ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Центр масс системы материальных точек и закон его движения

В рамках динамики - основного раздела механики - изучаются причины, вызывающие и изменяющие состояния покоя или движения тел.

Опытные данные приводят к следующим выводам:

- При некоторых условиях тело, на которое действуют другие тела, изменяет свою скорость, т.е. приобретает ускорение.
- При других же условиях тело, находясь под действием других тел, изменяет свою форму и размеры.

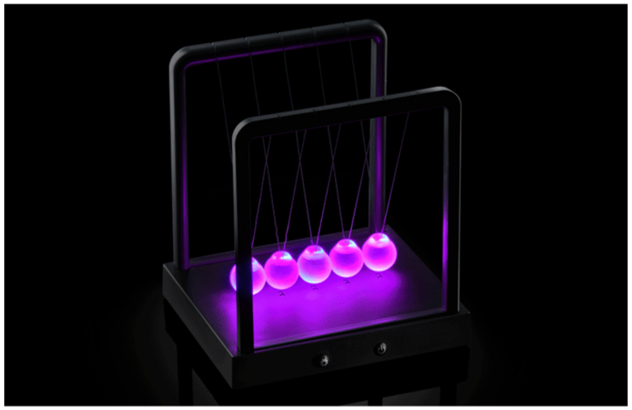
Количественное описание этих процессов осуществляется введением понятия *силы*: любое воздействие на тело, при котором ему сообщается ускорение или происходит деформация тела, вызывается физической векторной величиной, которая называется **силой**. Сила - мера этого воздействия.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Центр масс системы материальных точек и закон его движения

Зная основные законы механики, в первую очередь три закона Ньютона, казалось бы, можно решить любую задачу о движении тел.

Однако, законы Ньютона позволяют решать задачи связанные с нахождением ускорения движущегося тела, если известны все действующие на тело силы, т.е. равнодействующая всех сил.



Есть ситуации, в которых определить эти величины затруднительно или вообще невозможно, например *столкновение тел*.

В обыденной жизни для характеристики движения надо знать массу тела и его скорость.

Поэтому для решения задач используют еще одну важнейшую физическую величину - импульс тела.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Центр масс системы материальных точек и закон его движения

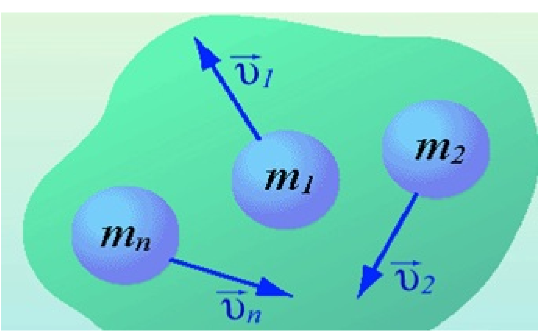
Величина, равная произведению массы тела на его скорость, называется импульсом:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}. \qquad [p]_{СИ} = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Вектор импульса тела направлен в ту же сторону, что и скорость тела.

Изменение импульса тела равно импульсу равнодействующей всех сил, действующих на тело:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t.$$



Для системы тел полный импульс равен векторной сумме импульсов тел, составляющих систему:

$$\vec{p}_{сист} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i.$$

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Центр масс системы материальных точек и закон его движения

Импульс обладает интересным свойством, которое есть лишь у немногих физических величин. Это свойство сохранения. Но закон сохранения импульса выполняется только в замкнутой системе.

Система тел называется замкнутой, если её тела взаимодействуют между собой и не взаимодействуют с телами, не принадлежащими системе.

Векторная сумма импульсов тел, составляющих замкнутую систему, не меняется с течением времени при любых движениях и взаимодействиях этих тел:

$$\vec{p}_{сист} = const.$$

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Центр масс системы материальных точек и закон его движения

Приведенные рассуждения справедливы для тел, рассматриваемых как материальные точки. На практике не каждое тело может быть представлено как материальная точка. Однако, его всегда можно разделить на достаточно малые части, каждую из которых можно считать материальной точкой.

Ещё чаще приходится иметь дело не с одним-двумя телами, а с системой тел, взаимодействующих между собой. Изучение движения такой системы – весьма сложная задача, так как в общем случае для описания движения системы нужно знать движение всех её частей.

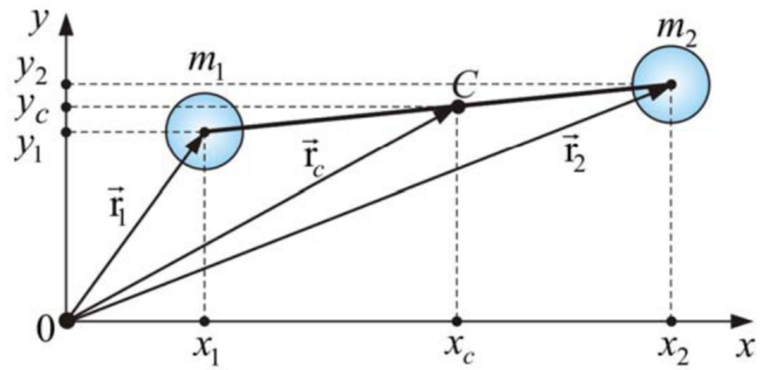
Такое изучение облегчается тем, что у самых различных систем имеются общие свойства. В частности, таким общим свойством является то, *что в любой системе можно выделить особую точку С, которая называется центром масс или центром инерции системы*.

