, создаваемого этой системой пробный заряд q_{np} .

1.3. Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции



Экспериментально установлено, каждый из зарядов $q_1 \ldots q_n$ воздействует на этот пробный заряд независимо от наличие других. Поэтому результирующая сила, действующая со стороны электрического поля системы зарядов на $q_{пр}$, равна векторной сумме сил:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i,$$

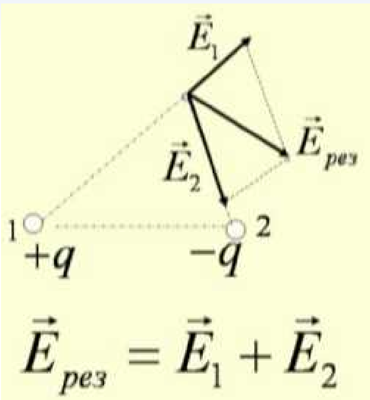
где $\vec{F}_i$ сила, с которой на заряд $q_{пр}$ действует заряд q_i в отсутствии остальных зарядов.

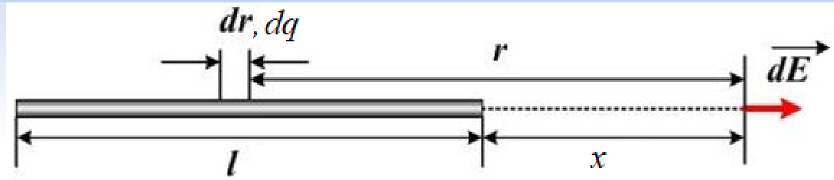
Имея в виду что, $\vec{F} = q_{пр}\vec{E},\ \vec{F}_i = q_{пр}\vec{E}_i \Rightarrow q_{пр}\vec{E} = q_{пр}\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i \Rightarrow\ \vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i$

Напряженность электрического поля системы точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.

Поле складываются, не возмущая друг друга. Это утверждение носит название **принципа суперпозиции (наложения) электрических полей**.

Пример:





Для нахождения напряженности поля заряженного тела, не являющейся точечным, нужно разделить весь заряд на элементарные ***dq***, найти $\vec{E}$ такого заряда, а затем просуммировать.

В выражении $\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$ знак $\sum$ переходит в знак интеграл:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r^3} \cdot \vec{r},$$

где интегрирование производится вдоль прямой, поверхности или объему, по которым распределен заряд,

dq – элементарный заряд элемента длины, поверхности или объема заряженного тела.

Для этого используют понятие:

$\tau = \dfrac{dq}{dl}$ – **линейная плотность заряда** – *заряд, приходящийся на единицу длины*;

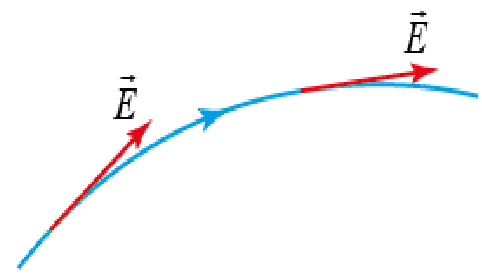
1.3. Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции

$\sigma = \dfrac{dq}{dS}$ – **поверхностная плотность заряда** – *заряд, приходящийся на единицу поверхности*;

$\rho = \dfrac{dq}{dV}$ – **объемная плотность заряда** – *заряд, приходящийся на единицу объема заряженного тела*.

Помимо аналитического метода описания электрического поля используется *графический метод*, использующий *линии напряженности поля*.

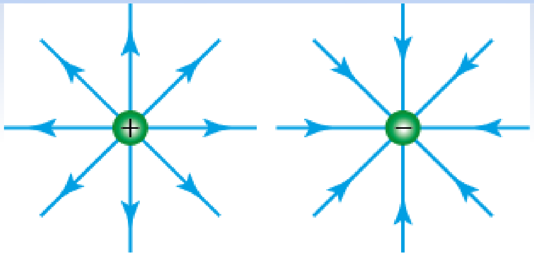
Линии напряженности электростатического поля называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с вектором напряженности поля в этой точке.



