НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

В.В. Аврутов, Н.И. Бурау

НАДЕЖНОСТЬ И ДИАГНОСТИКА ПРИБОРОВ И СИСТЕМ

Учебное пособие

Рекомендовано Методическим советом
НТУУ «КПИ»

Киев НТУУ «КПИ» – 2014

УДК 621.396.988

Гриф присвоен Методическим советом НТУУ «КПИ» (протокол № 9 от 15.05.2014).

Рецензенты:

- **Успенский В.Б. –** д.т.н., профессор кафедры систем и процессов управления Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»;
- **Поляков А.П. –** д.т.н., профессор кафедры автомобилей и транспортного менеджмента Винницкого национального технического университета.

Ответственный редактор: **Румбешта В.А. –** д.т.н., профессор кафедры производства приборов НТУУ «Киевский политехнический институт»

Аврутов В.В., Бурау Н.И.
Надежность и диагностика приборов и систем: Учебное пособие. – К.: НТУУ «КПИ», 2014. – 156 с.

Учебное пособие предназначено студентам приборостроительных специальностей высших технических учебных заведений. Во введении содержатся основные понятия, определения и дается классификация отказов.

Первый раздел посвящен надежности технических систем. Рассмотрены показатели надежности невосстанавливаемых и восстанавливаемых объектов, предложен расчет надежности нерезервированных систем и систем с резервными элементами. Поскольку технические системы имеют в своем составе средства информационно-вычислительной техники, поэтому помимо надежности аппаратуры отдельно рассмотрена надежность программного обеспечения.

Второй раздел посвящен основам технической диагностики. Помимо таких классических вопросов, как средства контроля и диагностики, классификация моделей объектов контроля, методы поиска отказов и оптимизация диагностических тестов, в этом разделе кратко рассмотрено диагностирование бортовых цифровых вычислительных устройств и методы распознавания состояния объектов диагностики.

Пособие содержит примеры решения задач, а также задачи для самостоятельной работы. Благодаря общему характеру материала учебное пособие будет полезно студентам и специалистам из отраслей электроники, радиотехники, информатики и компьютерной техники.

Ил. 61, библиогр. 26, табл. 8.

Содержание

	Условные обозначения	5
	Предисловие	6
	Введение	7
В1.	Основные понятия и определения	7
В2.	Классификация отказов	10
1.	**Надежность технических систем**	15
1.1.	Основные понятия теории надежности	16
1.2.	Показатели надежности невосстанавливаемых объектов	20
1.2.1.	Вероятность отказа и вероятность безотказной работы	20
1.2.2.	Частота отказов или плотность распределения отказов	21
1.2.3.	Интенсивность отказов	23
1.2.4.	Среднее время наработки до первого отказа (средняя наработка до отказа)	26
	Примеры решения задач	30
	Задачи для самостоятельной работы	33
1.3.	Показатели надежности восстанавливаемых объектов	34
1.3.1.	Вероятность восстановления	34
1.3.2.	Частота восстановления	34
1.3.3.	Интенсивность восстановления	34
1.3.4.	Среднее время восстановления	36
1.3.5.	Параметр потока отказов	36
1.3.6.	Коэффициент готовности	38
1.4.	Математические модели теории надежности	40
1.4.1.	Общие понятия о моделях надежности	40
1.4.2.	Статистическая обработка результатов испытаний и определение показателей надежности	40
1.4.3.	Расчет критерия согласия	45
1.5.	Законы распределения наработки до отказа	47
1.5.1.	Экспоненциальное распределение	47
1.5.2.	Распределение Рэлея	48
1.5.3.	Распределение Вейбулла	48
1.5.4.	Классическое нормальное распределение (нормальный закон распределения наработки до отказа)	49
1.5.5.	Логарифмически нормальное распределение	52
1.5.6.	Гамма-распределение	53
1.6.	Расчет надежности систем	55
1.6.1.	Надежность основной системы	56
1.6.2.	Системы с резервированием	59
1.6.2.1.	Надежность систем с нагруженным резервированием	61
1.6.2.2.	Надежность систем с ненагруженным резервированием	66
1.6.2.3.	Надежность систем с облегченным резервом	72
1.6.2.4.	Надежность систем со скользящим резервированием	77
1.6.2.5.	Мажоритарные системы (резервирование с дробной крат-	79

		ностью)	
	1.6.2.6.	Надежность резервированных систем с восстановлением	80
	1.6.2.7.	Пример оценки вероятности безотказной работы микро-ЭВМ в составе бортовой аппаратуры космических аппаратов	85
		Примеры решения задач	87
		Задачи для самостоятельной работы	91
1.7.		Надежность программного обеспечения	93
1.7.1.		Тестирование ПО	95
1.7.2.		Основные показатели надежности ПО	96
1.7.3.		Модели надежности ПО	98
	1.7.3.1.	Динамические модели надежности ПО	98
	1.7.3.2.	Статические модели надежности ПО	101
2.		**Основы технической диагностики**	105
2.1.		Средства контроля и диагностики	105
2.2.		Диагностические модели объектов контроля	110
2.2.1.		Классификация моделей объектов контроля	112
2.2.2.		Таблица функции неисправностей	114
2.3.		Методы поиска отказов	121
2.3.1.		Метод последовательного анализа (диагностирования)	122
2.3.2.		Метод половинного разбиения	123
2.3.3.		Комбинационный метод диагностирования	123
2.4.		Оптимизация диагностических тестов	125
2.5.		Диагностирование бортовых цифровых вычислительных устройств	128
2.6		Методы распознавания состояния объекта диагностики	130
2.6.1.		Статистические методы распознавания	130
2.6.2.		Методы разделения в пространстве признаков	137
2.6.3.		Метрические методы распознавания	138
		Задачи для самостоятельной работы	142
		Приложение 1	148
		Литература	151
		Предметный указатель	153

Условные обозначения

БР – безотказная работа;
ВБР – вероятность безотказной работы;
ВВ – вероятность восстановления;
ВО – вероятность отказа;
ВСК – встроенные средства контроля;
ИВ – интенсивность восстановления;
ИО – интенсивности отказов;
ИНС – инерциально-навигационная система;
КД – контроль и диагностика;
МО – математическое ожидание;
НТД – нормативно-техническая документация;
ОК – объект контроля;
ОС – основная система;
ОЭ – основной элемент;
РЭ – резервный элемент;
ПО – программное обеспечение;
ПРО – плотность распределения отказов;
ПУ – переключающее устройство;
СКО – среднеквадратическое отклонение;
СНС – спутниковая навигационная система;
СТО – средняя тяжесть ошибок;
ЧВ – частота восстановления;
ACARS – система передачи информации на наземную станцию;
MTBF (Mean Time Between Failures) – среднее время между отказами;
MTTF (Mean Time To Failures) – средняя наработка до отказа;
BITE – Built-In-Test Equipment – встроенная система контроля

Предисловие

Учебное пособие предназначено в первую очередь студентам, которые учатся на приборостроительных специальностях высших технических учебных заведений. Материал учебного пособия создан на основе лекций по дисциплине «Диагностика и надежность приборов и систем», которые читаются на приборостроительном факультете НТУУ «Киевский политехнический институт» студентам образовательно-квалификационных уровней «магистр» и «специалист» (специальность: приборы и системы ориентации и навигации). Эта дисциплина относится к профилирующим курсам, потому что от надежности бортовых приборов (авионики для летательных аппаратов и приборов навигации для кораблей) зависит безопасность эксплуатации транспортных средств и жизнь людей.

Учебное пособие состоит из введения и двух разделов. Во введении содержатся основные понятия, определения и дается классификация отказов.

Первый раздел посвящен надежности технических систем. Здесь подробно рассмотрены показатели надежности невосстанавливаемых и восстанавливаемых объектов, предложен расчет надежности систем без резервных и с резервными элементами. Поскольку технические системы имеют в своем составе средства информационно-вычислительной техники, поэтому помимо надежности аппаратуры отдельно рассмотрена надежность программного обеспечения.

Второй раздел посвящен основам технической диагностики. Помимо таких классических вопросов, как средства контроля и диагностики, классификация моделей объектов контроля, методы поиска отказов и оптимизация диагностических тестов, в этом разделе кратко рассмотрено диагностирование бортовых цифровых вычислительных устройств и методы распознавания состояния объектов диагностики.

Пособие содержит примеры решения задач, а также задачи для самостоятельной работы.

Авторы надеются, что благодаря общему характеру материала пособия из теории надежности и технической диагностики учебное пособие будет полезно студентам других факультетов и учебных заведений, которые готовят специалистов из отраслей электроники, радиотехники, информатики и компьютерной техники.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам д.т.н., проф. В.Б. Успенскому и д.т.н., проф. А.П. Полякову за ценные замечания и советы, которые способствовали улучшению настоящего пособия.

В в е д е н и е

В настоящее время эффективность использования подвижных объектов (летательных и космических аппаратов, кораблей и наземных транспортных средств) определяется, главным образом, безопасностью движения (полетов и мореплавания), их регулярностью, себестоимостью перевозок и вероятностью выполнения поставленных целей [13] (рис. В1).

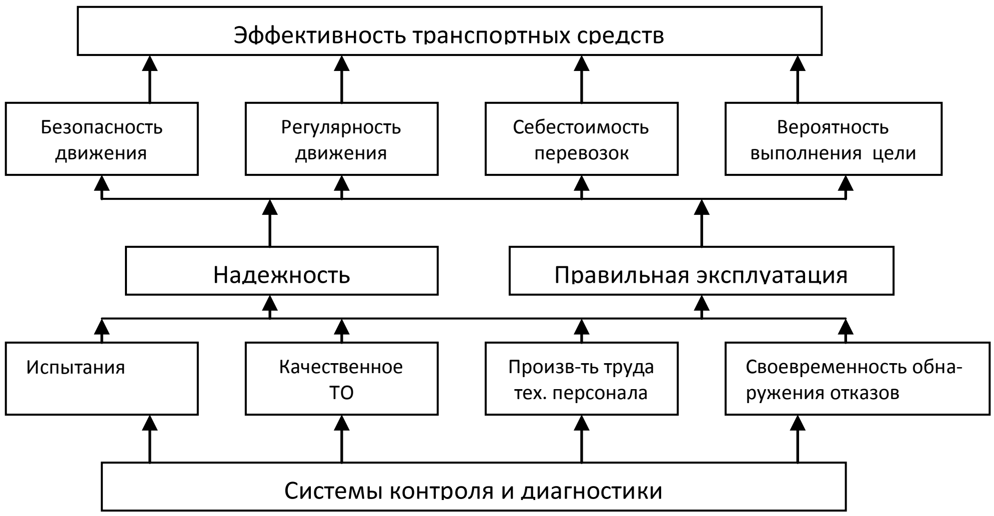


Рис. В1. *Эффективность использования транспортных средств*

Первые три критерия или свойства присущи гражданским или коммерческим объектам, четвертый (вероятность выполнения поставленных целей) – военным и научным.

Все четыре указанные свойства во многом зависят от надежности и правильной эксплуатации, которые в свою очередь зависят от испытаний (на всех стадиях жизненного цикла изделия), качества технического обслуживания, производительности труда технического персонала и своевременности обнаружения отказов.

Именно для повышения надежности техники, качества технического обслуживания, производительности труда технического персонала и своевременного обнаружения отказов служат системы контроля и диагностики.

Назначение средств контроля состоит в обнаружении отказа системы, а назначение средств диагностики – локализации места отказа системы.

В1. Основные понятия и определения

Рассмотрим основные понятия, термины и определения [15].

Техническое состояние - совокупность свойств объекта, характеризуемых в определенный момент времени признаками, установленными технической документацией на этот объект. Признаками технического состояния могут быть области значений качественных и количественных характеристик свойств объекта.

В зависимости от фактических значений признаков ***видами технического состояния*** являются:

- исправность,
- неисправность,
- работоспособность,
- неработоспособность,

- правильное функционирование,
- неправильное функционирование;
- предельное состояние.

Исправность - состояние, при котором объект соответствует всем требованиям, установленным нормативно-технической документацией.

Неисправность - состояние, при котором объект не соответствует хотя бы одному из требований нормативно-технической документации.

Работоспособность - состояние, при котором объект способен выполнять заданные функции, сохраняя значения заданных выходных основных параметров в пределах, установленных нормативно-технической документацией (НТД). При этом остальные характеристики объекта могут не соответствовать требованиям (наличие коррозии, нарушение лакокрасочного покрытия и т. д.). Следовательно, работоспособный объект может быть неисправным. Исправный объект всегда работоспособен.