Центр масс системы материальных точек и закон его движения

Эта точка C обладает рядом важных свойств. Её положение характеризует распределение масс системы.

Радиус-вектор центра масс системы двух частиц m_1 и m_2 можно найти по формуле

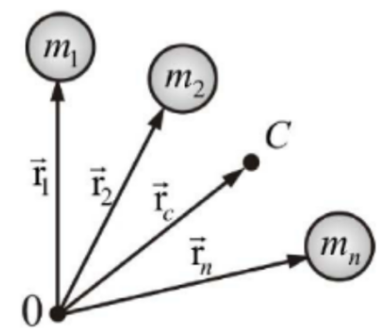
$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}.$$



В общем случае радиус-вектор центра масс системы, состоящей из N материальных точек, равен

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i,$$

где $m = \sum_{i=1}^{N} m_i -$ общая масса системы.



ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Центр масс системы материальных точек и закон его движения

Центр тяжести совпадает с *центром масс* (центром инерции), если g (ускорение силы тяжести) для всех тел системы одинаково.

Скорость центра инерции системы $\vec{v}_C$ равна

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i.$$

Здесь $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$ - импульс системы тел, $\vec{v}_i$ – скорость i-го тела системы.

Так как $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_C$, то импульс системы тел можно определить по формуле $\vec{p} = m \cdot \vec{v}_C$.

Импульс системы тел равен произведению массы системы на скорость её центра инерции.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Центр масс системы материальных точек и закон его движения

Тела, не входящие в состав рассматриваемой системы, называют *внешними телами*, а силы, действующие на систему со стороны этих тел, - *внешними силами*. Силы взаимодействия между телами внутри системы называют *внутренними силами*.

Результирующая всех внутренних сил, действующих на i-е тело,

$$\vec{F}_i^{\,внутр} = \sum_{k \neq i}^{N} \vec{F}_{ik} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots + \vec{F}_{iN}.$$

По третьему закону Ньютона $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, поэтому результирующая всех внутренних сил системы равна нулю.

$\vec{F}_i^{\,внеш}$ – *результирующая внешних сил*, приложенных к i-й точке системы.

$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,внеш}$ – *результирующий вектор всех внешних сил, приложенных к системе,*

тогда $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Центр масс системы материальных точек и закон его движения

Скорость изменения импульса системы равна результирующему вектору всех внешних сил, действующих на эту систему.

Это уравнение называют *основным уравнением динамики поступательного движения системы тел*.

Так как импульс системы $\vec{p} = m\vec{v}_C$, то

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_C\right) = m\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}.$$

Отсюда можно по-другому записать *основное уравнение динамики поступательного движения системы тел*:

$$m \cdot \vec{a}_C = \vec{F},$$

здесь $\vec{a}_C$ – ускорение центра инерции.

Центр механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действует сила, равная результирующему вектору внешних сил, приложенных к системе.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Закон сохранения импульса

Движение любого тела или системы может происходить только под действием внешних сил.

В общем случае его можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного со скоростью $\vec{v} = \vec{v}_C$ и вращательного вокруг центра инерции.

Механическая система называется замкнутой (или изолированной), если на неё не действуют внешние силы

Для замкнутой системы результирующий вектор внешних сил тождественно равен нулю:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \equiv 0,$$

отсюда $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_C = const.$

Это - закон сохранения импульса: *импульс замкнутой системы не изменяется со временем*.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Закон сохранения импульса

Импульс системы тел может быть представлен в виде произведения суммарной массы тел на скорость центра инерции:

$$\vec{p} = m\vec{v}_C,$$

тогда $m \cdot \vec{v}_C = const.$

При любых процессах, происходящих в замкнутых системах, скорость центра инерции сохраняется неизменной.

Закон сохранения импульса является одним из фундаментальных законов природы. Он получен как следствие законов Ньютона, но справедлив и для микрочастиц, и для релятивистских скоростей, когда $v \approx c$.

Если система не замкнута, но результирующий вектор внешних сил $\vec{F} = 0$, то $\vec{p}_{сист} = const$, как если бы внешних сил не было.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

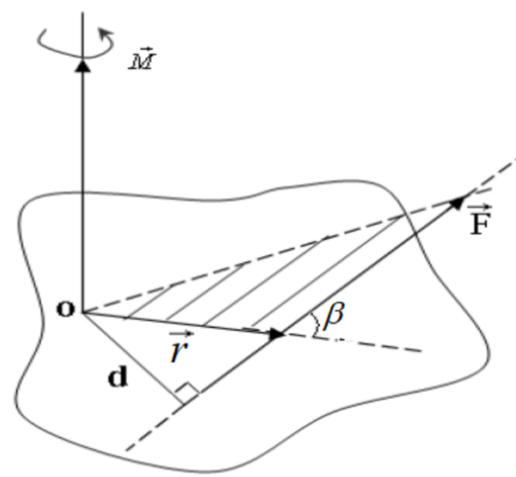
Момент силы. Момент импульса материальной точки

Изучение вращательного движения тела требует введения двух новых физических величин: *момента силы* и *момента импульса* (*кинетического момента*).

Момент силы служит векторной мерой вращательного действия на тело, производимого произвольной силой.