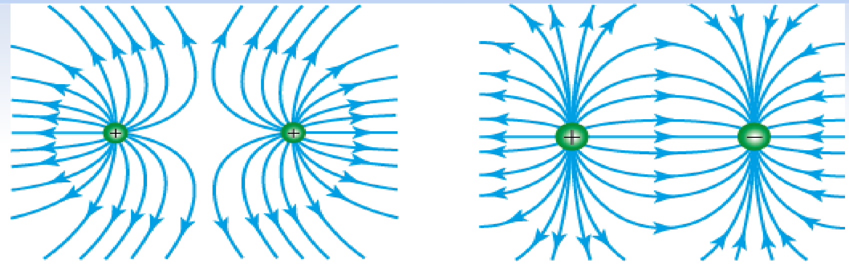
В каждой точке поля вектор $\vec{E}$ является однозначной величиной, следовательно, через каждую точку может проходить только одна линия напряженности, т.е. две или более линии не пересекаются.

Линии напряженности называют также силовыми линиями, так как направление вектора $\vec{E}$ совпадает с направлением силы.

1.3. Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции



a) *b)*



a) *b)*

Для положительного заряда линии начинаются на заряде и уходят в бесконечность, для отрицательного – приходят из бесконечности и заканчиваются на заряде.

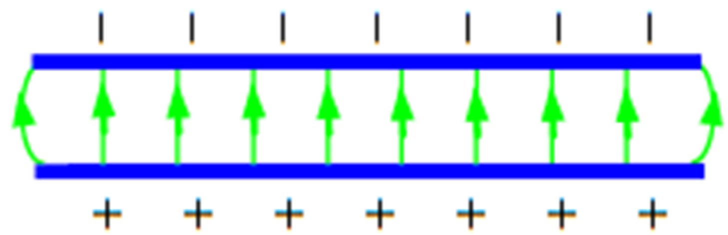
Линии любого электростатического поля разомкнуты.

Чтобы с помощью линии напряженности охарактеризовать не только направление, но и величину вектора $\vec{E}$, условно принимают, что число линий, проходящих через единичную площадку, перпендикулярно этим линиям, численно равно величине $\boldsymbol{E}$ в данной области поля.

Таким образом, густота линий $\boldsymbol{E}$ характеризует величину напряженности, $\boldsymbol{E}$ ~ густоте, где $\boldsymbol{E}$ больше там линии расположены гуще.

1.3. Напряженность электрического поля. Принцип суперпозиции

Электростатическое поле, вектор напряженности $\vec{E}$ *которого величина постоянная называется однородным.*



Линии напряженности такого поля – система параллельных эквидистантным отрезков прямых.

2. Теорема Гаусса

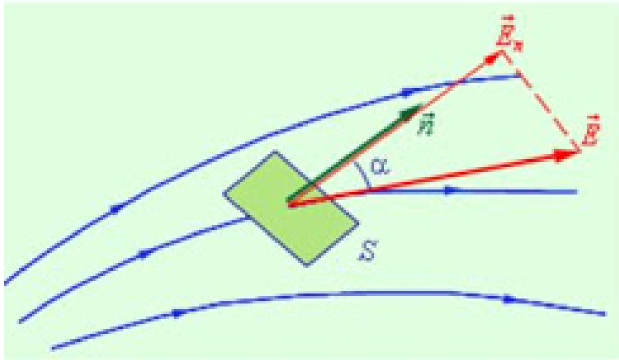
2.1. Поток вектора напряженности электростатического поля

Ранее был рассмотрен метод расчета электрического поля системы зарядов, основанный на принципе суперпозиции. Но в большинстве случаев он математически достаточно сложен.