Неработоспособность - состояние, при котором значение хотя бы одного заданного параметра, определяющего способность объекта выполнять заданные функции, не соответствует требованиям нормативно-технической документации. Переход изделия из работоспособного в неработоспособное состояние в заданных условиях применения называется ***отказом***. При одном и том же существующем техническом состоянии объект может быть работоспособным для одних условий применения и неработоспособным для других.

Правильное функционирование означает, что применяемый по назначению объект в текущий момент времени выполняет предписанный алгоритм функционирования. Объект может находиться в таком неработоспособном состоянии, при котором он правильно функционирует в одних режимах работы и неправильно в других. Работоспособный объект правильно функционирует во всех режимах работы.

Предельным является такое состояние объекта, при котором его дальнейшее использование по назначению должно быть прекращено из-за

а) неустранимого нарушения (несоответствия) требований безопасности;

б) неустранимого ухода заданных параметров за установленные пределы;

в) неустранимого снижения эффективности эксплуатации ниже допустимой;

г) необходимости проведения капитального ремонта.

Критерий предельного состояния - признак или совокупность признаков предельного состояния, установленных НТД.

Для выявления технического состояния объектов используются специальные методы и технические средства контроля.

Под ***контролем технического состояния*** понимается процесс определения вида технического состояния объекта. В общем случае контроль технического состояния объекта есть совокупность операций по проверке работоспособности, локализации и прогнозированию отказов объекта. Составными элементами контроля являются измерение и оценка контролируемых параметров объекта, обработка полученных данных с целью распознавания вида состояния и места отказа с заданной подробностью (глубиной) и управление процессом контроля.

Степень детализации при ***техническом диагностировании***, указывающая, до какой составной части объекта определяется место отказа, называется ***глубиной поиска дефекта***.

Процесс оценки состояния объекта контроля (ОК) является довольно сложной задачей. Особенно он сложен при косвенных методах измерения, когда значение искомого параметра определяется не непосредственным измерением, а вычисляется по результатам измерений каких-то других параметров. Примерами могут служить процессы определения значений коэффициентов усиления, коэффициентов передаточных функций и др. В общем случае определение характеристик динамических систем является одной из задач, решаемой идентификацией.

Под ***идентификацией*** понимается процедура построения оптимальной математической модели объекта по реализациям его входных и выходных сигналов.

Всякий объект, состояние которого подвергается проверке, называется ***объектом контроля***. Неисправные ОК, требующие определения места и причины отказа, называются ***объектами диагностирования***. Следовательно, путем диагностирования определяются принятые к распознаванию конкретные состояния из известного класса технических состояний объектов. Например, если путем контроля состояния определено, что объект неработоспособен, то диагностирование обеспечивает поиск места отказа с заданной подробностью. Объект диагностирования всегда есть и ОК, поскольку техническое диагностирование является составной, но не всегда обязательной частью контроля. В определенных условиях ОК может не быть в то же время и объектом диагностирования. Так, в полете экипаж контролирует работоспособность бортовых систем. При отказе той или иной системы требуется, как правило, ее выключить и использовать резервное оборудование, не занимаясь вопросами диагностирования, т. е. поиском отказавшего элемента в системе. Техническое диагностирование часто осуществляется на земле по результатам контроля и регистрации параметров в полете.

При контроле объектов производятся измерения и оценка определенных выходных и дополнительных (внутренних) параметров. Параметрами могут быть следующие физические величины: напряжение, ток, частота тока и импульсов, электрическое сопротивление, температура, давление, перемещение, скорость движения и т. д. Допустимые области значений проверяемых параметров или их функций называются допусками на контролируемые параметры.

Определение технического состояния ОК на предстоящий интервал времени называется ***прогнозированием технического состояния***. Целью прогнозирования может быть также определение интервала времени, в течение которого сохранится состояние объекта, соответствующее данному времени.

Концепция контроля, т. е. система взглядов, идей и принципов, определяющих общую методологию контроля, во многом зависит от задач контроля.

Основными задачами контроля приборного оборудования подвижных объектов являются:

- получение информации о фактическом состоянии ОК;
- принятие решения о годности или негодности конкретной системы для выполнения определенных функций;
- в случае принятия решения о негодности контролируемой системы – осуществление диагностики неисправностей до сменного блока;
- на основании результатов диагностики – принятие решения или о замене отказавшего блока, или о необходимости регулировки, или об отправке в ремонт, или о списании устройства;

- получение исходных данных для анализа влияния условий эксплуатации, конструкции, схемных решений и технологии производства на качество функционирования объектов.

Состояния объекта, отличные от исправного, появляются в результате различных нарушений технических условий. Такие нарушения возникают на всех стадиях жизненного цикла: разработки, производства и эксплуатации. В зависимости от влияния на них человеческого фактора они могут быть как субъективными, так объективными. Объективные нарушения будем называть ***дефектами*** (подробнее об этом ниже). Субъективные нарушения будем называть ***ошибками***. Оба вида нарушений образуют ***неисправность***, под которой в данном контексте можно понимать проявление или модель дефекта.

События, соответствующие переходу объекта из одного технического состояния в другое в направлении ухудшения его параметров разделяют на следующие состояния (***виды неисправности***):

- повреждения;
- отказы;
- сбои;
- разрушения.

Структурно-логическая схема, отражающая взаимосвязь приведенных понятий, показана на рис. В2.

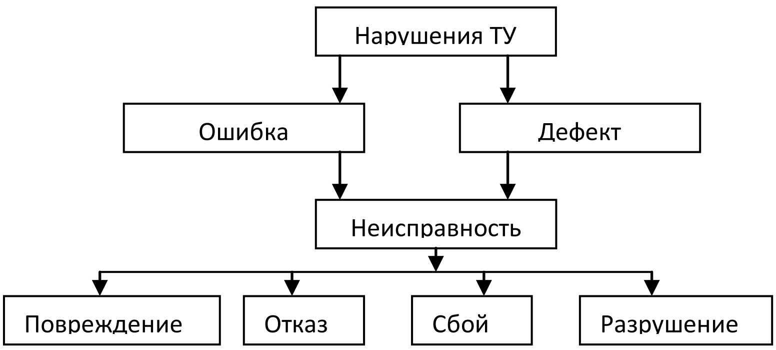


Рис.В2. *Структурная схема проявления неисправных состояний.*

Повреждение – событие, заключающееся в нарушении исправного состояния объекта при сохранении им работоспособного состояния.

Отказ – это переход из работоспособного в неработоспособное состояние в заданных условиях.

Сбой – самоустраняющийся и кратковременный отказ. Сбои особенно опасны для систем, в которых используются компьютеры. Следствием сбоя является искажение информации (исходных данных, управляющих воздействий и т.д.), что приводит к неправильному функционированию системы. Сложность проблемы состоит в кратковременности сбоя, после чего система вновь становится работоспособной и установить наличие искажения информации становится затруднительно.

В2. Классификация отказов

Отказы можно разделить на четыре группы:

- аппаратурные;
- информационные;

- программные;
- отказы оператора.

Традиционно используется оценка надежности по отказам в элементах аппаратуры. Такие отказы будем называть ***аппаратурными***.

Аппаратурные отказы разделяются на следующие виды [16]:

1. По характеру возникновения;
2. По причине возникновения;
3. По характеру устранения;
4. В зависимости от их последствий;
5. По дальнейшему использованию объекта;
6. По легкости обнаружения;
7. По времени возникновения.

Рассмотрим подробнее каждый из классификационных признаков отказов.

1. По характеру возникновения
    - *внезапный отказ* – отказ, проявляющийся в резком (мгновенном) изменении характеристик объекта;
    - *постепенный отказ* – отказ, происходящий в результате медленного, постепенного изменения значений одного или нескольких параметров объекта.

Внезапные отказы обычно проявляются в виде механических повреждений элементов (трещины – хрупкое разрушение, пробои изоляции, короткое замыкание, обрывы и т. п.) и не сопровождаются предварительными видимыми признаками их приближения. Внезапный отказ характеризуется независимостью момента наступления от времени предыдущей работы.

Постепенные отказы - связаны с износом деталей и старением материалов.

2. По причине возникновения
    - *конструкционный отказ,* вызванный недостатками и неудачной конструкцией объекта;
    - *производственный отказ,* связанный с ошибками при изготовлении объекта по причине несовершенства или нарушения технологии и ремонта;
    - *эксплуатационный отказ,* вызванный нарушением правил или условий эксплуатации.
3. По характеру устранения
    - *устойчивый (окончательный) отказ* является следствием необратимых процессов в деталях и материалах. При устойчивом отказе для восстановления работоспособности объекта необходимо производить замену, а не ремонт.
    - *перемежающийся отказ* (*возникающий/исчезающий*) является следствием обратимых случайных изменений режимов работы и параметров объекта. При возвращении режима работы в допустимые пределы объект сам, без вмешательства человека, возвращается в работоспособное состояние.
4. В зависимости от последствия отказа:
    - *легкий отказ* (легкоустранимый);

- *средний отказ* (не вызывающий отказы смежных узлов – вторичные отказы);
- *тяжелый (критический) отказ* (вызывающий вторичные отказы или приводящий к угрозе жизни и здоровью человека).

5. По дальнейшему использованию объекта
   - *полные отказы,* исключающие возможность работы объекта до их устранения;
   - *частичные отказы,* при которых объект может частично использоваться.
6. По легкости обнаружения
   - *очевидные (явные) отказы* – отказы, обнаруживаемые визуально или штатными средствами контроля при подготовке объекта к применению*;*
   - *скрытые (неявные) отказы* – не обнаруживаемые визуально, но выявляемые при проведении технического обслуживания или специальными методами диагностики.
7. По времени возникновения
   - *приработочные отказы,* возникающие в начальный период эксплуатации;
   - *отказы при нормальной эксплуатации;*
   - *износовые (деградационные) отказы,* вызванные необратимыми процессами износа деталей, старения материалов и пр.

Применительно к бортовым приборам, а также для любой информационно-измерительной системы РАБОТОСПОСОБНОСТЬ включает в себя свойство ТОЧНОСТИ [11].

Очевидно, что объект находится в работоспособном состоянии, если он вырабатывает все навигационные (выходные) параметры с определенными (допустимыми) погрешностями. Отказ наступает в случае, когда хотя бы один из параметров вырабатывается с повышенной погрешностью или вообще не вырабатывается. На рис. В3 приведены примеры отказов – в моменты t_1, t_2 и t_3 возникают выбросы (погрешности) при отсутствии критических дефектов в элементах. Здесь x_0 - допустимая величина какого-либо параметра x. **Информационные отказы** вызваны искажением информации при ее передаче и обработке.

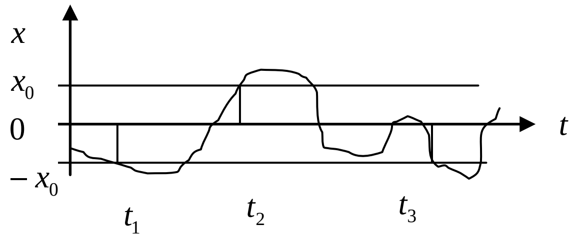


Рис. В3. *Пример информационных отказов.*

Важным свойством информационного отказа является то, что после него система либо сама восстанавливается, либо для ее восстановления достаточно коррекции ее внутренней информации и не требуется замены элементов.

Аналогично можно определить понятие информационного отказа для любого компонента – для подсистем и первичных датчиков информации, если для них определены требования по точности.

Причины информационных отказов:

- причины, связанные с отказами датчиков;
- причины, связанные с вычислительными устройствами обработки информации (сбои аппаратуры и ошибки программного обеспечения);
- причины организационного характера (отсутствие своевременной коррекции из-за неблагоприятных метеоусловий).

Остановимся на причинах, связанных с отказами датчиков. Здесь можно выделить три подкласса:

1. аномальные отклонения физических процессов внутри датчиков;
2. малозначительные дефекты в датчиках, не приводящие к катастрофическим последствиям для их функционирования;
3. аномалии во внешней среде, влияющие на работу датчиков.

Информационные нарушения можно разделить на две группы в зависимости от того, как они проявляются:

1. ***Выбросы в реализациях погрешностей*** – повышенные значения номинальных погрешностей датчика, возникающие достаточно редко. Это информационные нарушения, которые являются следствием первого подкласса физических причин.

2. ***Аномальные дополнительные погрешности*** датчика, которые являются следствием второго и третьего подклассов физических причин.

Программные отказы вызваны несовершенством программы, а также тем, что они часто составляются при наличии ограничений, за пределы которых выходит физический процесс работы системы.