Момент импульса непосредственно связан с моментом силы и в определенных условиях соблюдается универсальный закон сохранения.

Рассмотрим тело, которое может свободно вращаться вокруг неподвижного шарнира (точка O).

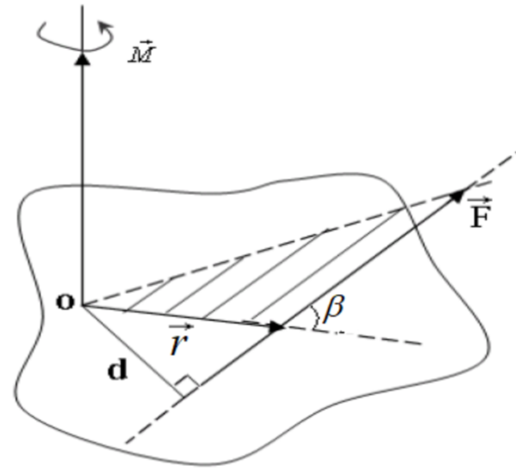


Под действием силы $\vec{F}$, приложенной к некоторой точке тела, оно вращается вокруг оси, проходящей через шарнир и перпендикулярной плоскости, содержащей шарнир и вектор силы.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Момент силы. Момент импульса материальной точки

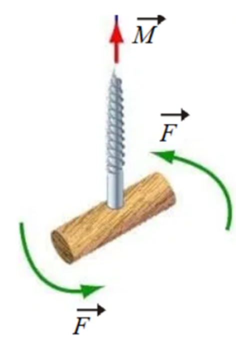
Моментом силы относительно точки (полюса) называется физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора силы относительно этой точки на вектор силы:



$$\vec{M} = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right],$$

модуль которого равен $M = r \cdot F \cdot \sin\beta = F \cdot d.$

Согласно правилу правого винта (буравчика) вектор $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости, в которой находятся векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, $d = r \cdot \sin\beta.$ называется *плечом силы* .



ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Момент силы. Момент импульса материальной точки

Из формулы $M = r \cdot F \cdot \sin\beta$ следует, что момент силы максимален, когда сила перпендикулярна ее радиус-вектору,

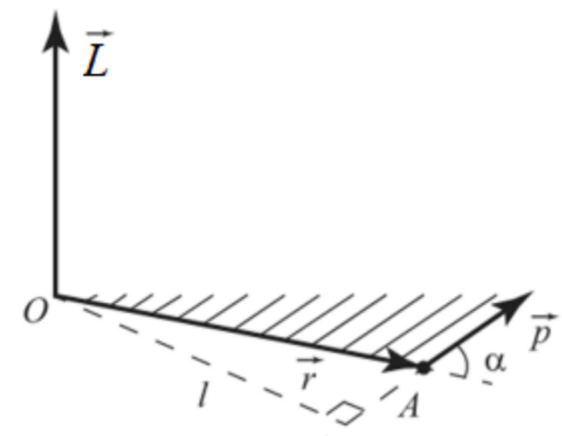
$$\vec{r} \perp \vec{F} \to \beta = \frac{\pi}{2} \to r = d \to M = r \cdot F,$$

и равен нулю, когда линия действия силы совпадает по направлению с радиус-вектором силы:

$$\vec{F} \parallel \vec{r} \to \beta = 0 \to d = 0 \to M = 0.$$

Моментом импульса материальной точки относительно точки называют векторное произведение ее радиус-вектора относительно этой точки на ее импульс:

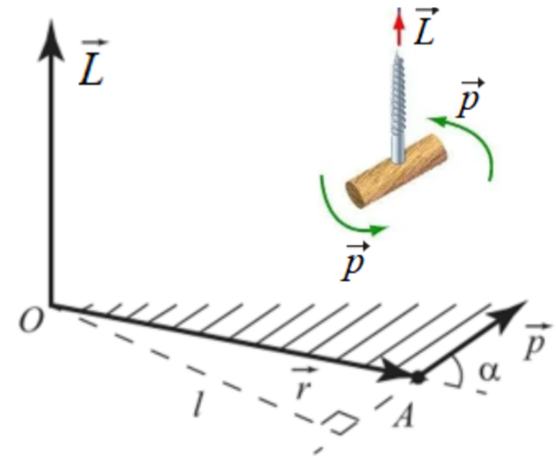
$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}] = [\vec{r} \cdot m\vec{v}],$$



а модуль этого вектора $L = r \cdot p \cdot \sin\alpha.$

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Момент силы. Момент импульса материальной точки



В соответствии с правилом буравчика вектор $\vec{L}$ направлен перпендикулярно плоскости, содержащей векторы $\vec{r}$ и $\vec{p}$.

Аналогично рассуждая (как для момента силы), получим:

$$L_{\max} = m \cdot r \cdot v \quad \text{если} \quad \alpha = \frac{\pi}{2},$$

(*например*, момент импульса материальной точки, движущейся по окружности, определенный относительно центра окружности).

$$L = 0, \quad \text{если} \quad \alpha = 0$$

(например, момент импульса материальной точки, движущейся прямолинейно вдоль оси $\vec{r}$, определенный относительно точки на этой оси).

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Момент силы. Момент импульса материальной точки

Установим связь между моментом импульса материальной точки и моментом силы, приложенной к ней.

