

# КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

В природе часто встречаются движения, повторяющиеся через определенные промежутки времени, т.е. периодические.



*Механическим колебанием называется движение, которое периодически повторяется вдоль некоторой траектории, проходимой последовательно в противоположных направлениях. Система, совершающая такое движение, называется осциллятором.*

Любое колебание характеризуется определенными параметрами, которые при заданных условиях остаются неизменными и отличают его от других колебаний. Этими параметрами являются *амплитуда, период и частота.*

*Амплитудой называется величина максимального отклонения колеблющегося тела от положения устойчивого равновесия.*

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

*Полным колебанием называется движение осциллятора между двумя последовательными прохождениями через одну и ту же точку траектории с теми же скоростью и ускорением. Время ( $T$ ), необходимое для этого, называется периодом.*

Если известен период колебаний  $T$ , то число полных колебаний  $N$ , совершаемых за промежуток времени  $t$ , определяется из выражения:

$$N = \frac{t}{T}.$$

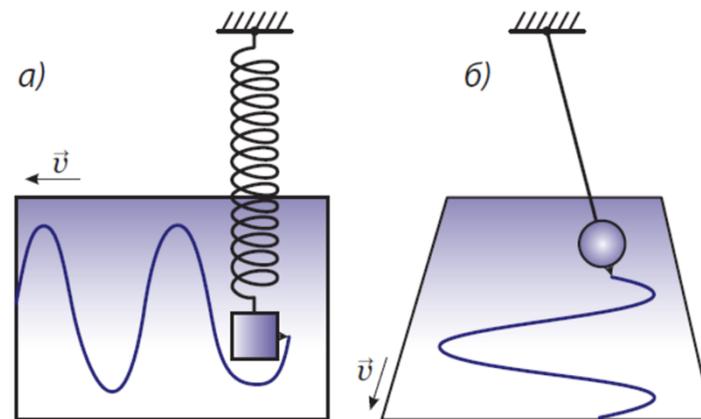
Другим параметром, описывающим колебания, является частота.

*Частотой колебаний называется величина  $\nu$ , численно равная полному числу колебаний, совершаемых за единицу времени:*

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}, \quad [\nu]_{СИ} = \text{с}^{-1} = \text{Гц}.$$

# КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Зависимость смещения осциллятора из положения равновесия от времени (закон колебательного движения) достаточно просто может быть изучена с помощью осциллограмм, полученных экспериментально.



В зависимости от начальных условий закон движения линейного гармонического осциллятора имеет вид:

$$x = A \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad x = A \cos(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

Величина  $x$ , характеризующая положение осциллятора в данный момент времени относительно положения равновесия, называется смещением.

Другой важной характеристикой колебательной системы является фаза колебаний.

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Аргумент функции, описывающей колебание, который определяет как положение, так и направление движения осциллятора в данный момент времени, называется фазой:

$$\varphi = \omega \cdot t + \varphi_0,$$

где  $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний, она определяет смещение осциллятора в момент времени  $t = 0$ .

Период функций «синус» и «косинус» равен  $2\pi$  и за промежуток времени от  $t$  до  $t + T$  ( $T$  – период) фаза колебаний изменяется на  $2\pi$ , то есть  $\omega(t + T) + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0 + 2\pi$ , или  $\omega T = 2\pi$ , откуда получаем выражение для периода  $T$ :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Скорость и ускорение колебания изменяются со временем так же, как и смещение, – по гармоническому закону:

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0), \quad a = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

# КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

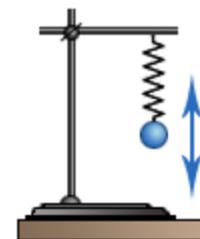
Величина  $\omega$  называется *собственной частотой* осциллятора.

Собственная частота пружинного маятника определяется по формуле:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

а периода пружинного маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

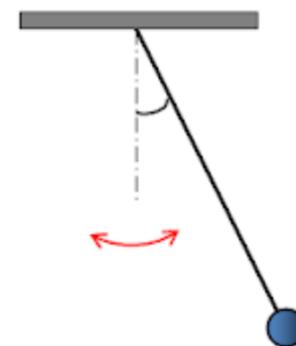


Собственная частота математического маятника определяется выражением

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

а период колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$



## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Проанализируем колебательное движение с энергетической точки зрения, доказано что, полная механическая энергия определяется формулой:

$$E = E_{П\max} = E_{к\max} = \frac{kx_{\max}^2}{2} = \frac{mv_{\max}^2}{2},$$

которая выражает закон сохранения механической энергии изучаемого осциллятора.