Отказы оператора вызваны ошибками оператора, обслуживающего аппаратуру.

Контрольные вопросы:

1. Что такое предельное состояние?
2. В чем разница между исправным и работоспособным состоянием объекта?
3. Для чего предназначены средства контроля и диагностики?
4. Назовите виды технического состояния объекта.
5. Что такое аппаратурный отказ?
6. Что такое информационный отказ?
7. Назовите виды аппаратурных отказов.
8. Назовите причины информационных отказов.

1. Надежность технических систем

Надежность – важная характеристика любой технической системы.

Мы часто используем слова «надежный» или «надежность» в различных ситуациях и контексте. Что же такое «надежность»?

В техническом смысле понятие «надежности» базируется на трех составляющих:

- работоспособности,
- заданных условиях эксплуатации,
- ресурсе изделия.

Рассмотрим подробнее каждую составляющую.

Работоспособность – это, как известно, способность изделия выполнять требуемые функции.

Заданные условия эксплуатации. Изделие в реальных условиях подвергается влиянию внешних воздействующих факторов. Известно восемь классов воздействий [1]:

- механические;
- климатические;
- биологические;
- радиационные;
- электромагнитные;
- специальные среды;
- термические;
- космические.

Очевидно, что если в нормальных условиях эксплуатации объект будет работоспособен, то при критических воздействиях возможно нарушение работоспособности.

Ресурс изделия - заданный период времени, в течение которого объект работоспособен. Определяется НТД на объект.

Отсюда вытекает определение термина «надежность» согласно международному стандарту ISO 8 402-86 [15]:

НАДЕЖНОСТЬ (reliability-англ.) – ***способность объекта выполнять требуемые функции в заданных условиях в течение заданного периода времени.***

Понятие надежности бортовых приборов является комплексным [11,21] и включает в себя три составляющие – аппаратурную надежность (надежность по аппаратурным отказам), информационную надежность (надежность по информационным отказам) и программную надежность (рис.1.1).

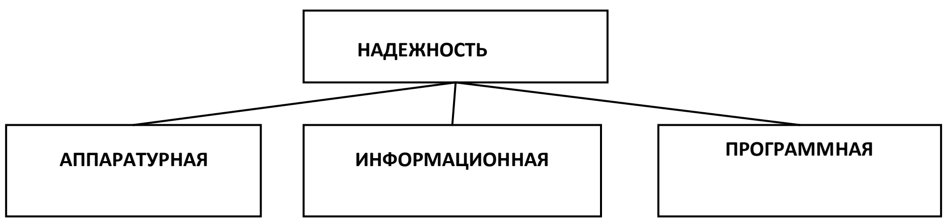


Рис.1.1. *Структура надежности*

Первая составляющая представляет собой надежность технических систем в традиционном понимании, вторая – их надежность в информационном плане (обеспечение требуемой точности), третья - надежности программного обеспечения.

Практика показывает, что при функционировании бортовых приборов информационный отказ является относительно частым событием. Поэтому бортовые приборы включают в свой состав средства для парирования информационных отказов (ИО), основанные на использовании структурной, информационной и алгоритмической избыточности, а также средств контроля и диагностики ИО.

1.1. Основные понятия теории надежности

Для некоторых объектов предельное состояние является последним в его функционировании, т.е. объект снимается с эксплуатации, для других – определенной фазой в эксплуатационном графике, требующей проведения ремонтно-восстановительных работ.

В связи с этим, объекты могут быть:

- ***невосстанавливаемые***, для которых работоспособность, в случае возникновения отказа, не подлежит восстановлению в течение эксплуатации;
- ***восстанавливаемые***, работоспособность которых может быть восстановлена, в том числе и путем замены.

К числу невосстанавливаемых объектов можно отнести, например: гироскопы, акселерометры, электронные компоненты и т.п. Объекты, состоящие из многих элементов, например, гирокомпас, инерциально-навигационная система (ИНС), спутниковая навигационная система, станок, автомобиль, электронная аппаратура, являются восстанавливаемыми, поскольку их отказы связаны с повреждениями одного или немногих элементов, которые могут быть заменены.

В ряде случаев один и тот же объект в зависимости от особенностей, этапов жизненного цикла изделия или назначения может считаться восстанавливаемым или невосстанавливаемым.

Например, прибор на этапе серийного производства, не прошедший приемо-сдаточных испытаний, возвращается на доработку для исправления дефектов. После чего он становится восстанавливаемым. Тот же прибор на этапе эксплуатации при отказе считается невосстанавливаемым. Совсем недавно беспилотные космические аппараты считались невосстанавливаемыми. Сегодня они уже являются восстанавливаемыми. Примером такого восстановления может служить ремонт на орбите американского телескопа «Хабл».

Составляющие надежности

Надежность является *комплексным* свойством, включающим в себя в зависимости от назначения объекта или условий его эксплуатации *ряд простых свойств:*

- безотказность;
- долговечность;
- ремонтопригодность;
- сохраняемость;
- живучесть.

Безотказность – свойство объекта непрерывно сохранять работоспособность в течение некоторой наработки или в течение некоторого времени.

Наработка – продолжительность или объем работы объекта, измеряемая в любых неубывающих величинах (единица времени, число циклов нагружения, километры пробега и т. п.).

Долговечность – свойство объекта сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонтов.

Долговечность невосстанавливаемых изделий характеризуется его наработкой до отказа, т.е. продолжительностью работы изделия от начала его эксплуатации (испытаний) до возникновения первого отказа.

Долговечность восстанавливаемых изделий – свойство изделия сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонтов.

Ремонтопригодность – свойство объекта, заключающееся в его приспособленности к предупреждению и обнаружению причин возникновения отказов, поддержанию и восстановлению работоспособности путем проведения ремонтов и технического обслуживания.

Сохраняемость – свойство объекта непрерывно сохранять требуемые эксплуатационные показатели в течение (и после) срока хранения и транспортирования.

В зависимости от объекта надежность может определяться всеми перечисленными свойствами или частью их. Например, надежность колеса зубчатой передачи, подшипников определяется их долговечностью, а станка – долговечностью, безотказностью и ремонтопригодностью.

Живучесть – свойство объекта сохранять работоспособность в экстремальных ситуациях (с увеличением числа отказов).

Основные показатели надежности

Показатель надежности количественно характеризует [16], в какой степени данному объекту присущи определенные свойства, обусловливающие надежность. Одни показатели надежности, например, технический ресурс, срок службы могут иметь размерность, ряд других, например, вероятность безотказной работы, коэффициент готовности являются безразмерными.

Технический ресурс – наработка объекта от начала его эксплуатации или возобновления эксплуатации после ремонта до наступления предельного состояния. Строго говоря, технический ресурс может быть регламентирован следующим образом: до среднего, капитального, от капитального до ближайшего среднего ремонта и т. п. Если регламентация отсутствует, то имеется в виду ресурс от начала эксплуатации до достижения предельного состояния после всех видов ремонтов.

Для невосстанавливаемых объектов понятия технического ресурса и наработки до отказа совпадают.

Назначенный ресурс – суммарная наработка объекта, при достижении которой эксплуатация должна быть прекращена независимо от его состояния.

Срок службы – календарная продолжительность эксплуатации (в том числе, хранение, ремонт и т. п.) от ее начала до наступления предельного состояния.

На рис. 1.2 приведена [16] графическая интерпретация перечисленных показателей, при этом:

$t_0 = 0$ – начало эксплуатации;

t_1, t_5 – моменты отключения по технологическим причинам;

t_2, t_4, t_6, t_8 – моменты включения объекта;

t_3, t_7 – моменты вывода объекта в ремонт, соответственно, средний и капитальный;

t_9 – момент прекращения эксплуатации;

t_{10} – момент отказа объекта.

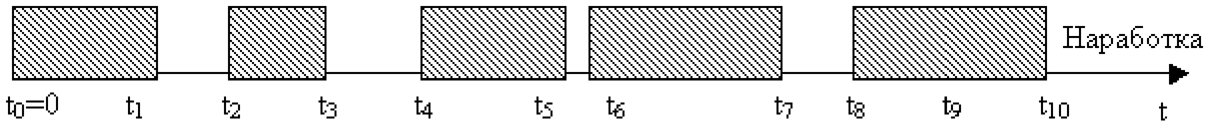


Рис.1.2. *Основные показатели надежности*

Технический ресурс (наработка до отказа)

$$TP = t_1 + (t_3 - t_2) + (t_5 - t_4) + (t_7 - t_6) + (t_{10} - t_8).$$

Назначенный ресурс

$$TH = t_1 + (t_3 - t_2) + (t_5 - t_4) + (t_7 - t_6) + (t_9 - t_8).$$

Срок службы объекта

$$TC = t_{10}.$$

Для большинства объектов электромеханики в качестве критерия долговечности чаще всего используется технический ресурс.

Гарантийный срок службы – устанавливается между заказчиком и изготовителем, всегда меньше его действительного срока службы. Если в течение гарантийного срока происходит отказ изделия, то ответственность за него несет изготовитель, который должен выполнить ремонт отказавшего изделия, а в случае невозможности ремонта заменить изделие исправным. По истечении гарантийного срока службы предприятие-изготовитель не несет ответственности за отказы изделия, но это не означает, что изделия перестают быть надежными и пригодными для дальнейшей эксплуатации.

Обеспечение требуемых показателей надежности достигается:

- выбором соответствующих (по надежности) элементов узлов, блоков системы;
- проведением достаточного числа испытаний;
- облегчением нагрузочных режимов работы изделия, его блоков и элементов;
- снижением влияния внешних воздействующих факторов и помех (применение виброзащиты и экранов);
- введением аппаратурной и информационной избыточности;
- организацией процедур восстановления и обслуживания;
- использованием средств контроля и диагностики.

Средства контроля служат для обнаружения отказов, а средства диагностики – для их локализации. В последнее время их объединяют в одну систему.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение надежности.
2. Назовите основные составляющие надежности.

3. Назовите показатели надежности и изобразите их графическую интерпретацию.
4. За счет чего достигаются требуемые показатели надежности?

1.2. Показатели надежности невосстанавливаемых объектов

Наиболее важные показатели надежности <u>*невосстанавливаемых*</u> объектов [16]:

- ***вероятность безотказной работы и вероятность отказа;***
- ***частота отказов или плотность распределения отказов;***
- ***интенсивность отказов;***
- ***средняя наработка до отказа.***

Показатели надежности (безотказности) представляются в двух формах:

- вероятностной;
- статистические (выборочные) оценки.

Статистические оценки показателей получаются по результатам испытаний на надежность.

Допустим, что в ходе испытаний какого-то числа однотипных объектов получено конечное число интересующего нас параметра – наработки до отказа. Полученные числа представляют собой выборку некоего объема из общей «генеральной совокупности», имеющей неограниченный объем данных о наработке до отказа объекта.

Количественные показатели, определенные для «генеральной совокупности», являются *истинными (вероятностными) показателями,* поскольку объективно характеризуют случайную величину – наработку до отказа.

Показатели, определенные для выборки, и, позволяющие сделать какие-то выводы о случайной величине, являются *выборочными (статистическими) оценками.* Очевидно, что при достаточно большом числе испытаний (большой выборке) оценки *приближаются* к вероятностным показателям.

Вероятностная форма представления показателей удобна при аналитических расчетах, а статистическая – при экспериментальном исследовании надежности.

Для обозначения статистических оценок будем использовать знак «¯» .

1.2.1. Вероятность отказа и вероятность безотказной работы.

Вероятность отказа (ВО) $Q(t)$ - вероятность того, что в течение определенного интервала времени t в реальных условиях эксплуатации в системе произойдет хотя бы один отказ.

Вероятность безотказной работы **(**ВБР) $P(t)$ - вероятность того, что в течение определенного интервала времени t в реальных условиях эксплуатации в системе не произойдет ни одного отказа.

Из определения следует, что ВБР и ВО – это противоположные события:

$$P(t)+Q(t)=1.$$

Отсюда $$P(t)=1-Q(t).$$

Статистическая оценка ВБР (эмпирическая функция надежности) определяется формулой:

$$\overline{P}(t)=\frac{N_0-n(t)}{N_0} \quad , \qquad (1.1)$$

где N_0 - число изделий вначале испытаний, $n(t)$ - число отказавших изделий.

Поскольку числитель формулы (1.1) $N_0 - n(t)$ - есть число изделий, безотказно проработавших до момента наработки t, то ВБР есть отношение числа изделий, безотказно проработавших до момента наработки t, к общему числу изделий.