Согласно второму закону Ньютона $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$ имеем:

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right] = \left[\vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}\right].$$

Поскольку

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{p} + \vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \cdot m\vec{v} + \vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt},$$

получим:

$$\left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right] = \frac{d}{dt}\left[\vec{r} \cdot \vec{p}\right].$$

Имея в виду что $\vec{M} = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right]$ и $\vec{L} = \left[\vec{r} \cdot \vec{p}\right]$ получим: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$

При действии на точку нескольких сил $\vec{M}$ - суммарный момент всех приложенных сил.

Момент силы. Момент импульса материальной точки

Если результирующий момент сил равен нулю, $\vec{M} = 0,$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}(t) = const.$$

Данное равенство представляет собой *закон сохранения момента импульса материальной точки*: *если результирующий момент приложенных сил равен нулю, то момент импульса материальной точки остается постоянным с течением времени.*

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Закон сохранения момента импульса

Пока наши новые определения еще не наполнены должным содержанием — мы всего лишь переписали в новой форме второй закон Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Ситуация меняется, когда от одной материальной точки мы переходим к системе материальных точек и, в предельном случае — к макроскопическому телу.

При движении нескольких материальных точек друг относительно друга момент импульса каждой материальной точки не будет оставаться постоянным.

Но если они образуют замкнутую систему, то их суммарный момент импульса относительно произвольного центра будет оставаться неизменным.

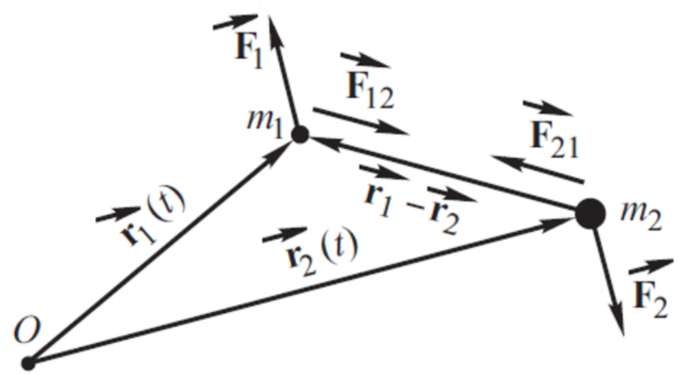
ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Закон сохранения момента импульса

Моментом импульса L *любой системы частиц, в частности твердого тела, относительно произвольно взятой точки* O называется геометрическая сумма моментов импульсов частиц, входящих в систему относительно этой точки O:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i \right] = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \cdot m\vec{v}_i \right].$$

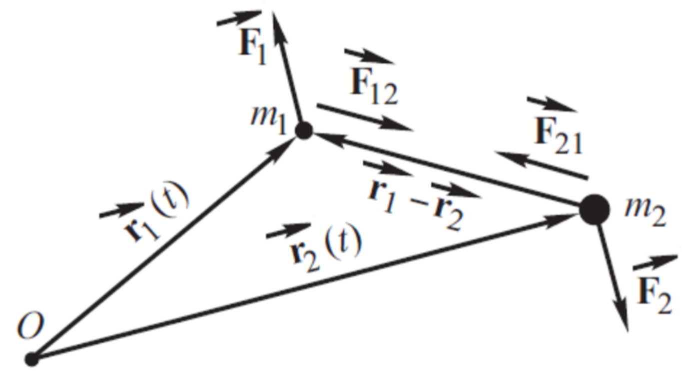
Для наглядности приведем доказательство для системы, состоящей из двух материальных точек, связанных центральной силой, т. е. $\vec{F}_{12} \parallel \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right)$ и рассмотрим случай, когда помимо сил взаимодействия на материальные точки действуют также внешние силы.



ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Закон сохранения момента импульса

Запишем уравнения для моментов импульсов обеих материальных точек относительно некоторого центра O.



Согласно уравнению $\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$ имеем:

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt}=\left[\vec{r}_1\cdot\vec{F}_{12}\right]+\left[\vec{r}_1\cdot\vec{F}_1\right],\qquad \frac{d\vec{L}_2}{dt}=\left[\vec{r}_2\cdot\vec{F}_{21}\right]+\left[\vec{r}_2\cdot\vec{F}_2\right],$$

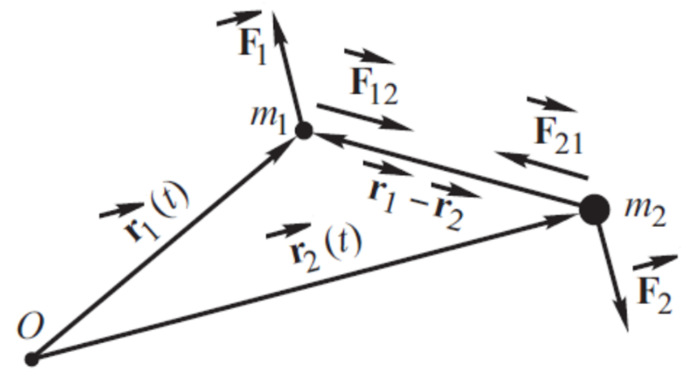
где $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{21}$ – силы взаимодействия точек друг с другом, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ – результирующие внешние силы, действующие со стороны других тел на материальные точки 1 и 2, соответственно.