Другой метод, значительно упрощающий вычисления связан с применением теоремы Гаусса.

Чтобы сформулировать эту теорему, введем новое понятие потока вектора напряженности электрического поля.

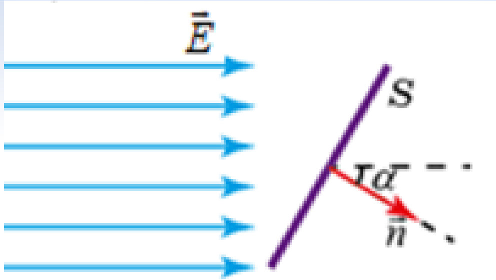
Рассмотрим в электрическом поле плоскую поверхность S и выбираем выберем определенное направление нормали к ней $\vec{n}$.



Будем считать нормаль, выходящую из поверхности, положительной.

2.1. Поток вектора напряженности электростатического поля

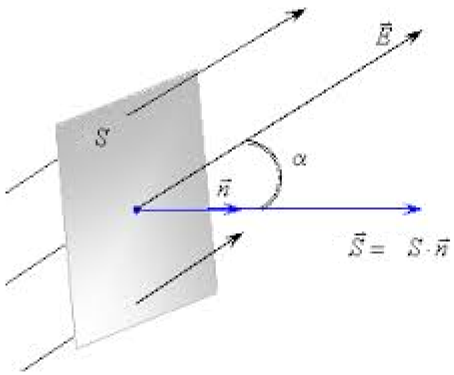
Если поле однородно и составляет произвольный угол с направлением положительной нормали, величина



$$\Phi_E = E \cdot S \cos\alpha = E_n \cdot S$$

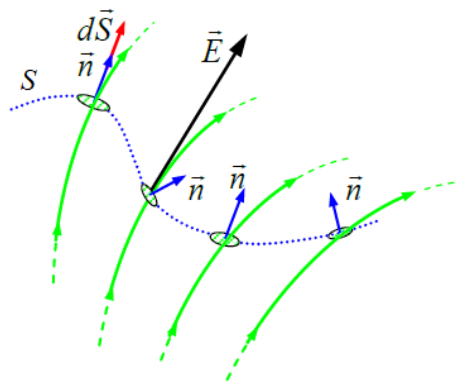
называется *потоком вектора напряженности электрического поля* через данную поверхность.

E_n проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали $\vec{n}$.



Данное выражение можно записать иначе, введя вектор поверхности

$$\vec{S} = S \cdot \vec{n} \Rightarrow \Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

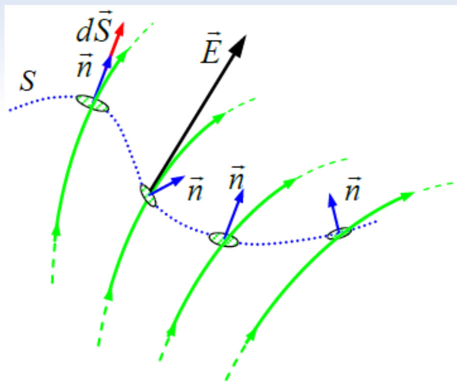


Если поле неоднородно и поверхность, через которую рассматривают поток, не является плоскостью, то эту поверхность нужно разбить на малые элементы ***dS***, каждый из которых можно считать плоским, а поле возле него однородным.

2.1. Поток вектора напряженности электростатического поля

$$d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_n \cdot dS = E\cdot dS\cdot\cos\alpha$$

- элементарный поток $\vec{E}$ через $\boldsymbol{dS}$.