Оценку ВБР можно рассматривать как показатель доли работоспособных объектов к моменту наработки t.

Формулу (1.1) можно представить в виде

$$\overline{P}(t) = 1 - \frac{n(t)}{N_0} \tag{1.2}$$

Обозначим $\overline{Q}(t) = \dfrac{n(t)}{N_0}$ - оценка вероятности отказа (ВО). (1.3)

Из формулы (1.2) с учетом (1.3) следует, что

$$\overline{P}(t) = 1 - \overline{Q}(t) \tag{1.4}$$

или $$\overline{P}(t) + \overline{Q}(t) = 1$$

Это означает, что события, заключающиеся в наступлении или не наступлении отказа к моменту наработки t, являются противоположными.

ВБР является убывающей, а ВО – возрастающей функцией наработки.

Примеры графиков ВБР и ВО приведены на рис. 1.3.

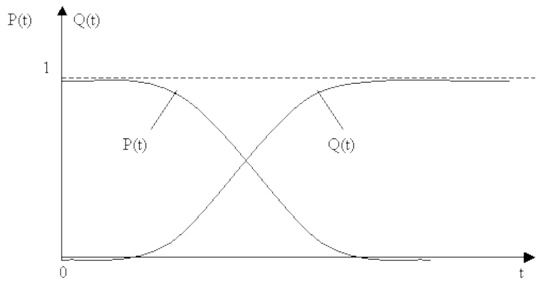


Рис. 1.3. *Графики ВБР и ВО.*

Действительно в момент начала испытаний $t = 0$ число отказавших изделий $n(t) = 0$, а число работоспособных - равно общему их числу $N_0 - n(t) = N_0$,

поэтому $\overline{P}(t) = \overline{P}(0) = 1$, а $\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) = 0$;

- при наработке $t \to \infty$ все объекты, поставленные на испытания, откажут, т. е. $N_0 = n(t)$, поэтому $\overline{P}(t) = \overline{P}(\infty) = 0$, а $\overline{Q}(t) = \overline{Q}(\infty) = 1$.

1.2.2. Частота отказов или плотность распределения отказов

Производная от ВО является частотой отказов или плотностью распределения отказов (ПРО):

$$a(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad , \tag{1.5}$$

или $$a(t) = -\frac{dP(t)}{dt}$$

Из формулы (1.5) получим

$$Q(t)=\int_0^t a(t)dt \quad . \tag{1.6}$$

Тогда из формулы (1.4) следует, что

$$P(t)=1-\int_0^t a(t)dt \tag{1.7}$$

Статистическая оценка частоты отказов или ПРО $\overline{a}(t)$ определяется отношением числа отказавших изделий за интервал наработки $n(\Delta t)$ к произведению общего числа объектов N_0 на длительность интервала наработки Δt:

$$\overline{a}(t)=\frac{n(\Delta t)}{N_0\cdot\Delta t} \tag{1.8}$$

Докажем, что $\overline{a}(t)\xrightarrow{\Delta t\to 0}a(t)$.

На рис.1.4. показаны значения чисел отказавших элементов в течение времени t и $t+\Delta t$.

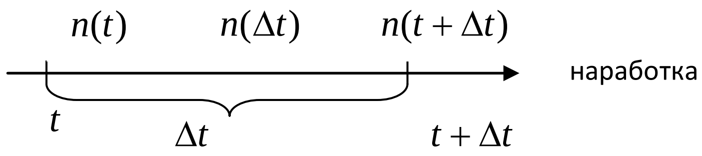


Рис. 1.4. *Иллюстрация* значений *чисел отказавших элементов.*

Из рисунка следует, что $n(\Delta t)=n(t+\Delta t)-n(t)$

Вернемся к формуле (1.1) для ВБР. Как было сказано выше, числитель формулы ВБР – число безотказных элементов. Обозначим его $N(t)$:

$$N(t)=N_0-n(t).$$

Тогда $n(t)=N_0-N(t)$;

$$n(t+\Delta t)=N_0-N(t+\Delta t).$$

Теперь найдем число отказавших элементов за период Δt:

$$n(\Delta t)=n(t+\Delta t)-n(t)=N_0-N(t+\Delta t)-N_0+N(t)=-\left[N(t+\Delta t)-N(t)\right].$$

Подставим полученное выражение в (1.8):

$$\overline{a}(t)=\frac{n(\Delta t)}{N_0\Delta t}=-\frac{\left[N(t+\Delta t)-N(t)\right]}{N_0\Delta t}.$$

Опять вернемся к формуле (1.1):

$$\overline{P}(t)=\frac{N_0-n(t)}{N_0}=\frac{N(t)}{N_0}.$$

Тогда $N(t)=\overline{P}(t)\cdot N_0$;

$$N(t+\Delta t)=\overline{P}(t+\Delta t)\cdot N_0.$$

С учетом последних двух выражений статистическая оценка частоты отказов примет вид: $\overline{a}(t) = -\frac{\left[\overline{P}(t+\Delta t) - \overline{P}(t)\right]}{\Delta t}$.

Перейдем к вероятностной форме при $\Delta t \to 0$:

$$a(t) = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{P}(t+\Delta t) - \overline{P}(t)}{\Delta t} = -\frac{dP(t)}{dt} = \frac{dQ(t)}{dt}.$$

1.2.3. Интенсивность отказов

Вероятностное определение интенсивности отказов (ИО) определяется выражением

$$\lambda(t) = \frac{a(t)}{P(t)} \tag{1.9}$$

ИО представляет собой условную плотность вероятности отказов или «мгновенную» частоту отказов системы в момент времени t при условии, что до момента t отказы в системе отсутствовали.

Используя выражение для интенсивности отказов (1.9), выразим из него частоту отказов:

$$a(t) = \lambda(t) \cdot P(t) \tag{1.10}$$

В то же время из выражения (1.5) частота отказов $a(t) = -\frac{dP(t)}{dt}$.

Приравнивая два последних выражения (1.5) и (1.10) , получим

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\lambda(t) \cdot P(t).$$

Отсюда получим $\lambda(t) = -\frac{dP(t)}{dt} \cdot \frac{1}{P(t)}$,

или $\frac{dP(t)}{P(t)} = -\lambda(t) \cdot dt$.

С учетом, того что $P(t) = 1 - Q(t)$,

$$\lambda(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \cdot \frac{1}{1 - Q(t)}$$

Интегрируя от *0* до t и принимая во внимание, что при $t = 0$ $P(0) = 1$, получаем

$$\int_0^t \frac{dP(t)}{P(t)} = \ln P(t)\,|_0^t = \ln P(t) = -\int_0^t \lambda(t)dt.$$

Откуда **уравнение связи основных показателей надежности** имеет вид:

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}. \tag{1.11}$$

Тогда $$Q(t)=1-P(t)=1-e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}.$$

С учетом (1.11) выражение (1.9) можно записать относительно частоты отказов в виде:

$$a(t)=\lambda(t)\cdot e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau} \qquad (1.12)$$

Выражения (1.11) и (1.12) устанавливают зависимость между ВБР, частотой отказов и ИО.

Уравнение связи показывает, что все показатели надежности $P(t), Q(t), a(t)$ и $\lambda(t)$ равноправны в том смысле, что зная один из них, можно определить другие.

Статистическая оценка ИО определяется отношением числа отказавших изделий в единицу времени к среднему числу изделий, исправно работающих за данный период времени:

$$\overline{\lambda}(t)=\frac{n(\Delta t)}{N_{cp}\cdot\Delta t} \qquad (1.13)$$

где $N_{cp}=\frac{1}{2}(N_i+N_{i+1})$ - среднее число исправно работающих изделий в интервале Δt;

N_i − число исправно работающих изделий в начале интервала Δt;

N_{i+1} − число исправно работающих изделий в конце интервала Δt.

Докажем, что $\overline{\lambda}(t)\xrightarrow{\Delta t\to 0}\lambda(t)$.

Выше, при доказательстве ПРО мы получили, что

$$n(\Delta t)=-[N(t+\Delta t)-N(t)].$$

Кроме того, $N(t)=\overline{P}(t)\cdot N_0$; $\quad N(t+\Delta t)=\overline{P}(t+\Delta t)\cdot N_0$.

Подставляя последние выражения в (1.13), получим

$$\overline{\lambda}(t)=\frac{n(\Delta t)}{N_{cp}\cdot\Delta t}=-\frac{N_0\cdot\left[\overline{P}(t+\Delta t)-\overline{P}(t)\right]}{N_{cp}\cdot\Delta t}.$$

Число исправно работающих изделий в начале интервала Δt: $N_i=N(t)$;

а число исправно работающих изделий в конце интервала Δt: $N_{i+1}=N(t+\Delta t)$.

Тогда

$$N_{cp}=\frac{1}{2}(N_i+N_{i+1})=\frac{1}{2}\left[N(t)+N(t+\Delta t)\right]=\frac{1}{2}\left[\overline{P}(t)\cdot N_0+\overline{P}(t+\Delta t)\cdot N_0\right]=$$
$$=\frac{N_0}{2}\left[\overline{P}(t)+\overline{P}(t+\Delta t)\right].$$

При $\Delta t\to 0$

$$\lambda(t)=-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N_0\cdot\left[\overline{P}(t+\Delta t)-\overline{P}(t)\right]}{\frac{N_0}{2}\left[\overline{P}(t)+\overline{P}(t+\Delta t)\right]\cdot\Delta t}=-\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\overline{P}(t+\Delta t)-\overline{P}(t)\right]}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\left[\overline{P}(t)+\overline{P}(t+\Delta t)\right]}.$$

Поскольку в числителе $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\left[\overline{P}(t+\Delta t)-\overline{P}(t)\right]}{\Delta t}=\dfrac{dP(t)}{dt}$,

а в знаменателе $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1}{2}\left[\overline{P}(t)+\overline{P}(t+\Delta t)\right]=P(t)$, то

$$\lambda(t)=-\frac{dP(t)}{dt\cdot P(t)}=\frac{a(t)}{P(t)},$$

что и требовалось доказать.

В табл.1.1 приведены основные соотношения, устанавливающие функциональную связь между показателями надежности.

Табл.1.1. *Связь между показателями надежности*

	$P(t)$	$Q(t)$	$a(t)$	$\lambda(t)$
$P(t)$	1	$1-Q(t)$	$1-\int_0^t a(t)dt$	$e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$
$Q(t)$	$1-P(t)$	1	$\int_0^t a(t)dt$	$1-e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$
$a(t)$	$-\dfrac{dP(t)}{dt}$	$\dfrac{dQ(t)}{dt}$	1	$\lambda(t)\cdot e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$
$\lambda(t)$	$-\dfrac{dP(t)}{dt}\cdot\dfrac{1}{P(t)}$	$\dfrac{dQ(t)}{dt}\cdot\dfrac{1}{1-Q(t)}$	$\dfrac{a(t)}{1-\int_0^t a(t)dt}$	1

Опыт эксплуатации показывает, что изменение ИО $\lambda(t)$ подавляющего большинства объектов описывается U – образной кривой (рис. 1.5).

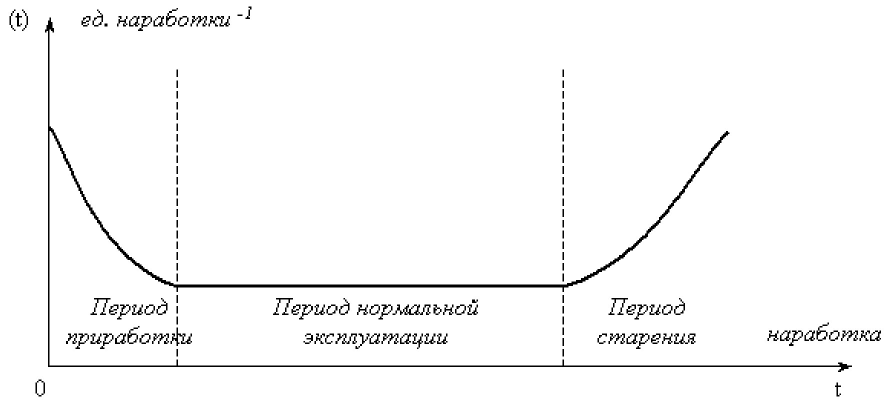


Рис. 1.5. *График изменения ИО большинства объектов.*

Кривую можно условно разделить на три характерных участка:

первый – период приработки,

второй – период нормальной эксплуатации $\lambda(t)$=const,

третий – период старения объекта.