Сложив левые и правые части этих уравнений с учетом того, что $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$, получаем

$$\frac{d\left(\vec{L}_1+\vec{L}_2\right)}{dt}=\left[\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\vec{F}_{12}\right]+\vec{M}_{1вн}+\vec{M}_{2вн},$$

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Закон сохранения момента импульса



$$\frac{d\left(\vec{L}_1+\vec{L}_2\right)}{dt}=\left[\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\vec{F}_{12}\right]+\vec{M}_{1вн}+\vec{M}_{2вн},$$

где $\vec{M}_{1вн}=\left[\vec{r}_1\cdot\vec{F}_1\right]$ и $\vec{M}_{2вн}=\left[\vec{r}_2\cdot\vec{F}_2\right]$ – моменты внешних сил относительно центра O.

Векторы $\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)$ и $\vec{F}_{12}$ параллельны, поэтому их векторное произведение равно нулю.

Следовательно, уравнение для суммарного момента импульса системы двух материальных точек имеет вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}_{1вн}+\vec{M}_{2вн}=\vec{M}_{вн},$$

Здесь $\vec{M}_{вн}$- суммарный момент внешних сил, приложенных к системе материальных точек.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Закон сохранения момента импульса

В замкнутой системе материальных точек внешний момент равен нулю, следовательно, *момент импульса замкнутой системы материальных точек относительно произвольного центра остается постоянным*:

$$\vec{M}_{вн} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const.$$

Таким образом, мы сформулировали *закон сохранения момента импульса*.

В механике постулируется, что пространство является однородным и изотропным. Вследствие изотропности пространства механические свойства замкнутой системы остаются неизменными при ее повороте в пространстве как целого.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Закон сохранения момента импульса

Следовательно, поворот является операцией симметрии, и согласно теореме Нетер, ей соответствует закон сохранения какой-то физической величины. В аналитической механике доказывается, что такой физической величиной является момент импульса механической изолированной системы.

Таким образом, закон сохранения момента импульса выведенный на основе классических механических законов, является следствием свойства изотропности пространства, и поэтому является фундаментальным законом природы.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Момент импульса твердого тела. Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

Твердое тело представляет собой систему материальных точек, расположенных друг относительно друга на неизменных расстояниях, а это означает, что механическая работа внутренних сил равна нулю.

Потенциальная энергия взаимодействия материальных точек твердого тела постоянна во времени и не зависит от состояния движения тела как целого.

Все определения физических величин и все теоремы для систем материальных точек, сформулированные ранее, применимы к твердому телу.

Описанное нами движение твердого тела относительно неподвижной точки является основным видом движения.

Однако, вычислить вектор $\vec{L}$ – момент импульса системы относительно произвольной точки – непросто.

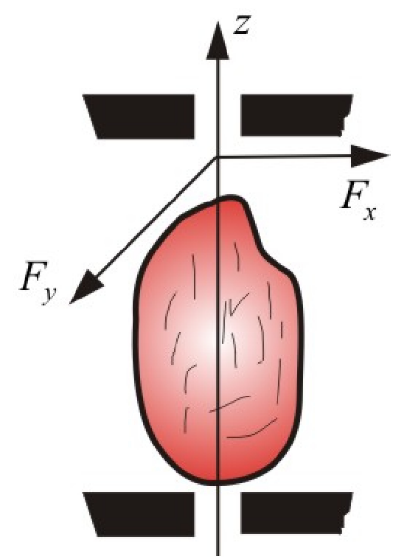
ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Момент импульса твердого тела. Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

Дело в том, что для однозначного определения положения твердого тела в пространстве необходимо задать шесть независимых величин — *шесть степеней свободы*.

Ограничимся простейшим, но практически важным случаем — вращением твердого тела вокруг неподвижной оси, когда существенна лишь одна степень свободы.

При этом изменение положения тела в пространстве однозначно определяется единственной координатой φ — *углом поворота тела вокруг оси*.



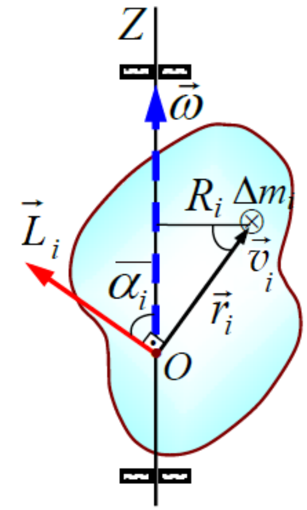
Все тело мысленно разбивается на совокупность малых частичек (материальных точек) , взаимодействующих друг с другом и с другими телами.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Момент импульса твердого тела. Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

Итак, разобьем мысленно твёрдое тело на малые элементы с массами Δm_i, положение которых указывают радиус-векторы $\vec{r}_i$.

Вращательное движение всех точек тела характеризуются одним и тем же вектором угловой скорости $\vec{\omega}$. Этот вектор направлен вдоль оси вращения Z.



Векторы линейных скоростей и импульсов ($\Delta m_i \cdot \vec{v}_i$) этих элементов перпендикулярны как оси Z, так и векторам $\vec{r}_i$.