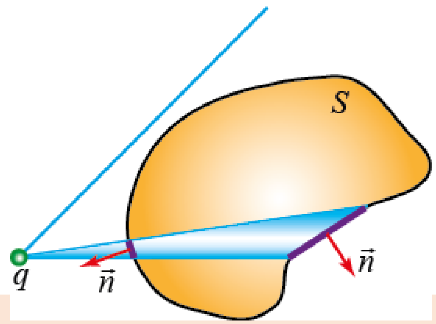
Полный поток вектора напряжённости электрического поля через произвольную поверхность в любом неоднородном электрическом поле равен

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_S E_n \cdot dS$$

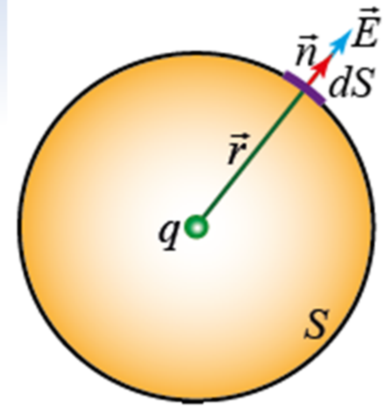
Поток вектора $\vec{E}$ численно равен количеству линий $\vec{E}$, проходящих

через поверхность (так как ***E*** численно равен густоте линий $\vec{E}$).

Это величина алгебраическая. *Положительным* считается поток, выходящий из поверхности (*cos* α *>0*) т.е. $0<\alpha<\pi/2$. Если $\pi/2 <\alpha< \pi$ ($cos\,\alpha<0$) – поток *отрицателен*.



Рассмотрим точечный положительный заряд и вычислим поток вектора напряженности $\vec{E}$ через замкнутую сферическую поверхность S, окружающую этот заряд и имеющую центр в точке нахождения заряд.



Напряженность поля точечного заряда равна:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}$$

а элементарный поток:

$$d\Phi_E = \vec{E}\cdot dS\cdot\vec{n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}\cdot\vec{n}\cdot dS$$

Поскольку направление $\vec{r}$ и $\vec{n}$ совпадают, а $|\vec{n}| = 1 \Rightarrow \vec{r}\cdot\vec{n} = r \Rightarrow$

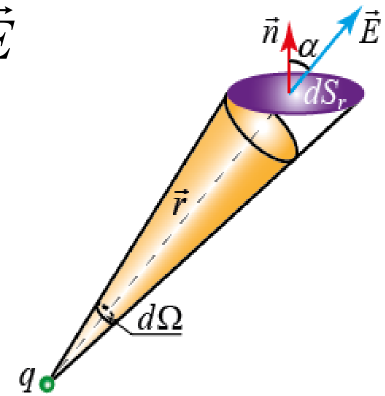
$$d\Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot dS$$

Берем интеграл по замкнутой поверхности и получим:

2.2. Теорема Гаусса в интегральной форме

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_0^{4\pi r^2} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Легко видеть, что этот результат справедлив не только для сферической поверхности, но и для любой замкнутой поверхности и для любого произвольного расположения заряда внутри этой поверхности.



Выделим элемент этой поверхности ***dS***. Поток вектора $\vec{E}$ через ***dS*** равен:

$$d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot dS\cdot\cos\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS\cdot\cos\alpha}{r^2}$$

dScosα - проекция $d\vec{S}$ на направление $\perp\vec{r}$ поэтому

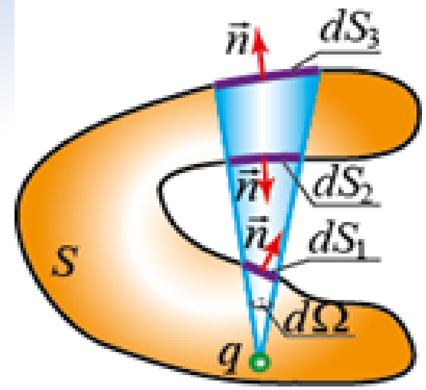
$\dfrac{dS\cos\alpha}{r^2} = d\Omega -$ телесный угол, опирающийся на площадку ***dS***.