Период приработки объекта имеет повышенную ИО, вызванную приработочными отказами, обусловленными дефектами производства, монтажа, наладки. Иногда с окончанием этого периода связывают гарантийное обслуживание объекта, когда устранение отказов производится изготовителем.

В *период нормальной эксплуатации* ИО уменьшается и практически остается постоянной, при этом отказы носят случайный характер и появляются внезапно, прежде всего из-за несоблюдения условий эксплуатации, случайных изменений нагрузки, неблагоприятных внешних факторов и т. п. Именно этот период соответствует основному времени эксплуатации объекта.

Возрастание ИО относится к *периоду старения* объекта и вызвано увеличением числа отказов от износа, старения и других причин, связанных с длительной эксплуатацией.

Численные значения ИО для некоторых изделий автоматики и их комплектующих представлены в приложении 1.

1.2.4. Среднее время наработки до первого отказа (средняя наработка до отказа)

Рассмотренные выше функциональные показатели надежности $P(t), Q(t), a(t)$ и $\lambda(t)$ полностью описывают случайную величину наработки $T = \{t\}$. В то же время для решения ряда практических задач надежности требуется знать ***среднюю наработку до отказа.***

При *вероятностном определении* средняя наработка до отказа представляет собой ***математическое ожидание (МО)*** случайной величины T и определяется:

$$T_{cp} = M[T] = \int_0^\infty t \cdot a(t)dt \tag{1.14}$$

Используя выражение для плотности распределения отказов $a(t) = -\frac{dP(t)}{dt}$, выражение запишем в виде

$$T_{cp} = -\int_0^\infty t \cdot \frac{dP(t)}{dt} dt = -\int_0^\infty t dP(t)$$

Интегрируя последнее выражение по частям ($\int u dv = uv - \int v du$), получим

$$T_{cp} = -t \cdot P(t)\big|_0^\infty + \int_0^\infty P(t)dt$$

с учетом того, что $P(\infty) = 0, P(0) = 1$ можно преобразовать (1.14) к виду

$$T_{cp} = \int_0^\infty P(t)dt \tag{1.15}$$

Из выражения (1.15) следует, что средняя наработка до отказа геометрически интерпретируется как площадь под кривой $P(t)$ – рис. 1.6.

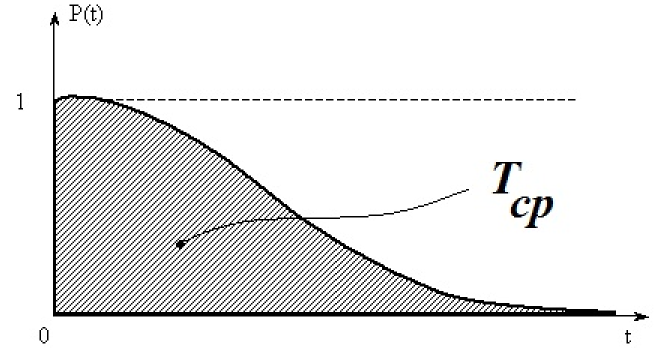


Рис. 1.6. *Геометрическая интерпретация средней наработки до отказа*

Статистическая оценка средней наработки до отказа

$$\overline{T}_{cp} = \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_0} t_i \ , \qquad (1.16)$$

где t_i - время безотказной работы (наработка до отказа) i - ого элемента;

N_0 - число испытуемых элементов.

Очевидно, что с увеличением выборки испытаний $N_0 \to \infty$ средняя арифметическая наработка (оценка $\overline{T}_{cp}$) сходится по вероятности с МО наработки до отказа.

Как видно из формулы (1.16), для определения средней наработки до первого отказа необходимо знать моменты выхода из строя всех испытуемых элементов. Поэтому пользоваться указанной формулой неудобно. Если есть данные о количестве вышедших из строя элементов $n(\Delta t_i)$ в каждом интервале времени Δt_i, удобно определять среднюю наработку до отказа по формуле:

$$\overline{T}_{cp} = \frac{1}{N_{omk}}\sum_{i=1}^{m} n(\Delta t_i)\cdot t_{cp_i} \ ,$$

где N_{omk} - общее число отказавших изделий,

$n(\Delta t_i)$ - количество вышедших из строя изделий в каждом интервале Δt_i,

$m = \dfrac{t_K}{\Delta t}$, t_K - время, в течение которого вышли из строя все изделия,

$\Delta t = t_i - t_{i-1}$ - интервал времени, t_{i-1} - время начала i - го интервала,

t_i -время конца i - го интервала, $t_{cp_i} = \dfrac{t_{i-1} + t_i}{2}$.

МО наработки T_{cp} означает математически ожидаемую наработку до отказа однотипных элементов, т. е. усредненную наработку до первого отказа.

На практике также представляют интерес ***условные средние наработки:***

1) ***средняя полезная наработка*** $T_{cp}\,|_{t \le t_1}$, определенная при условии, что при достижении наработки t_1 все оставшиеся работоспособными объекты снимаются с эксплуатации;

2) ***средняя продолжительность предстоящей работы*** $T_{cp}\,|_{t>t_1}$ при условии, что объект безотказно работал на интервале ($0, t_1$).

Причины использования этих показателей:

1. Высоконадежные объекты (элементы электронных схем), как правило, эксплуатируются меньший срок чем $T_{cp}(t_{экс} < T_{cp})$, т. е. заменяются по причине морального старения раньше, чем успевают наработать T_{cp}.

2. Часто для указанных объектов сокращают период испытаний (проводят до наработок соответствующих их моральному старению), поэтому T_{cp} в таком случае понимают как среднюю наработку, которая имела бы место в действительности, если бы ИО оставалась такой, какой она была в начальный период испытаний.

Средняя полезная наработка $T_{cp}\,|_{t\le t_1}$ (по аналогии с T_{cp}):

$$T_{cp}\,|_{t\le t_1} = \int_0^{t_1} P(t)dt.$$

Средняя продолжительность предстоящей работы $T_{cp}\,|_{t>t_1}$

$$T_{cp}\,|_{t>t_1} = M\{T - t_1\} = \frac{1}{P(t_1)}\int_{t_1}^{\infty} P(t)dt.$$

Соотношение между $T_{cp}\,|_{t\le t_1}$, $T_{cp}\,|_{t>t_1}$ и T_{cp}:

$$T_{cp} = T_{cp}\,|_{t\le t_1} + T_{cp}\,|_{t>t_1} \cdot P(t_1) = \int_0^{t_1} P(t)dt + \int_{t_1}^{\infty} P(t)dt = \int_0^{\infty} P(t)dt.$$

Графические понятия $T_{cp}\,|_{t\le t_1}$ и $T_{cp}\,|_{t>t_1}$ иллюстрируются рис. 1.7.

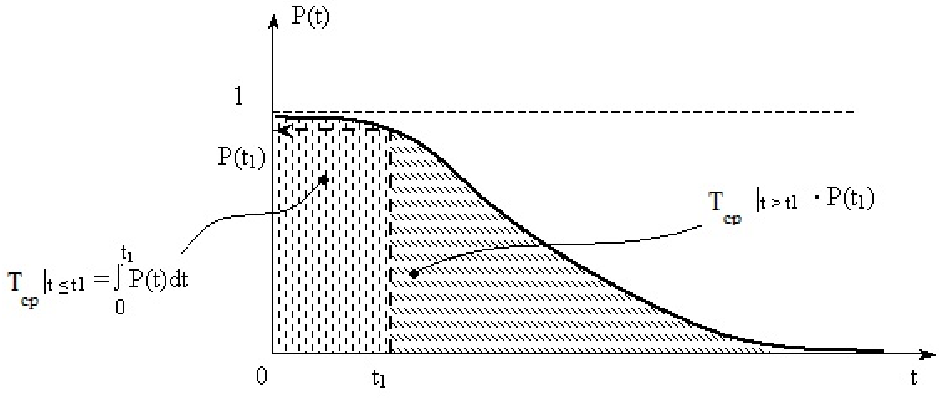


Рис. 1.7. *Иллюстрация средней полезной наработки и средней продолжительности предстоящей работы*.

В то же время средняя наработка не может полностью характеризовать безотказность объекта.

Так при равных средних наработках до отказа T_{cp} надежность объектов 1 и 2 может весьма существенно различаться (рис. 1.8). Очевидно, что в виду большего рассеивания наработки до отказа (кривая ПРО $a_2(t)$ ниже и шире), объект 2 менее надежен, чем объект 1 - кривая $a_1(t)$. $a(t)$

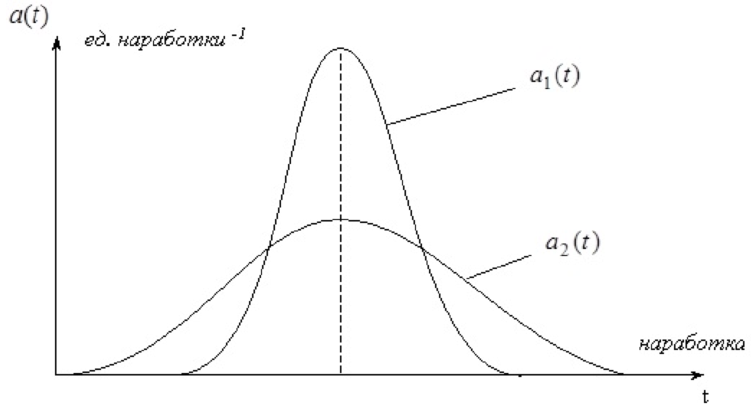


Рис. 1.8. *Пример различных ПРО.*

Поэтому для оценки надежности объекта по величине $\overline{T}_{cp}$ необходимо еще знать и показатель рассеивания случайной величины $T = \{t\}$ около средней наработки T_{cp}.

К числу показателей рассеивания относятся *дисперсия и среднее квадратичное отклонение (СКО) наработки до отказа.*

Дисперсия случайной величины наработки:

- статистическая оценка $\overline{D} = \dfrac{1}{N_0 - 1}\sum_{1}^{N_0}(t_i - \overline{T}_{cp})^2$

- вероятностное определение

$$D = D\{T\} = M\left\{(T - T_{cp})^2\right\} = \int_0^{\infty}(t - T_{cp})^2 a(t)dt.$$

СКО случайной величины наработки:

$\overline{\sigma}^2 = \overline{D}$ или $\sigma^2 = \sigma^2\{T\} = D\{T\}$.

Средняя наработка до отказа T_{cp} и СКО наработки σ имеют размерность [ед. наработки], а дисперсия D - [ед. наработки ^{2}].

В англоязычной литературе используются следующие термины:

- MTBF (Mean Time Between Failures) – среднее время между отказами или наработка на отказ;
- MTTF (Mean Time To Failures) – средняя наработка до отказа.

Отметим, что величины MTBF/MTTF часто основываются на результатах ускоренных испытаний, проходящих в течение ограниченного времени и позволяющих выявить долю производственного брака. Следовательно, заявленное значение говорит не столько о надежности, и тем более долговечности, сколько о проценте забракованных изделий. Например, MTBF порядка 1 млн. часов для компьютерного накопителя на жестких дисках, не означает 114 лет непрерывной безотказной работы. И не только потому, что эксперимент такой продолжительности не мог быть проведен, но и потому, что сам производитель назначает ресурс (срок службы) не более 5-10 лет и гарантийный срок 1-5 лет.

Примеры решения задач по определению показателей надежности

Пример 1.1.

За 10000 часов испытаний 1000 шт. динамически настраиваемых гироскопов отказало 90 гироскопов. Определить статистические оценки ВБР и ВО.

$N_0 = 1000$;
$n(t) = 90$;

$\overline{P}(t) - ?$ $\overline{Q}(t) - ?$

$$\overline{P}(t) = \frac{N_0 - n(t)}{N_0} = \frac{1000 - 90}{1000} = 0{,}91 ;$$

$$\overline{Q}(t) = \frac{n(t)}{N_0} = \frac{90}{1000} = 0{,}09 .$$

Пример 1.2.

В результате испытаний 1000 шт. гироскопов за первые 3000 часов отказало 80 гироскопов, а за интервал времени 3000-4000 часов отказало еще 50 гироскопов. Определить статистические оценки частоты и интенсивности отказов в промежутке времени 3000-4000 час.