Проекция момента импульса каждого элемента $\vec{L}_i$ на ось равна произведению его модуля L_i на косинус угла α_i между вектором и осью:

$$L_{iz} = L_i \cdot \cos\alpha_i = r_i \cdot \Delta m_i \cdot v_i \cdot \cos\alpha_i = \Delta m_i \cdot v_i \cdot r_i \cdot \cos\alpha.$$

Момент импульса твердого тела. Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

Имея в виду что, $\upsilon_i = R_i \cdot \omega$ и произведение $r_i \cdot \cos\alpha_i$ есть расстояние от элемента Δm_i до оси вращения R_i, получим

$$L_{iz} = \Delta m_i \cdot \upsilon_i \cdot r_i \cdot \cos\alpha = \Delta m_i \cdot \omega \cdot R_i^2 .$$

Теперь, чтобы найти осевой момент импульса всего тела, просуммируем по всем его элементам:

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{iz} = \omega \left[\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \cdot R_i^2 \right].$$

Величина, равная сумме произведений элементарных масс на квадрат их расстояний от некоторой оси Z, называется моментом инерции тела относительно данной оси и обозначается через I_z :

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \cdot R_i^2 .$$

Момент инерции – скалярная величина!

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Момент импульса твердого тела. Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

С учетом выражения для I_z. момент импульса твердого тела при вращении вокруг закрепленной оси равен:

$$L_z = I_z \cdot \omega.$$

В этом соотношении видна аналогия с равенством $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$: *импульс тела равен произведению его массы на линейную скорость, а осевой момент импульса – произведению момента инерции на угловую скорость*.

Для любого твердого тела существует как минимум три оси вращения, называемые *главными осями инерции*, относительно которых момент импульса тела $\vec{L}$ параллелен им. Его вектор равен:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}.$$

Момент импульса твердого тела. Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

Используя выражения для суммарного момента внешних сил и момента импульса относительно одной из главных осей инерции, запишем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M}^{вн} \\ \vec{L} &= I\cdot\vec{\omega} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(I\cdot\vec{\omega}\right) = \vec{M}^{вн}$$

Принимая во внимание, что $I=const$, получим:

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}^{вн} \Rightarrow I\cdot\vec{\varepsilon} = \vec{M}^{вн}.$$

Результирующий момент всех внешних сил применительно к твердому телу еще называется *вращающим моментом*.

Таким образом, вращающий момент относительно главной оси инерции равен произведению момента инерции твердого тела относительно этой оси на его угловое ускорение.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Момент импульса твердого тела. Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

Если ось вращения не является главной осью инерции, то векторы $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ не коллинеарные, и вращение твердого тела описывается соотношением, которое получается после проектирования $I \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}^{вн}$ на направление произвольной оси вращения Z:

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \cdot \varepsilon = M_z^{вн}.$$

В данном уравнении L_z – момент импульса тела относительно оси Z, а проекция вращающего момента $\vec{M}_z^{вн}$ на эту ось $M_z^{вн}$ называется *вращающим моментом относительно рассматриваемой оси.*

Подчеркнем, что значение $M_z^{вн}$ не зависит от положения на оси Z точки, относительно которой определяется вектор $\vec{M}_z^{вн}$.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Момент импульса твердого тела. Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

Соотношение $$I \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}^{вн}$$
представляет собой основной закон динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Сравнивая основной закон динамики вращательного движения твердого тела с основным законом динамики поступательного движения материальной точки $$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m \cdot \vec{v}\right) = \vec{F},$$

можно увидеть аналогию, заключающуюся в следующем:

роль массы m, линейной скорости $\vec{v}$, линейного ускорения $\vec{a}$, импульса $\vec{p}$ и результирующей силы $\vec{F}$ из основного закона поступательного движения выполняют соответственно момент инерции I, угловая скорость $\vec{\omega}$, угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$, момент импульса $\vec{L}$ и вращающий момент $\vec{M}^{вн}$ в основном законе вращательного движения.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Момент импульса твердого тела. Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

Согласно уравнению $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{вн}$ твердое тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянным моментом импульса, если вращающий момент или его проекция на ось вращения равны нулю, $\vec{M}^{вн} = 0$ или $M_z^{вн} = 0$.

Этот результат представляет собой *закон сохранения момента импульса твердого тела*:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = \overrightarrow{const}; \quad L_z = const.$$

Данный закон можно распространить на систему тел.

Если в изолированной системе, образованной из нескольких частей твердого тела, их взаимное расположение изменяется в процессе движения, то изменяется и момент инерции системы.

Момент импульса твердого тела. Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

Как следует из закона сохранения момента импульса твердого тела

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = \overrightarrow{const}; \quad L_z = const.,$$

произведение $I{\cdot}\omega$ остается постоянным, но увеличение момента инерции ведет к уменьшению угловой скорости и наоборот.

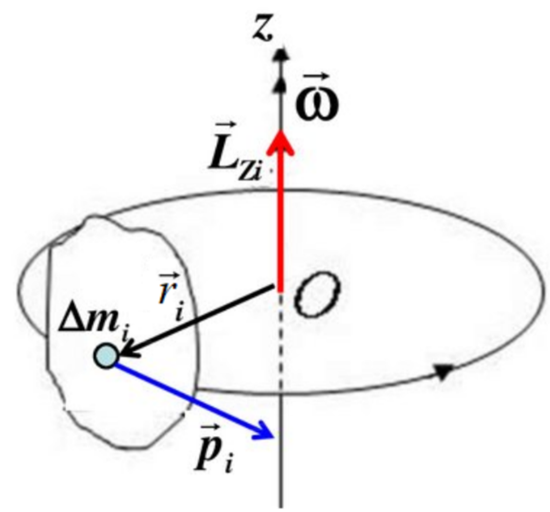
ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Момент инерции твердого тела. Теорема Штейнера

При изучении вращения твердого тела пользуются понятием момента инерции.