Собственные колебания, описанные ранее без учета сил сопротивления, представляют собой идеализацию свободных колебаний. В реальных системах движение всегда происходит в среде, оказывающей определенное сопротивление, и для его преодоления расходуется часть энергии колебательной системы.

Поскольку энергия осциллятора прямо пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, то вслед за ее убылью уменьшается и амплитуда. Чем больше силы сопротивления, тем больше энергии расходуется на их преодоление, тем быстрее уменьшается амплитуда колебаний до полного их исчезновения.

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

*Колебания, амплитуда которых уменьшается со временем, называются затухающими колебаниями.*

Колебательные системы, изучаемые до сих пор, подвергались действию внешней силы только для выведения их из положения устойчивого равновесия, после чего ее действие прекращалось.

В таких случаях амплитуда колебаний непрерывно уменьшается до их затухания, то есть до полного рассеяния сообщенной первоначально энергии.

Однако на практике зачастую внешняя сила действует периодически, постоянно питая колебательную систему энергией для поддержания неизменных значений амплитуды колебаний.

*Колебания, происходящие в системе благодаря действию внешней периодической силы, называются вынужденными колебаниями.*

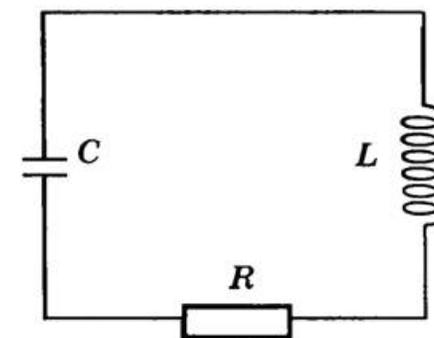
Экспериментально установлено, что амплитуда вынужденных колебаний тем больше, чем ближе частота внешней силы к собственной частоте системы.

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

*Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты внешней силы, действующей на колебательную систему, к ее собственной частоте, называется резонансом.*

При изучении механических колебаний было установлено, что они сопровождаются непрерывным превращением потенциальной энергии осциллятора в кинетическую энергию и обратно.

Замкнутый контур, состоящий из конденсатора и катушки, называемый колебательным контуром, также является источником колебаний, но сопровождаемых превращениями энергии электрического поля в энергию магнитного поля и обратно.



Такие колебания называются *свободными электромагнитными колебаниями*.

# КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Схожесть электромагнитных и механических колебаний заключается в едином характере изменения величин, их описывающих, и объясняется аналогичностью условий, необходимых для их возникновения.

Механические колебания		Электромагнитные колебания
Смещение $x = A \cos \omega t$	$\longleftrightarrow$	Заряд $q = q_m \cos \omega t$
Скорость $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$	$\longleftrightarrow$	Сила тока $i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$
Ускорение $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$\longleftrightarrow$	Скорость изменения силы тока $\frac{\Delta i}{\Delta t}$
Сила $F$	$\longleftrightarrow$	Напряжение $U$
Масса $m$	$\longleftrightarrow$	Индуктивность $L$
Жесткость $k$	$\longleftrightarrow$	Величина, обратная емкости $1/C$
Потенциальная энергия $kx^2/2$	$\longleftrightarrow$	Энергия электрического поля $q^2/(2C)$
Кинетическая энергия $mv^2/2$	$\longleftrightarrow$	Энергия магнитного поля $Li^2/2$

# КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

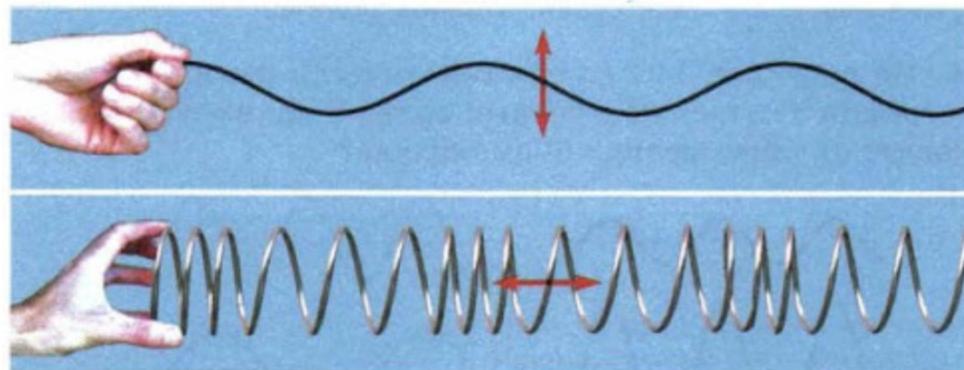
Поскольку в идеальном колебательном контуре нет потери энергии, то в нем электромагнитные колебания происходят за счет внутренних энергетических превращений и называются *собственными*.