$N_0 = 1000$;
$n(t) = 80$;
$n(\Delta t) = 50$;
$\Delta t = 1000$ час

$\overline{a}(\Delta t)$-? $\overline{\lambda}(\Delta t) - ?$

$$\overline{a}(\Delta t) = \frac{n(\Delta t)}{N_0 \cdot \Delta t} = \frac{50}{1000 \cdot 1000} = 5 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{час}} .$$

$$\overline{\lambda}(\Delta t) = \frac{n(\Delta t)}{N_{cp} \cdot \Delta t}.$$

$$N_{cp} = \frac{N_i + N_{i+1}}{2},$$

где $N_i = N_0 - n(t) = 1000 - 80 = 920$;

$$N_{i+1} = N_i - n(\Delta t) = 920 - 50 = 870.$$

Тогда $$\overline{\lambda}(\Delta t) = \frac{50}{(920 + 870)/2 \cdot 1000} = 5{,}6 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{час}}.$$

Пример 1.4.

На испытании находилось 1000 образцов неремонтируемой аппаратуры. Число отказов фиксировалось через каждые 100 часов работы. Данные об отказах приведены в таблице.1.2. Вычислить количественные показатели надежности и построить зависимости полученных показателей от времени.

Р е ш е н и е. Аппаратура относится к классу невосстанавливаемых изделий, поэтому показателями надежности будут $P(t), a(t), \lambda(t), T_{cp}$.

Решение и полученные результаты удобно размещать в виде таблицы, пользуясь, например, программой Microsoft Excel® , содержащей девять столбцов, из которых первые два представляют собой исходные данные.

1). Вычислим $\overline{P}(t)$ - 5-й столбец таблицы:

$$\overline{P}(100) = \frac{1000 - n(100)}{N_0} = \frac{1000 - 50}{1000} = 0{,}95;$$

$$\overline{P}(200) = \frac{1000 - n(200)}{N_0} = \frac{1000 - (50 + 40)}{1000} = 0{,}91 \text{ и т.д.}$$

……………………………………………………

$$\overline{P}(3000) = \frac{1000 - n(3000)}{N_0} = \frac{1000 - 575}{1000} = 0{,}425.$$

Δti	n(Δti)
0-100	50
100-200	40
200-300	32
300-400	25
400-500	20
500-600	17
600-700	16
700-800	16
800-900	15
900-1000	14
1000-1100	15
1100-1200	14
1200-1300	14
1300-1400	13
1400-1500	14
1500-1600	13
1600-1700	13
1700-1800	13
1800-1900	14
1900-2000	12
2000-2100	12
2100-2200	13
2200-2300	12
2300-2400	13
2400-2500	14
2500-2600	16
2600-2700	20
2700-2800	25
2800-2900	30
2900-3000	40

2). Вычислим $\overline{a}(t)$ - 6-ой столбец таблицы:

$$\overline{a}(\Delta t_1) = \frac{n(\Delta t_1)}{N_0 \cdot \Delta t_1} = \frac{50}{1000 \cdot 100} = 5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{час};$$

$$\overline{a}(\Delta t_2) = \frac{40}{1000 \cdot 100} = 4 \cdot 10^{-4} \frac{1}{час};$$

……………………………………………………

$$\overline{a}(\Delta t_{30}) = \frac{40}{1000 \cdot 100} = 4 \cdot 10^{-4} \frac{1}{час}.$$

3). Вычислим $\overline{\lambda}(t)$ - 7-ой столбец таблицы:

$$\overline{\lambda}(\Delta t_i) = \frac{n(\Delta t_i)}{N_{cp1} \cdot \Delta t_i};$$

Для расчета N_{cp_i} - среднего числа исправно работающих изделий для каждого интервала, рассчитаем значения исправно работающих изделий для начала и конца каждого интервала (столбцы 3 и 4 таблицы). Теперь имеем

$$\overline{\lambda}(\Delta t_1) = \frac{n(\Delta t_1)}{N_{cp1} \cdot \Delta t_1} = \frac{50}{100 \cdot (1000 + 950)/2} = 5{,}13 \cdot 10^{-4} \frac{1}{час};$$

$$\overline{\lambda}(\Delta t_2) = \frac{n(\Delta t_2)}{N_{cp2} \cdot \Delta t_2} = \frac{40}{100 \cdot (950 + 910)/2} = 4{,}3 \cdot 10^{-4} \frac{1}{час};$$

……………………………………………………………………

$$\overline{\lambda}(\Delta t_{30}) = \frac{n(\Delta t_{30})}{N_{cp30} \cdot \Delta t_{30}} = \frac{40}{100 \cdot (465 + 425)/2} = 8{,}99 \cdot 10^{-4} \frac{1}{час}.$$

4). Средняя наработка до отказа

$$\overline{T}_{cp} = \frac{1}{N_{omk}} \sum_{i=1}^{m} n(\Delta t_i) \cdot t_{cp_i},$$

где $t_{cp_i} = \dfrac{t_{i-1} + t_i}{2}$, $\qquad m = \dfrac{t_K}{\Delta t}$,

$n(\Delta t_i)$ - количество вышедших из строя изделий в каждом интервале Δt_i,

t_{i-1} - время начала i - го интервала, t_i - время конца i - го интервала,

t_K - время, в течение которого вышли из строя все изделия,

$\Delta t = t_i - t_{i-1}$ - интервал времени, N_{omk} - общее число отказавших изделий.

Итак, в нашем случае $m = \dfrac{t_K}{\Delta t} = \dfrac{3000}{100} = 30$, $N_{omk} = \sum_{i=1}^{m} n(\Delta t_i) = 575$.

Теперь вычисляем t_{cp_i} (8-ой столбец таблицы).

Потом считаем отдельно элементы числителя $n(\Delta t_i) \cdot t_{cp_i}$ формулы $\overline{T}_{cp}$ (9-ый столбец таблицы).

Суммируя элементы 9-го столбца, получим $\overline{T}_{cp} = 1397$ часов.

ti	n(Δti)	Ni	Ni+1	P(t)	a(Δti)	λ(Δti)	tcpi	tcpi*n(Δti)
100	50	1000	950	0,95	0,0005	0,000513	50	2500
200	40	950	910	0,91	0,0004	0,00043	150	6000
300	32	910	878	0,878	0,00032	0,000358	250	8000
400	25	878	853	0,853	0,00025	0,000289	350	8750
500	20	853	833	0,833	0,0002	0,000237	450	9000
600	17	833	816	0,816	0,00017	0,000206	550	9350
700	16	816	800	0,8	0,00016	0,000198	650	10400
800	16	800	784	0,784	0,00016	0,000202	750	12000
900	15	784	769	0,769	0,00015	0,000193	850	12750
1000	14	769	755	0,755	0,00014	0,000184	950	13300
1100	15	755	740	0,74	0,00015	0,000201	1050	15750
1200	14	740	726	0,726	0,00014	0,000191	1150	16100
1300	14	726	712	0,712	0,00014	0,000195	1250	17500
1400	13	712	699	0,699	0,00013	0,000184	1350	17550
1500	14	699	685	0,685	0,00014	0,000202	1450	20300
1600	13	685	672	0,672	0,00013	0,000192	1550	20150
1700	13	672	659	0,659	0,00013	0,000195	1650	21450
1800	13	659	646	0,646	0,00013	0,000199	1750	22750
1900	14	646	632	0,632	0,00014	0,000219	1850	25900
2000	12	632	620	0,62	0,00012	0,000192	1950	23400
2100	12	620	608	0,608	0,00012	0,000195	2050	24600
2200	13	608	595	0,595	0,00013	0,000216	2150	27950
2300	12	595	583	0,583	0,00012	0,000204	2250	27000
2400	13	583	570	0,57	0,00013	0,000225	2350	30550
2500	14	570	556	0,556	0,00014	0,000249	2450	34300
2600	16	556	540	0,54	0,00016	0,000292	2550	40800
2700	20	540	520	0,52	0,0002	0,000377	2650	53000
2800	25	520	495	0,495	0,00025	0,000493	2750	68750
2900	30	495	465	0,465	0,0003	0,000625	2850	85500
3000	40	465	425	0,425	0,0004	0,000899	2950	118000

$N_{omk}=$ 575 Тср= 1397,13

Задачи для самостоятельной работы

№ 1.1. По результатам испытаний N_0=100 однотипных изделий для вариантов В1-В14 определить показатели безотказности для заданных наработок Δt_i, если известно, что число отказавших изделий $n(\Delta t_i)$ к моментам наработки составляет:

Δt_i	$n(\Delta t_i)$													
	В1	В2	В3	В4	В5	В6	В7	В8	В9	В10	В11	В12	В13	В14
0-100	3	4	5	6	7	8	9	10	11	3	4	5	2	6
100-150	8	9	10	11	12	13	14	15	16	8	9	10	7	9
150-200	13	14	15	16	17	18	19	20	21	13	14	15	9	15
200-250	16	17	18	19	20	21	22	23	24	18	19	20	15	18
250-300	20	21	22	23	24	25	26	27	28	23	24	25	25	29

Для каждого варианта В1-В14 построить графики расчетных показателей $\overline{P}(t), \overline{Q}(t), \overline{a}(t), \overline{\lambda}(t)$.

№ 1.2. На испытания поставлено 1000 однотипных элементов. За первые 500 часов отказало 35 элементов, за период 500-1500 часов – еще 50 элементов.

Определить:

- Интенсивность отказов элементов за каждый из периодов испытаний.
- Интенсивность отказов за все время испытаний.
- Среднюю наработку на отказ за все время испытаний.

1.3. Показатели надежности восстанавливаемых объектов

Наиболее важные показатели надежности *восстанавливаемых* объектов [7]:

- ***вероятность восстановления;***
- ***частота восстановления;***
- ***интенсивность восстановления;***
- ***среднее время восстановления;***
- ***параметр потока отказов;***
- ***коэффициент готовности;***
- ***коэффициент оперативной готовности.***

1.3.1. Вероятность восстановления

Вероятность восстановления (ВВ) $S(t)$ – вероятность того, что отказавшее изделие будет восстановлено в течение заданного времени t.

ВВ обладает такими свойствами:

$$0 \le S(t) \le 1, \qquad S(0) = 0, \quad S(\infty) = 1.$$

Статистическая оценка ВВ:

$$\overline{S}(t) = \frac{N_B}{N_{0B}}, \tag{1.17}$$

где N_{0B} - число изделий, поставленных на восстановление; N_B - число изделий, время восстановления которых было меньше заданного времени t.

1.3.2. Частота восстановления

Частота восстановления (ЧВ) – плотность распределения времени восстановления

$$a_B(t) = \frac{dS(t)}{dt}. \tag{1.18}$$

Статистическая оценка частоты восстановления

$$\overline{a}_B(t) = \frac{n_B(\Delta t)}{N_{0B} \cdot \Delta t}, \tag{1.19}$$

где $n_B(\Delta t)$ - число восстановленных изделий на интервале Δt.

1.3.3. Интенсивность восстановления

Интенсивность восстановления (ИВ) - условная плотность распределения времени восстановления для момента времени t при условии, что до этого момента восстановления изделия не произошло:

$$\mu(t) = \frac{a_B(t)}{1 - S(t)}. \tag{1.20}$$

Статистическая оценка интенсивности восстановления:

$$\overline{\mu}(t) = \frac{n_B(\Delta t)}{N_{B\,cp} \cdot \Delta t}, \tag{1.21}$$

где $N_{B\,cp}$ - среднее число изделий, которые были восстановлены в интервале Δt.

Между ИВ и ВВ существует следующая зависимость

$$S(t) = 1 - e^{-\int_0^t \mu(t)dt}. \tag{1.22}$$

Покажем это. Из (1.20) выразим ЧВ

$$a_B(t) = \mu(t)[1 - S(t)].$$

С учетом (1.18) последнее выражение перепишем в виде

$$\frac{dS(t)}{dt} = \mu(t)[1 - S(t)].$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dS(t)}{1 - S(t)} = \mu(t)dt.$$

Проинтегрируем последнее выражение слева и справа:

$$\int_0^t \frac{dS(t)}{1 - S(t)} = \int_0^t \mu(t)dt \quad \text{или} \quad \int_0^t \frac{dS(t)}{S(t) - 1} = -\int_0^t \mu(t)dt$$

С учетом того, что $\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x - 1| + C$, после интегрирования левой части получим

$$\ln[S(t) - 1]|_0^t = -\int_0^t \mu(t)dt \quad .$$

С учетом такого свойства ВВ, что $S(0) = 0$, раскроем левую часть последнего выражения:

$$\ln[S(t) - 1]|_0^t = \ln[S(t) - 1] - \ln[S(0) - 1] = \ln\frac{S(t) - 1}{-1} = \ln[1 - S(t)].$$

Теперь с учетом правой части получим

$$\ln[1 - S(t)] = -\int_0^t \mu(t)dt.$$

Откуда легко видеть, что $S(t) = 1 - e^{-\int_0^t \mu(t)dt}$.