Момент инерции тела служит мерой инертности при вращательном движении, так же как масса - мера инертности при поступательном движении.

Моментом инерции системы (тела) относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведений масс N *материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси*:



$$I = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \cdot r_i^2 .$$

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Момент инерции твердого тела. Теорема Штейнера

Из определения следует, что момент инерции есть величина *аддитивная*. Это означает, что момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей.

Распределение массы в пределах тела можно охарактеризовать с помощью величины, называемой *плотностью*. Если тело однородно, т. е. свойства его во всех точках одинаковы, то плотностью называется величина, равная

$$\rho = \frac{m}{V},$$

где m — масса тела, а V — его объем.

Таким образом, плотность однородного тела равна массе единицы его объема.

Для тела с неравномерно распределенной массой данное выражение дает среднюю плотность.

Момент инерции твердого тела. Теорема Штейнера

Плотность в данной точке определяется в этом случае следующим образом:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}.$$

В этом выражении Δm — масса, заключенная в объеме ΔV, который при предельном переходе стягивается к той точке, в которой определяется плотность.

Тогда элементарная масса Δm_i равна произведению плотности тела ρ_i в данной точке на соответствующий элементарный объем ΔV_i:

$$\Delta m_i = \rho_i \cdot \Delta V_i.$$

Следовательно, момент инерции можно представить в виде

$$I = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \cdot r_i^2 \cdot \Delta V_i \Rightarrow \{\rho = const\} \Rightarrow I = \rho \sum_{i=1}^{N} r_i^2 \cdot \Delta V_i.$$

Последнее соотношение являются приближенным, причем тем более точным, чем меньше элементарные объемы ΔV_i и соответствующие им элементарные массы Δm_i. Следовательно, задача нахождения моментов инерции сводится к интегрированию:

$$I = \int_0^V \rho \cdot r^2 \cdot dV \Rightarrow \{\rho = const\} \Rightarrow I = \rho \int_0^V r^2 \cdot dV .$$

Данное выражение позволяет относительно просто вычислять моменты инерции для тел правильной геометрической формы.

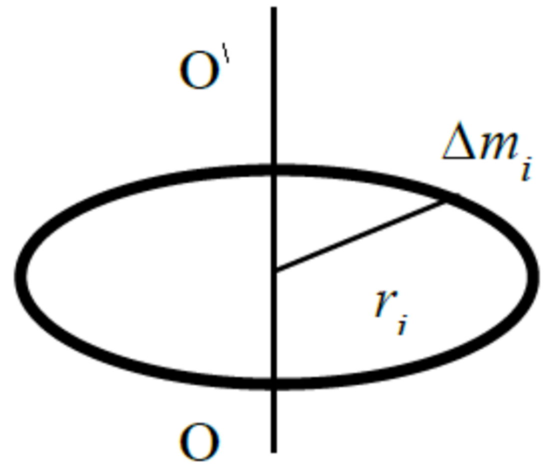
Расчет момента инерции произвольных тел является довольно трудоемкой задачей.

Приведем в качестве примера вычисление моментов инерции некоторых однородных тел правильной геометрической формы относительно их осей симметрии.

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Момент инерции твердого тела. Теорема Штейнера

Кольцо (пустотелый цилиндр).



Все элементарные участки кольца расположены на одинаковом расстоянии, равном радиусу $(r_i = R)$, от оси кольца.

Тогда формула, для момента инерции имеет вид

$$I = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \cdot r_i^2 = R^2 \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i = R^2 \cdot m.$$

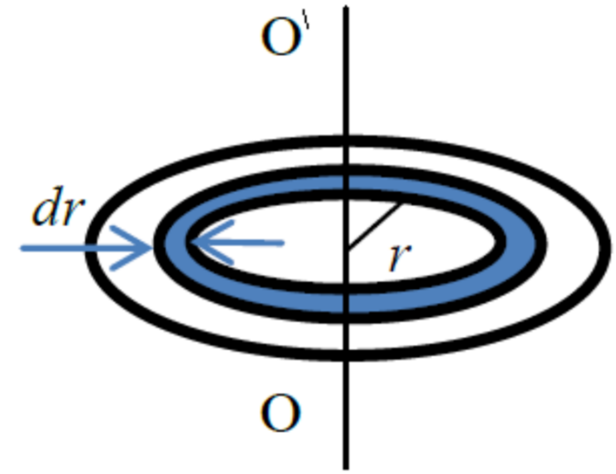
Т.е. момент инерции кольца относительно его оси симметрии равен

$$I = m \cdot R^2.$$

По этой же формуле определяется момент инерции пустотелого цилиндра относительно его цилиндрической оси.

Момент инерции твердого тела. Теорема Штейнера

Диск (сплошной цилиндр).



Разобьем диск на элементарные кольца.

Пусть радиус одного из них r, толщина dr, а масса – dm.