Через всю замкнутую поверхность ***S*** поток равен:

$$\Phi_E = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega = \int_0^{4\pi}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

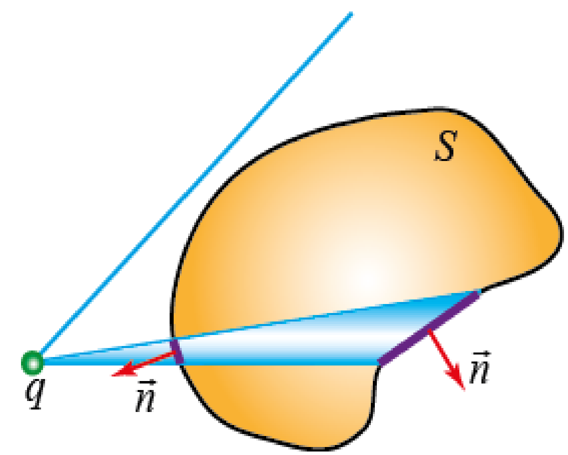
2.2. Теорема Гаусса в интегральной форме

Если поверхность имеет складки, каждая из площадок dS_1, dS_2 и dS_3 внесет в поток одинаковый по величине вклад, так как $d\Omega$ один и тот же для всех площадок, но для площадок dS_1 и dS_3 знак вклада одинаков и совпадает со знака заряда, а для площадки dS_2 - противоположен знаку заряда.



Таким образом, общий вклад всех трех площадок таков же, как и для поверхности без складок.

Если заряд расположен вне выбранной замкнутой поверхности, то каждая линия войдет и выйдет из поверхности, поэтому, если замкнутая поверхность не заключает в себе заряда, то суммарный поток вектора $\vec{E}$ через нее равен нулю.



2.2. Теорема Гаусса в интегральной форме

Теперь допустим, что внутри замкнутой поверхности находятся ***n*** точечных зарядов $q_1, q_2, ..., q_i, ..., q_n$.

В соответствии с принципом суперпозиции напряженности $\vec{E}$ поля, создаваемого этой системой зарядов, равна $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \left(\sum_i \vec{E}_i \right) d\vec{S} = \sum_i \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S}$$

Каждый из $\oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \frac{q_i}{\varepsilon_0}$, следовательно

$$\Phi_E = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i \Rightarrow \qquad \boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i}$$ **теорема Гаусса**

Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на ε_0.

2.2. Теорема Гаусса в интегральной форме

При рассмотрении полей, создаваемых макроскопическими зарядами, отвлекаются от дискретной структуры зарядов и считают их распределенными в пространстве непрерывным образом с одинаковой плотностью: $\rho = \dfrac{dq}{dV}$.

Тогда весь суммарный заряд внутри замкнутой поверхности равен:

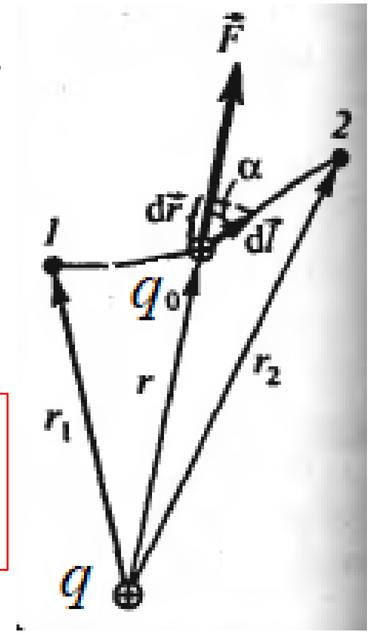
$$\sum_i q_i = \int_V \rho \cdot dV \Rightarrow$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \cdot dV$$

теорема Гаусса в интегральной форме

3. Работа перемещения заряда в электрическом поле.

Точечный заряд q_0 перемещается в поле заряда q вдоль произвольной траектории.