В табл.1.2 приведены основные соотношения, устанавливающие связь между показателями надежности восстанавливаемых объектов.

Табл.1.2. *Связь между показателями надежности восстанавливаемых объектов*

	$S(t)$	$a_B(t)$	$\mu(t)$
$S(t)$	1	$\int_0^t a_B(t)dt$	$1 - e^{-\int_0^t \mu(t)dt}$
$a_B(t)$	$\frac{dS(t)}{dt}$	1	$\mu(t) \cdot e^{-\int_0^t \mu(t)dt}$
$\mu(t)$	$\frac{dS(t)}{dt} \cdot \frac{1}{1 - S(t)}$	$\frac{a_B(t)}{1 - \int_0^t a_B(t)dt}$	1

1.3.4. Среднее время восстановления

Среднее время восстановления представляет собой математическое ожидание времени восстановления

$$T_B = \int_0^{\infty} t a_B(t) dt . \tag{1.23}$$

С учетом того, что $a_B(t) = \dfrac{dS(t)}{dt}$:

$$T_B = \int_0^{\infty} t a_B(t) dt = \int_0^{\infty} t \frac{dS(t)}{dt} dt = \int_0^{\infty} t dS(t) = t \cdot S(t) |_0^{\infty} - \int_0^{\infty} S(t) dt.$$

Учитывая, что $S(0) = 0, \quad S(\infty) = 1$, получим

$$T_B = t - \int_0^{\infty} S(t) dt = \int_0^{\infty} [1 - S(t)] dt. \tag{1.24}$$

Статистическая оценка интенсивности восстановления:

$$\overline{T}_B = \frac{1}{N_{0B}} \sum_{i=1}^{N_{0B}} t_{iв} , \tag{1.25}$$

где t_{iB} - длительность восстановления i - го изделия.

1.3.5. Параметр потока отказов

Параметр потока отказов $\omega(t)$ или *средняя частота отказов* представляет собой математическое ожидание числа отказов за единицу времени.

Статистическая оценка

$$\overline{\omega}(t) = \frac{n_1(\Delta t)}{N_0 \cdot \Delta t} \quad , \tag{1.26}$$

где $n_1(\Delta t)$ - число изделий, отказавших в интервале времени Δt при условии, что отказавшее изделие немедленно заменяется исправным; N_0 - общее число изделий на момент $t = 0$.

Из (1.26) следует, что $n_1(\Delta t) = \overline{\omega}(t) \cdot N_0 \Delta t$. Причем $n_1(\Delta t) = n_3(\Delta t) + n_4(\Delta t)$,
где $n_3(\Delta t)$ - число отказавших изделий из поставленных в момент $t = 0$;
$n_4(\Delta t)$ - число отказавших изделий из поставленных в процессе испытаний.

Очевидно, что $n_3(\Delta t) = \overline{a}(t) \cdot N_0 \Delta t$.

Рассмотрим (рис.1.9) некоторый интервал ($\tau, \tau + \Delta\tau$), предшествующий Δt:

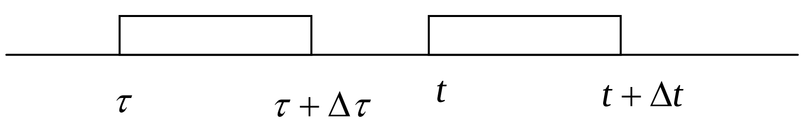


Рис.1.9. *Иллюстрация времени наблюдения.*

В течение этого интервала выйдет из строя $\overline{\omega}(\tau)\cdot N_0\Delta\tau$ изделий. Из числа замененных за время $\Delta\tau$ выйдет из строя $\left[\overline{\omega}(\tau)\cdot N_0\Delta\tau\right]\cdot a(t-\tau)\Delta t$ изделий.

Суммируя по промежуткам, получим

$$n_4(\Delta t) = N_0\Delta t\int_0^t \overline{\omega}(\tau)a(t-\tau)d\tau.$$

Вернемся к выражению (1.26). С учетом полученных выражений будем иметь:

$$\overline{\omega}(t) = \frac{n_1(\Delta t)}{N_0\cdot\Delta t} = \frac{n_3(\Delta t)+n_4(\Delta t)}{N_0\cdot\Delta t} = \overline{a}(t) + \int_0^t \overline{\omega}(\tau)a(t-\tau)d\tau\,.$$

Итак, параметр потока отказов $\omega(t)$ и частота отказов $a(t)$ связаны интегральным уравнением Вольтерра II рода:

$$\omega(t) = a(t) + \int_0^\infty \omega(\tau)a(t-\tau)d\tau\,. \qquad (1.27)$$

Поскольку по $a(t)$ можно получить практически все показатели надежности систем, последнее уравнение называют _основным уравнением_, связывающим показатели надежности невосстанавливаемых и восстанавливаемых систем.

Для определения свойств $\omega(t)$ используем преобразование Лапласа

$$a(s) = \int_0^\infty a(t)\cdot e^{-st}dt\ . \qquad (1.28)$$

В операторной форме $\begin{array}{l}\omega(t)\to\omega(s),\\ a(t)\to a(s)\end{array}$,

$$\int_0^\infty \omega(\tau)a(t-\tau)d\tau \to \omega(s)a(s)$$ - свертка функций

Тогда уравнение Вольтера II рода можно записать в виде $\omega(s) = a(s) + \omega(s)a(s)$,

откуда $$\omega(s) = \frac{a(s)}{1-a(s)}. \qquad (1.29)$$

Воспользуемся известным соотношением операционного исчисления

$$\lim_{t\to\infty}\omega(t) = \lim_{s\to 0} s\omega(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s\cdot a(s)}{1-a(s)} = \otimes\,.$$

Для раскрытия неопределенности типа $\frac{0}{0}$, воспользуемся правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\otimes = \lim_{s\to 0}\frac{a(s)+s\dfrac{da(s)}{ds}}{-\dfrac{da(s)}{ds}} = \oplus\oplus$$

Сначала найдем производную от $a(s)$ по s. Для этого воспользуемся формулой (1.28):

$$\frac{da(s)}{ds} = \int_0^{\infty} a(t)\cdot(-t)\cdot e^{-st}dt = -\int_0^{\infty} t\cdot a(t)e^{-st}dt\,.$$

Теперь

$$\oplus\oplus = \lim_{s\to 0}\frac{\int_0^{\infty} a(t)\cdot e^{-st}dt - s\int_0^{\infty} t\cdot a(t)\cdot e^{-st}dt}{+\int_0^{\infty} t\cdot a(t)\cdot e^{-st}dt} = \frac{\int_0^{\infty} a(t)dt}{\int_0^{\infty} t\cdot a(t)dt} = \frac{Q(t)\big|_0^{\infty}}{T_{cp}} = \frac{1-0}{T_{cp}} = \frac{1}{T_{cp}}\,.$$

Таким образом

$$\lim_{t\to\infty}\omega(t) = \frac{1}{T_{cp}} \quad \text{или}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\omega(t)} = T_{cp}\,. \tag{1.30}$$

Величина, обратная параметру потока отказов $\omega(t)$, (*средней частоте отказов),* при $t\to\infty$ равна среднему времени безотказной работы.

1.3.6. Коэффициент готовности

Коэффициентом готовности называется отношение времени исправной работы к сумме времени исправной работы и вынужденных простоев изделия, взятых за один календарный срок.

Статистическая оценка коэффициента готовности:

$$\overline{K}_{\text{г}} = \frac{t_p}{t_p + t_{\text{п}}}, \tag{1.31}$$

где $t_p = \sum_{i=1}^{n} t_{pi}$; $t_{\text{п}} = \sum_{i=1}^{n} t_{\text{п}i}$; t_{pi} - время работы изделия между $i-1$-м и i-м отказом; $t_{\text{п}i}$- время вынужденного простоя после i-го отказа; n- число отказов (ремонтов) изделия.

Для перехода к вероятностной трактовке величины t_p и $t_{\text{п}}$ заменяются математическими ожиданиями времени между соседними отказами и времени восстановления соответственно:

$$K_{\text{г}}(t) = \frac{t_{cp}}{t_{cp}+t_B}\,. \tag{1.32}$$

Коэффициентом вынужденного простоя называется отношение времени вынужденного простоя к сумме времени исправной работы и вынужденного простоя изделия:

$$\overline{K}_{п} = \frac{t_{п}}{t_p + t_{п}}. \tag{1.33}$$

В вероятностной форме по аналогии с $K_{г}(t)$:

$$K_{п}(t) = \frac{t_B}{t_{cp} + t_B}. \tag{1.34}$$

Коэффициент готовности и коэффициент вынужденного простоя связаны между собой зависимостью

$$K_{п}(t) = 1 - K_{г}(t). \tag{1.35}$$

Коэффициент оперативной готовности – вероятность того, что изделие будет работоспособно в произвольный момент времени t и безотказно проработает заданное время τ:

$$R(t,\tau) = K_{г}(t)P(\tau). \tag{1.36}$$

Статистическая оценка коэффициента оперативной готовности

$$\overline{R}(t,\tau) = \frac{N_i(\tau)}{N_0}, \tag{1.37}$$

где $N_i(\tau)$ - число изделий, исправных в момент t и безотказно проработавших в течение времени τ.

Контрольные вопросы:

1. Назовите показатели надежности восстанавливаемых систем.
2. Что такое вероятность восстановления?
3. Что такое частота восстановления?
4. Что такое интенсивность восстановления?
5. Что такое среднее время восстановления?
6. Что такое параметр потока отказов?
7. Что такое коэффициент готовности?
8. Что такое коэффициент оперативной готовности?
9. Как связаны между собой показатели надежности невосстанавливаемых и восстанавливаемых систем?
10. Как связаны между собой коэффициент готовности и коэффициент вынужденного простоя?

1.4. Математические модели теории надежности.

1.4.1. Общие понятия о моделях надежности

Для решения задач по оценке надежности и прогнозированию работоспособности объекта необходимо иметь математическую модель, которая представлена аналитическими выражениями одного из показателей $P(t)$, $a(t)$ или $\lambda(t)$.

Рассмотрим U – образную кривую для интенсивности отказов $\lambda(t)$ большинства невосстанавливаемых объектов (рис.1.5). Каждый из трех участков (приработки, нормальной эксплуатации и старения) имеет характерную зависимость $\lambda(t)$ и, следовательно, свою математическую модель.

Основной путь для получения модели состоит в проведении испытаний, вычислении статистических оценок и их аппроксимации аналитическими функциями.

Вид аналитической функции, описывающей изменение показателей надежности $P(t)$, $a(t)$ или $\lambda(t)$, определяет ***закон распределения случайной величины,*** который выбирается в зависимости от свойств объекта, его условий работы и характера отказов.

1.4.2. Статистическая обработка результатов испытаний и определение показателей надежности

Пусть в результате испытаний N_0 невосстанавливаемых одинаковых объектов получена статистическая выборка – массив наработки (в любых единицах измерения) до отказа каждого из N_0 испытанных объектов [16]. Такая выборка характеризует случайную величину наработки до отказа объекта $T = \{t\}$.

Необходимо выбрать закон распределения случайной величины T и проверить правильность выбора по соответствующему критерию.

Подбор закона распределения осуществляется на основе аппроксимации (сглаживания) экспериментальных данных о наработке до отказа, которые должны быть представлены в наиболее компактном графическом виде. Выбор той или иной аппроксимирующей функции носит характер гипотезы, которую выдвигает исследователь. Экспериментальные данные могут с большей или меньшей вероятностью подтверждать или не подтверждать справедливость той или иной гипотезы. Поэтому исследователь должен получить ответ на вопрос: согласуются ли результаты эксперимента с гипотезой о том, что случайная величина наработки подчинена выбранному им закону распределения? Ответ на этот вопрос дается в результате расчета специальных критериев.

Алгоритм обработки результатов и расчета показателей надежности

Формирование статистического ряда

При большом числе испытываемых объектов полученный массив наработок $\{t_1,...,t_i,...,t_n\}$ является громоздкой и мало наглядной формой записи случайной величины T.