Момент инерции выделенного кольца относительно оси OO′ равен

$$dI = r^2 \cdot dm.$$

Масса кольца dm равна произведению его площади $dS=2\pi r\cdot dr$ на поверхностную плотность, т.е. массу диска, отнесённую к его площади (в нашем случае $\dfrac{m}{\pi R^2}$).

Тогда момент инерции кольца $dI = \left(\dfrac{m}{\pi R^2}\right) 2\pi r \cdot dr \cdot r^2 = \dfrac{2m}{R^2} r^3 \cdot dr.$

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Момент инерции твердого тела. Теорема Штейнера

Момент инерции всего диска равен интегралу

$$I = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 \cdot dr.$$

Интегрируя, для момента инерции диска получаем:

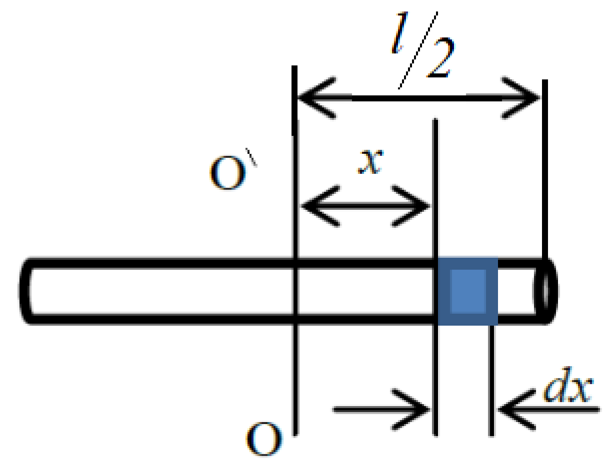
$$I = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 \cdot dr = \frac{2m}{R^2}\cdot\frac{r^4}{4}\Big/_0^R = \frac{2m}{R^2}\cdot\frac{R^4}{4} \Rightarrow$$

$$I = \frac{m \cdot R^2}{2}.$$

Момент инерции твердого тела. Теорема Штейнера

Тонкий стержень.

Найдем момент инерции стержня относительно оси OO′, проходящей через его середину (оси симметрии). Для этого разобьем его на элементарные участки длиной dx и массой $dm = \frac{m}{l} \cdot dx,$



где m – масса всего стержня, а l – его длина.

Момент инерции этого участка $dI = dm \cdot x^2 = \frac{m}{l} \cdot x^2 \cdot dx,$

где x – расстояние до оси OO′,

Момент инерции всего стержня равен $I = \frac{m}{l} \int\limits_{-l/2}^{l/2} x^2 \cdot dx.$

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Момент инерции твердого тела. Теорема Штейнера

Интегрируя, получаем выражение для момента инерции стержня относительно оси, проходящей через его середину:

$$I = \frac{1}{12} m \cdot l^2 .$$

В этих примерах вычисление момента инерции было довольно простым, так как рассмотренное тело однородно и симметрично относительно оси вращения.

Если ось вращения не является осью симметрии, вычисление интеграла

$$I = \int_0^V \rho \cdot r^2 \cdot dV$$

намного сложнее.

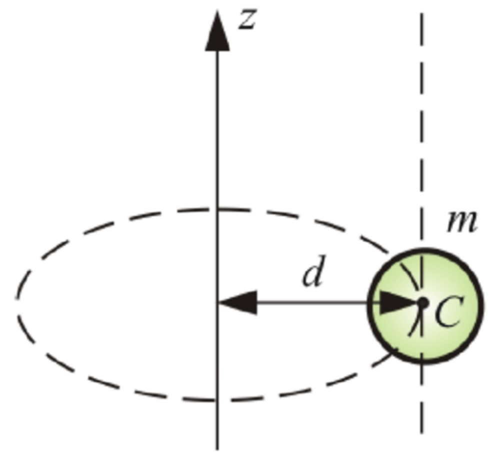
ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Момент инерции твердого тела. Теорема Штейнера

В таком случае определение момента инерции упрощается, если применить *теорему Штейнера*:

$$I = I_C + md^2,$$

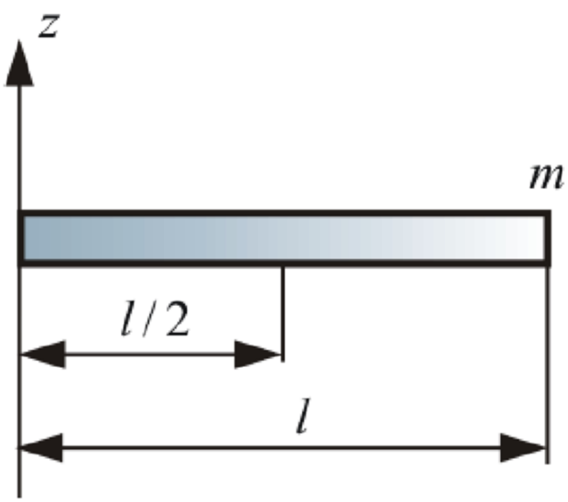
момент инерции тела I *относительно любой оси вращения равен* его моменту инерции I_C относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс C *тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.*



ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Момент инерции твердого тела. Теорема Штейнера

С помощью теоремы Штейнера можно легко рассчитать момент инерции тонкого стержня массой m и длиной l, вращающегося вокруг оси, проходящей через конец стержня.



Момент инерции стержня, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр,

$$I_C = \frac{m \cdot l^2}{12},$$

тогда

$$I_z = I_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$