Собственная частота электромагнитных колебаний описывается формулой:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

и период соответственно:  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ .

*Распространение возмущений в упругой среде называется упругой или механической волной.*

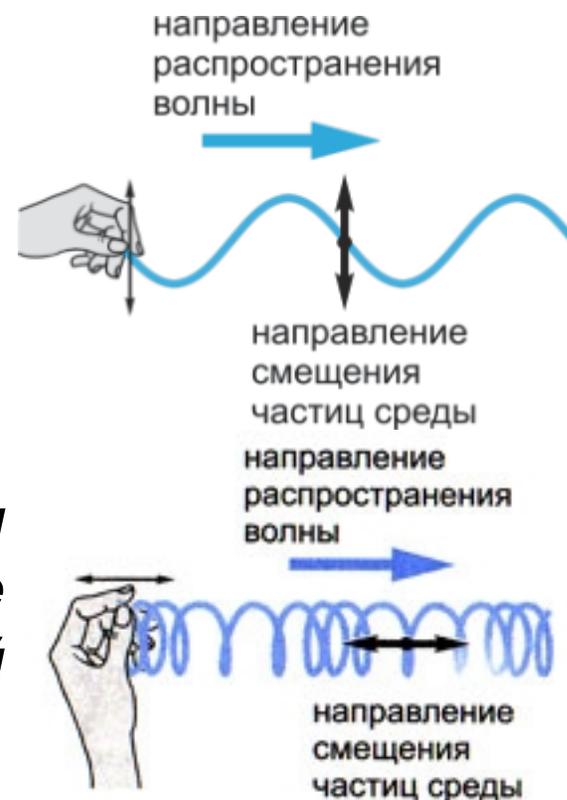


# КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

В зависимости от направления, в котором происходит возмущение относительно направления его распространения, различают *поперечные* и *продольные* волны.

*Волна, в которой возмущение среды происходит перпендикулярно направлению ее распространения, называется поперечной волной.*

*Волна, в которой возмущение среды происходит параллельно направлению ее распространения, называется продольной волной.*



# КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

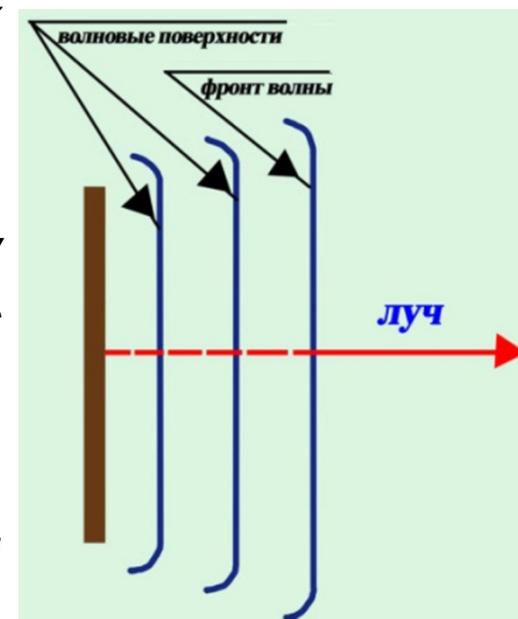
Как известно, колебания характеризуются определенной фазой, зависящей от времени, которая передается посредством волны другим точкам пространства. Следовательно, в разные промежутки времени точки пространства, вовлеченные в колебательное движение, имеют разные фазы.

Однако все точки, до которых распространилась волна к данному моменту времени, имеют одинаковую фазу.

*Геометрическое место точек, до которых доходит волна в данный момент времени, называется волновым фронтом.*

*Линия, перпендикулярная волновому фронту, называется лучом, он совпадает с направлением распространения волны.*

*Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью.*



# КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Кроме отмеченных физических величин, волна характеризуется также величинами, связанными с ее распространением. Таким являются *скорость распространения* и *длина волны*.

*Скорость перемещения волнового фронта называется скоростью распространения волны. Поскольку фаза всех точек волнового фронта одинакова, то эту скорость называют фазовой.*

*Минимальное расстояние  $\lambda$  между двумя волновыми поверхностями, точки которых колеблются в одинаковой фазе (синфазно), называется длиной волны.*



Если скорость распространения волны постоянна, через каждый промежуток времени  $T$  волновой фронт проходит одно и то же расстояние:

$$\lambda = v \cdot T .$$

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Уравнение которое описывает процесс распространения плоской волны и называются *уравнением плоской волны* или *уравнением бегущей волны* имеет вид:

$$y = A \sin(\omega t - k x),$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – называется волновым числом; оно показывает, сколько раз длина волны  $\lambda$  укладывается на расстоянии  $(2\pi)$  метров.