Элементарная работа силы F:

$$\delta A = \vec{F}\,d\vec{l} = q_0\vec{E}\cdot d\vec{l} = q_0 E\cdot dl\cos\alpha = \{dl\cos\alpha = dr\} = q_0 E\cdot dr$$

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \boxed{A_{12} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = q_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}\right)}$$

A_{12} не зависит от траектории перемещения, а *определяется только начальным и конечным положениями*. Следовательно, *электростатические силы – консервативные, электростатическое поле точечных зарядов является потенциальным*.

*Работа перемещения заряда во внешнем электростатическом поле по любому замкнутому контуру **l** равна нулю*:

$$A_{12} = q_0\oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = 0 \Rightarrow \boxed{\oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = 0}$$

- *теорема о циркуляции вектора* $\vec{E}$

Интеграл $\boxed{\oint_l \vec{E}\,d\vec{l}}$ - называется *циркуляцией вектора напряженности*.

4. Потенциал электрического поля.

Работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии (следует из предыдущего параграфа):

$$A_{12} = q_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}\right) = W_{П1} - W_{П2} \Rightarrow \boxed{W_П = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r} + const}$$

const находим из условия: $r \to \infty,\ W_П \to 0 \Rightarrow const = 0$

Величина $\boxed{\varphi = \frac{W_П}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}$ - определяемая потенциальной энергии единичного положительного заряда называется *потенциалом электростатического поля в данной точке.*

$$A_{12} = W_{П1} - W_{П2} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = q_0 \cdot \Delta\varphi \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{A_{12}}{q_0}}$$

Разность потенциалов двух точек 1 и 2 в электростатическом поле определяется работой, совершаемой силами поля при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2.

$$[\Delta\varphi] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}$$

Вольт - это разность потенциалов между двумя точками поля, при перемещении между которыми заряда в 1Кл силы поля выполняют работу в 1 Дж.

4. Потенциал электрического поля.

Потенциал является энергетической скалярной характеристикой электрического поля.

Если поле создается несколькими зарядами, то потенциал поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей всех этих зарядов.

$$\boxed{\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i}$$

Единица измерения *электрон-вольт*:

$$A_{12} = |e| \cdot \Delta\varphi \Rightarrow A_{12} = 1,6 \cdot 10^{-19}\ Кл \bullet 1\,В \Rightarrow 1\,эВ = 1,6 \cdot 10^{-19}\ Дж$$

5. Связь между напряженностью и потенциалом

В предыдущих параграфах было выяснено, что электрическое поле можно описать либо с помощью векторной величины $\underset{\mathrm{E}}{\rightarrow}$, либо с помощью скалярной величины φ. *Существует ли связь между этими величинами?*

Известно: $\begin{cases} \delta A = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E_l dl & \left\{ \vec{E} = E_l \cos\alpha \right\} \\ \delta A = -q_0 \cdot d\varphi \end{cases} \Rightarrow q_0 E_l \, dl = -q_0 \, d\varphi$

$$\boxed{E_l = -\frac{d\varphi}{dl}}$$

Знак «-» отражает тот факт, что напряженность поля направлена в сторону убывания потенциала.

В декартовой системе координат:

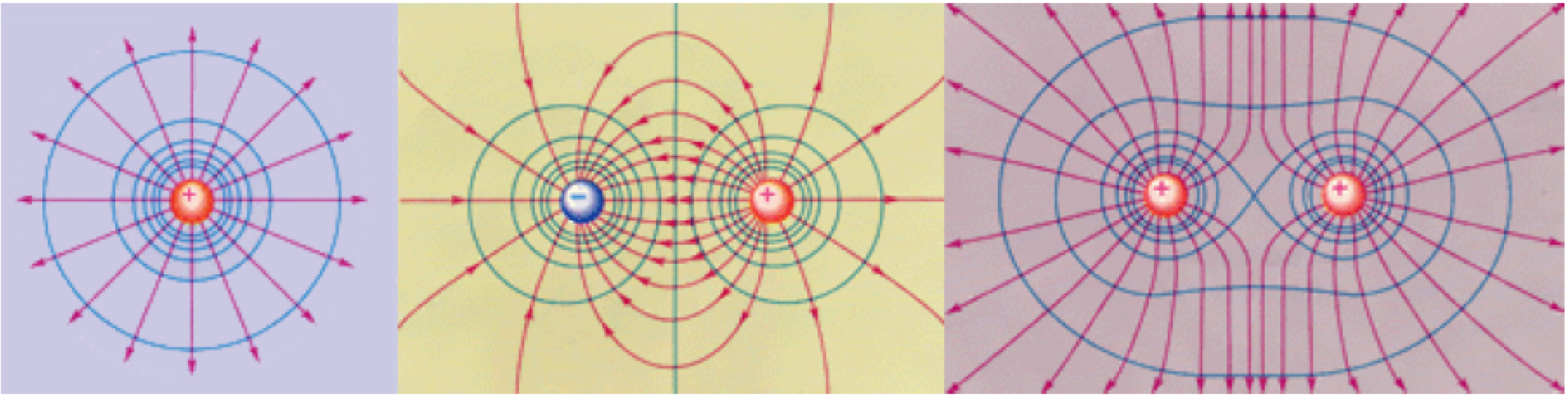
$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)$$

$$\boxed{\vec{E} = -grad\ \varphi = -\nabla\varphi,}$$

grad показывает быстроту изменения какой либо величины в заданном направлении.

5. Связь между напряженностью и потенциалом

Для графического изображения распределения потенциала используются *эквипотенциальные поверхности – поверхности, во всех точках которых потенциал* φ *имеет одно и то же значение.*



Густота эквипотенциальных поверхностей наглядно характеризует напряженность поля в разных точках. Там, где поверхности расположены гуще, напряженность поля больше.

Вектор $\vec{E}$:

а) всегда перпендикулярен эквипотенциальным поверхностями;
б) всегда направлен в сторону убывания потенциала.

5. Связь между напряженностью и потенциалом

Для решения основной задачи электростатики – *нахождение напряженности поля в любой его точке*, необходимо знать величину распределение заряда, создающего это поле.

Для этого используется векторная величина $\vec{E}$ и две скалярные – потенциал φ и $\operatorname{div}\vec{E}$.

Если мы сумеем найти зависимость $\varphi(x, y, z)$ от величины и распределение заряда в пространстве, то задача будет решена. Найдем эту функцию.

В соответствии с $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ и $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ &\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

и далее

5. Связь между напряженностью и потенциалом

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Данное выражение можно записать компактно, вводя оператор Лапласа:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Заметим, что $\Delta=\vec{\nabla}\vec{\nabla}=\vec{\nabla}^2=\nabla^2$.

Таким образом, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\equiv\Delta\varphi\equiv\vec{\nabla}^2\varphi$ и уравнение $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ принимает вид:

$$\Delta\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Это уравнение является еще одной формой записи **уравнения Пуассона**.

5. Связь между напряженностью и потенциалом

Из уравнение Пуассона $\Delta\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ следует, что источниками электростатического поля являются заряды, зная распределение которых можно вычислить поле в любой точке.

Всюду, где $\rho = 0$, т.е. в частях пространства, не содержащих заряды, потенциал должен удовлетворять уравнению Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$ или $\Delta\varphi = 0$.

Поэтому вычисление потенциала в общем случае сводится к определению такой функции $\varphi(x, y, z)$, во всем пространстве удовлетворяет уравнению Лапласа.