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**11.24.\*** Материальная точка совершает колебания по закону  $x = 0,06 \sin(\pi t/3 - \pi/6)$  (м). Через какое время после начала колебаний смещение точки от положения равновесия первый раз составит 0,03 м? (Отв.: 1 с).

*Дано:*

$$x = 0,06 \sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ (м)}$$

$$x_1 = 0,03 \text{ м}$$

$$t = ?$$

*Решение:*

$$x = 0,06 \sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$A = 0,06 \text{ (м)}, \quad \omega = \frac{\pi}{3} \text{ Гц}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ (рад)}.$$

$$x_1 < A \Rightarrow 0,03 = 0,06 \sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3}t = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = 1 \text{ (с)}.$$

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**11.25.\*** Во сколько раз надо увеличить длину математического маятника, чтобы его период колебаний увеличился в 2 раза?

(Отв.: 4).

Решение:

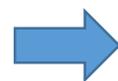
Дано:

$$\frac{T_2}{T_1} = 2$$

$$\frac{l_2}{l_1} = ?$$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}$$



$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}}{2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}} \Rightarrow$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{l_2}{g} \frac{g}{l_1}} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} \Rightarrow \frac{l_2}{l_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2,$$

$$\frac{l_2}{l_1} = 4.$$

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**11.27.\*** Материальная точка совершает гармонические колебания по закону  $x = 0,6 \sin \omega t$  (м) и через 0,3 с после начала движения она отклонилась от положения равновесия на 0,3 м. Чему равен период колебаний? (Отв.: 3,6 с).

*Дано:*

$$x = 0,6 \sin \omega t$$

$$t = 0,3 \text{ с}$$

$$x = 0,3 \text{ м}$$

*Решение:*

$$x = 0,6 \sin \omega t \Rightarrow 0,3 = 0,6 \sin \omega \cdot 0,3 \Rightarrow$$

$$\sin \omega \cdot 0,3 = \frac{1}{2} \Rightarrow 0,3 \cdot \omega = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

-----  
 $T - ?$

$$\omega = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{10}{3} = \frac{5\pi}{9},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow$$

$$T = \frac{2\pi \cdot 9}{5\pi} = \frac{18}{5} = 3,6 \text{ (с)}.$$

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**11.30.\*** Математический маятник длиной 0,81 м совершает 50 полных колебаний за 90 с. Определить ускорение силы тяжести. Принять  $\pi = 3,14$ . Результат записать с точностью до сотых. (Отв.: 9,86 м/с<sup>2</sup>).

Дано:  
 $l = 0,81$  м

$N = 50$

$t = 90$  с

$\pi = 3,14$

-----  
 $g = ?$

Решение:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \Rightarrow$$

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2},$$

$$T = \frac{t}{N}$$

$$g = \frac{4\pi^2 l N^2}{t^2},$$

$$g = \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 0,81 \cdot 50^2}{90^2} = 9,859 \left( \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right).$$

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**11.32.\*** Тело массой 0,04 кг, подвешенное на пружине с жесткостью 400 Н/м, совершает гармонические колебания с амплитудой 0,05 м. Найти максимальную скорость тела. (Отв.: 5 м/с).

*Дано:*

$$m = 0,04 \text{ кг}$$

$$k = 400 \frac{\text{Н}}{\text{М}}$$

$$A = 0,05 \text{ м}$$

---

$$v_{\text{max}} - ?$$

*Решение:*

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = 1 \Rightarrow v_{\text{max}} = A\omega$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$v_{\text{max}} = A\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad v_{\text{max}} = 0,05\sqrt{\frac{400}{0,04}} = 5 \left( \frac{\text{М}}{\text{с}} \right).$$

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**11.45.\*** Математический маятник длиной  $l = 2,45$  м совершает колебания по закону  $x = 0,02 \cos \omega t$  (м). Определить фазу колебаний в момент времени  $t = 5$  с. Ускорение силы тяжести принять равным  $9,8$  м/с<sup>2</sup>. (**Отв.:** 10 рад).

*Дано:*

$$l = 2,45 \text{ м}$$

$$x = 0,02 \cos \omega t$$

$$t = 5 \text{ с}$$

$$g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

-----  
 $\varphi = ?$

*Решение:*

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

$$x = 0,02 \cos \omega t \Rightarrow \varphi = \omega t, \varphi_0 = 0.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t, \quad \varphi = \sqrt{\frac{9,8}{2,45}} \cdot 5 = 10 \text{ (рад)}.$$

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**11.62.\*** Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью  $L = 1$  мкГн и конденсатора. Заряд на обкладках конденсатора меняется по закону  $q = 0,08 \cos(10^6 t + \pi/4)$  (мкКл).

Определить емкость конденсатора. (Отв.: 1 мкФ).

*Дано:*

$$L = 1 \text{ мкГн}$$

$$q = 0,08 \cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ (мкКл)}$$

-----  
 $C - ?$

*Решение:*

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 10^6 \text{ Гц.} \\ \omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \end{array} \right| \begin{array}{l} \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow \\ C = \frac{1}{L\omega^2}, \end{array}$$

$$C = \frac{1}{1 \cdot 10^{-6} (10^6)^2} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ (Ф)}.$$

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**11.63.\*** Во сколько раз увеличится частота электромагнитных колебаний в контуре, если конденсатор заменить другим, электроемкость которого в 9 раз меньше чем у прежнего конденсатора? (Отв.: 3).

Решение:

Дано:

$$\frac{C_1}{C_2} = 9$$

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = ?$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$\nu = \frac{1}{T}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}}$$

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}} \cdot \frac{2\pi\sqrt{LC_1}}{1} \Rightarrow$$

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}, \quad \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{9} = 3.$$

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**11.64.\*** На какую длину волны рассчитан приемный контур, состоящий из катушки с индуктивностью  $5 \cdot 10^{-5}$  Гн и конденсатора емкостью  $5 \cdot 10^{-11}$  Ф? Скорость электромагнитной волны равна  $3 \cdot 10^8$  м/с. Принять  $\pi = 3,14$ . (Отв.: 94,2 м).

Решение:

Дано:

$$L = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Гн}$$

$$C = 5 \cdot 10^{-11} \text{ Ф}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\pi = 3,14$$

---

$$\lambda - ?$$

$$\lambda = c \cdot T$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$\rightarrow \lambda = c \cdot 2\pi\sqrt{LC},$$

$$\lambda = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 3,14 \sqrt{5 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{-11}} = 94,2 \text{ (м)}.$$

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**11.69.\*** Во сколько раз увеличится период собственных колебаний контура, если пространство между пластинами его плоского воздушного конденсатора заполнили стеклом ( $\varepsilon = 1,6$ ), а индуктивность катушки увеличили в 10 раз? (**Отв.:** 4).

*Дано:*

$$\varepsilon_1 = 1$$

$$\varepsilon_2 = 1,6$$

$$\frac{L_2}{L_1} = 10$$

---

$$\frac{T_2}{T_1} = ?$$

*Решение:*

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$$



$$T = 2\pi\sqrt{L \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1 \varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d}}$$



$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L_2 \varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d}}}{2\pi\sqrt{\frac{L_1 \varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d}}} \Rightarrow$$

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2 \varepsilon_2}{L_1 \varepsilon_1}},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{10 \cdot \frac{1,6}{1}} = 4.$$

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**11.74.\*\*** Максимальное напряжение в колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивностью  $L = 5$  мкГн и конденсатора емкостью  $C = 12960$  пФ равно 1,2 В. Сопротивление ничтожно мало. Определить действующее значение силы тока в контуре. (Отв.: 43,2 мА).

*Решение:*

*Дано:*

$$L = 5 \text{ мкГн}$$

$$C = 12960 \text{ пФ}$$

$$U_{\max} = 1,2 \text{ В}$$

$I - ?$

$$C = \frac{q}{U} \Rightarrow q_{\max} = U_{\max} \cdot C,$$

$$I_{\max} = q_{\max} \cdot \omega$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



$$I_{\max} = U_{\max} \cdot C \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} = U_{\max} \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad I_{\max} = 1,2 \sqrt{\frac{12960 \cdot 10^{-12}}{5 \cdot 10^{-6}}} = 0,061 \text{ (А)}.$$

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

$$I = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}, \quad I = \frac{0,061}{\sqrt{2}} = 0,0431 \text{ (A)}.$$

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**11.87.\*** Стоя на берегу моря ученик увидел, что минимальное расстояние между гребнями двух волн равно 6 м. За 50 с перед наблюдателем прошел 21 гребень. Найти скорость распространения морских волн. (Отв.: 2,4 м/с).

Дано:

$$\lambda = 6 \text{ м}$$

$$t = 50 \text{ с}$$

$$N = 21$$

$$v = ?$$

Решение:

$$\lambda = v \cdot T \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T}$$

$$T = \frac{t}{N}$$

$$v = \frac{\lambda \cdot N}{t}, \quad v = \frac{6 \cdot 21}{50} = 2,52 \left( \frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

# КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