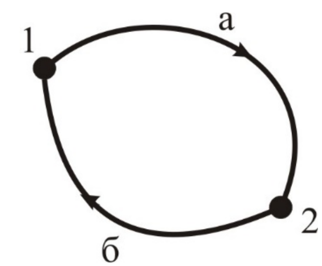
6. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля

Ранее мы выяснили, что электростатическое поле потенциально, работа сил поля не зависит от формы пути:

$$A_{1-2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Найдем работу по перемещению заряда $\boldsymbol{q_0}$ в поле заряда $\boldsymbol{q}$ по замкнутой траектории:

$$A_{1-a-2-б-1} = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Очевидно $A_{1-a-2} = A_{1-б-2} = -A_{2-б-1}$ и $A_{1-б-2} = -A_{2-б-1}$ значит

$$A_{1-a-2} + A_{2-б-1} = 0.$$

Итак, $A_{1-a-2-б-1} = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \equiv 0$

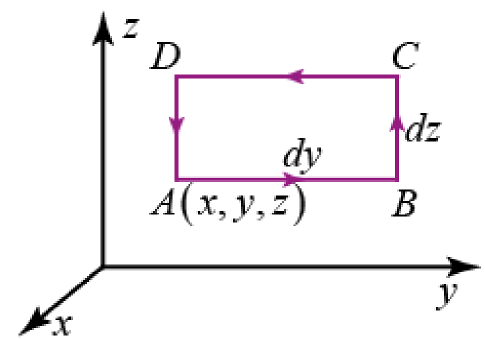
Этот интеграл называется циркуляцией вектора $\vec{E}$ по замкнутому пути – это математическое запись *потенциального характера электростатического поля*.

6. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля

Для любого векторного поля: *векторное поле потенциально, если циркуляция вектора этого поля по замкнутому пути равна нулю.*

Линии вектора $\vec{E}$ электростатического поля не замкнуты.

Запишем условие потенциальности электростатического поля в дифференциальной форме. Для этого рассмотрим элементарный контур прямоугольной формы со сторонами ***dy*** и ***dz***.



Направление обхода контура ***ABCD*** образует правый винт с направление оси ***OX***.

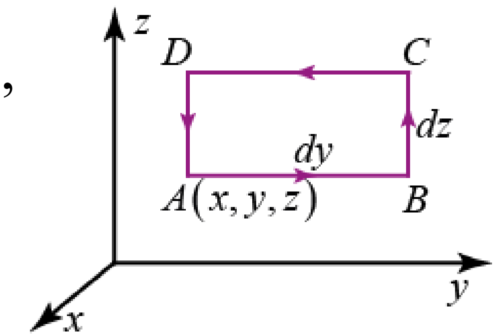
Представим уравнение $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ следующим образом:

$$\oint \left(E_x dx + E_y dy + E_z dz \right) = 0$$

Вклад участка ***AB*** в циркуляцию равен $E_y(x, y, z)dy$, а участка ***CD*** - $-E_y(x, y, z+dz)dy$. Суммарный вклад этих сторон

$$-E_y(x, y, z+dz)dy + E_y(x, y, z)dy = -\frac{\partial E_y}{\partial z} dzdy = -\frac{\partial E_y}{\partial z} dS$$

6. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля



Аналогично, вклад со стороны ***BC***: $E_z(x, y+dy, z)dz$,

сторона ***DA:*** $-E_z(x, y, z)dz$.

Суммарный вклад этих сторон:

$$E_z(x, y+dy, z)dz - E_z(x, y, z)dz = \frac{\partial E_z}{\partial y}dydz = \frac{\partial E_z}{\partial y}dS$$

Циркуляция вдоль контура ***ABCD*** равна:

$$\oint E \cdot dl = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)dS = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

Рассмотрев аналогичные контуры в плоскостях ***XOZ*** и ***XOY***, получим:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \;\; и \;\; \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

Умножив данные уравнения на единичные векторы координатных осей $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$, соответственно, получим составляющие вектора $\mathrm{rot}\,\vec{E}$:

6. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля

$$rot\,\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Это ротор вектора $\vec{E}$.

$$rot\,\vec{E} = \left[\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

В случае электростатического поля $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$