Поэтому для компактности и наглядности выборка представляется в графическом изображении статистического ряда – гистограмме наработки до отказа. Для этого необходимо:

- установить интервал наработки $\left[t_{\min}, t_{\max}\right]$ и его длину $\varsigma t = t_{\max} - t_{\min}$, где $t_{\min} \le Min\{t_1,...,t_i,...,t_n\}$, $t_{\max} \ge Max\{t_1,...,t_i,...,t_n\}$;
- разбить интервал наработки $\left[t_{\min}, t_{\max}\right]$ на k интервалов равной ширины Δt – шаг гистограммы

$$\Delta t = \frac{\varsigma t}{k}, \quad \Delta t = t_{i+1} - t_i = t_i - t_{i-1};$$

- подсчитать частоты (вероятности) появления отказов во всех k интервалах:

$$\overline{P_1} = \frac{\Delta n(t_{\min}, t_1)}{N_0} = \frac{\Delta n(t_{\min}, t_{\min} + \Delta t)}{N_0};$$

$$\overline{P_2} = \frac{\Delta n(t_1, t_2)}{N_0} = \frac{\Delta n(t_1, t_1 + \Delta t)}{N_0};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overline{P_i} = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_i)}{N_0} = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_{i-1} + \Delta t)}{N_0},$$

где $\Delta n(t_{i-1}, t_{i-1} + \Delta t)$ – число объектов, отказавших в интервале $\left[t_{i-1}, t_{i-1} + \Delta t\right]$.

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{P_i} = 1;$$

- полученный статистический ряд представляется в виде гистограммы, которая строится следующим образом. По оси абсцисс t откладываются интервалы Δt, на каждом из которых, как на основании, строится прямоугольник, высота которого пропорциональна (в выбранном масштабе) соответствующей частоте $\overline{P_i}$. Возможный вид гистограммы приведен на рис. 1.10.

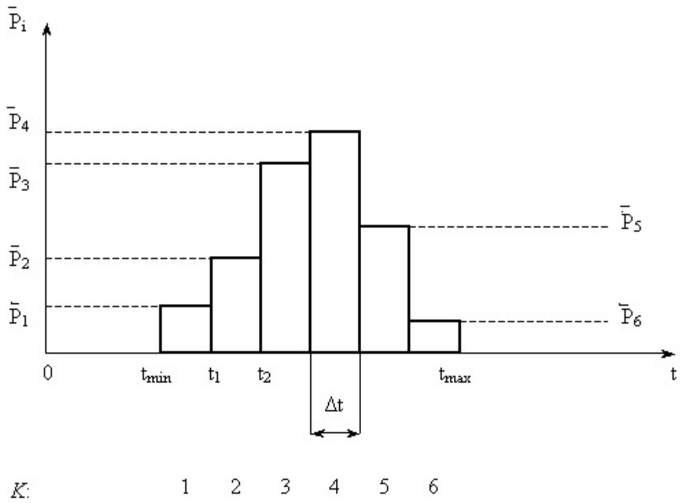


Рис. 1.10. *Гистограмма статистических оценок ВБР.*

Расчет эмпирических функций

Используя данные сформированного статистического ряда, определяются статистические оценки показателей надежности, т. е. эмпирические функции:

- *функция распределения отказов (оценка ВО)*

$$\overline{Q}(t_{\min}) = \frac{n(t_{\min})}{N_0} = 0;$$

$$\overline{Q}(t_1) = \frac{n(t_1)}{N_0} = \frac{\Delta n(t_{\min}, t_1)}{N_0} = \overline{P}_1;$$

$$\overline{Q}(t_2) = \frac{n(t_2)}{N_0} = \frac{\Delta n(t_{\min,} t_1) + \Delta n(t_1, t_2)}{N_0} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2;$$

....

$$\overline{Q}(t_{\max}) = \frac{n(t_{\max})}{N_0} = \sum_1^k \overline{P}_i = 1$$

- *функция надежности (оценка ВБР)*

$$\overline{P}(t_{\min}) = 1 - \overline{Q}(t_{\min}) = 1;$$

....

$$\overline{P}(t_{\max}) = 1 - \overline{Q}(t_{\max}) = 0;$$

На рис. 1.11-1.13 приведены соответственно графики статистических оценок $\overline{Q}(t), \overline{a}(t), \overline{\lambda}(t)$.

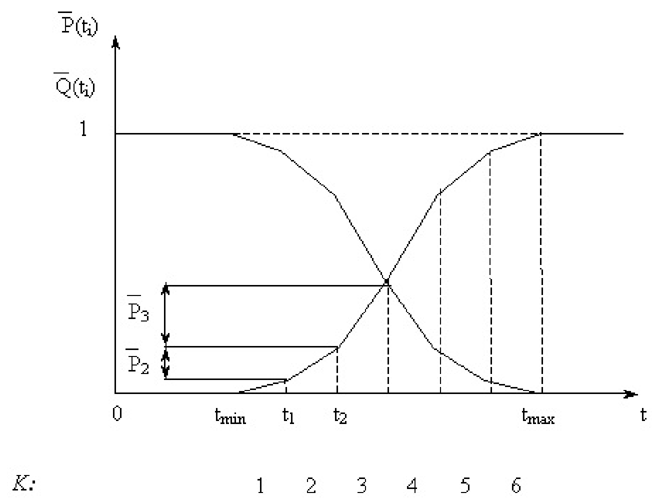


Рис. 1.11. *Графики статистических оценок ВБР и ВО.*

- *плотность распределения отказов (оценка ПРО):*

$$\overline{a}(t_1) = \frac{\Delta n(t_{\min}, t_1)}{N_0 \cdot \Delta t} = \frac{\overline{P}_1}{\Delta t};$$

$$\overline{a}(t_2) = \frac{\Delta n(t_1, t_2)}{N_0 \cdot \Delta t} = \frac{\overline{P}_2}{\Delta t};$$

....

$$\overline{a}(t_i) = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_i)}{N_0 \cdot \Delta t} = \frac{\overline{P}_i}{\Delta t};$$

- *интенсивность отказов (оценка ИО):*

$$\overline{\lambda}(t_1) = \frac{\Delta n(t_{\min}, t_1)}{N(t_1)\cdot \Delta t} = \frac{\Delta n(t_{\min}, t_1)}{\left[N_0 - n(t_1)\right]\cdot \Delta t};$$

$$\overline{\lambda}(t_2) = \frac{\Delta n(t_1, t_2)}{N(t_2)\cdot \Delta t} = \frac{\Delta n(t_1, t_2)}{\left[N_0 - n(t_2)\right]\cdot \Delta t};$$

…………………………………………………..

$$\overline{\lambda}(t_i) = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_i)}{N(t_i)\cdot \Delta t} = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_i)}{\left[N_0 - n(t_i)\right]\cdot \Delta t}.$$

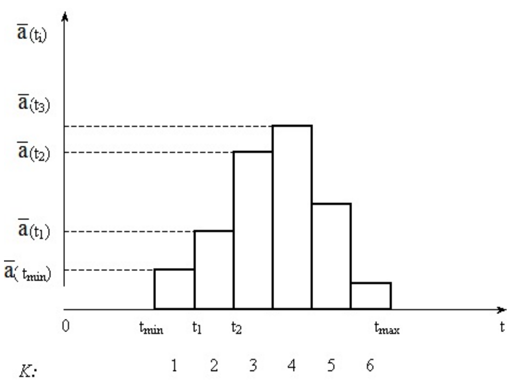


Рис. 1.12. *Статистические оценки ПРО.*

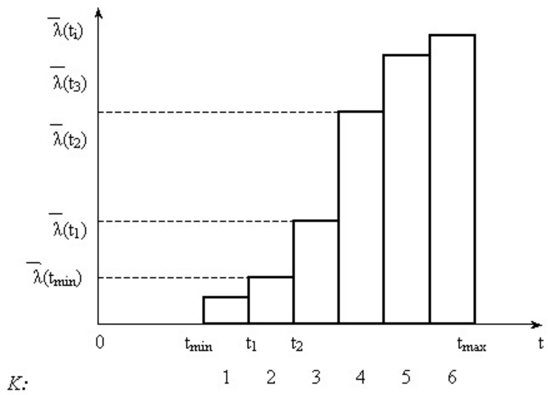


Рис. 1.13. *Статистические оценки ИО.*

Здесь $N(t_i)$ - число исправно работающих объектов в момент t_i.

Правила построения графиков ясны из приведенных выше расчетных формул. Каждый из графиков имеет свой масштаб.

Расчет статистических оценок числовых характеристик

Для расчета статистических оценок числовых характеристик можно воспользоваться данными сформированного статистического ряда.

Определяются такие оценки:

- *оценка средней наработки до отказа (статистическое среднее наработки):*

$$\overline{T}_{cp} = \sum_{1}^{k} \tilde{t}_i \cdot \overline{P}_i;$$

- *оценка дисперсии наработки до отказа (эмпирическая дисперсия наработки):*

$$\overline{D} = \sum_{1}^{k} \left(\tilde{t}_i - \overline{T}_{cp}\right)^2 \cdot \overline{P}_i;$$

где $\tilde{t}_i = t_i + \dfrac{\Delta t}{2} = t_{i+1} - \dfrac{\Delta t}{2}$ – середина i-го интервала наработки, т. е. среднее значение наработки в интервале.

Оценка СКО $\overline{D} = \overline{\sigma}^2$.

Целесообразно рассчитать оценки и некоторых вспомогательных характеристик рассеивания случайной величины *T*:

- *выборочный коэффициент асимметрии наработки до отказа*

$$A = \sum_{1}^{k} \left(\tilde{t}_i - \overline{T}_{cp}\right)^3 \frac{\overline{P}_i}{\overline{\sigma}^3},$$

- *выборочный эксцесс наработки до отказа*

$$E = \left[\sum_{1}^{k} \left(\tilde{t}_i - \overline{T}_{cp}\right)^4 \frac{\overline{P}_i}{\overline{\sigma}^4} \right] - 3.$$

Эти характеристики используются для выбора аппроксимирующей функции.

Так коэффициент асимметрии является характеристикой «скошенности» распределения, например, если распределение симметрично относительно МО, то $A = 0$.

На рис. 1.14,а распределение $a_2(t)$ имеет положительную асимметрию $A > 0$, а $a_3(t)$ – отрицательную $A < 0$.

Эксцесс характеризует «крутость» (остро- или плосковершинность) распределения.

Для нормального распределения $E = 0$.

Кривые $a(t)$, более островершинные по сравнению с нормальной, имеют $E > 0$, а наоборот – более плосковершинные, $E < 0$ (рис.1.14, б).

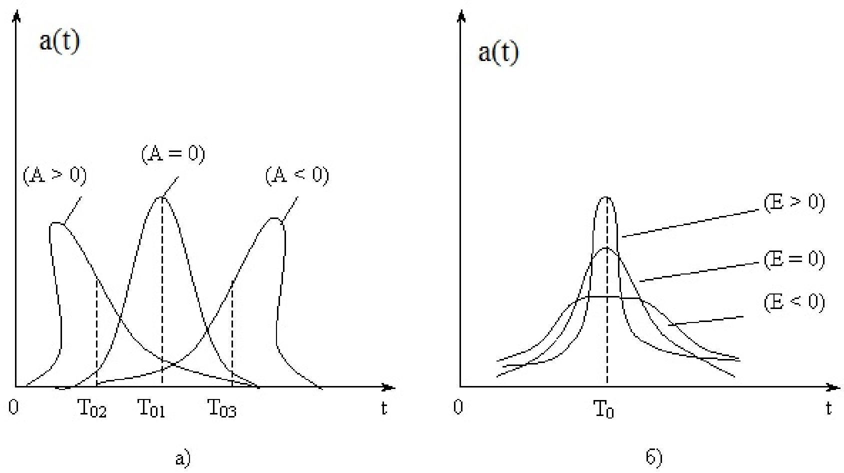


Рис. 1.14. *Выбор закона распределения*

Выбор закона распределения состоит в подборе аналитической функции, наилучшим образом аппроксимирующей эмпирические функции надежности.

Выбор, в значительной мере, процедура неопределенная и во многом субъективная, при этом многое зависит от априорных знаний об объекте и его свойствах, условиях работы, а также анализа вида графиков $\overline{P}(t)$, $\overline{a}(t)$ или $\overline{\lambda}(t)$.

Очевидно, что выбор распределения будет зависеть, прежде всего, от вида эмпирической функции ПРО $\overline{a}(t)$, а также от вида - $\overline{\lambda}(t)$. Итак, выбор закона распределения носит характер принятия той или иной гипотезы.

Предположим, что по тем или иным соображениям, выбран гипотетический закон распределения, заданный теоретической ПРО

$$a(t) = \Psi(t, a, b, c, ...),$$

где $a, b, c, ...$ - неизвестные параметры распределения.

Требуется подобрать эти параметры так, чтобы функция $a(t)$ наилучшим образом сглаживала ступенчатый график $\overline{a}(t)$. При этом используется следующий прием: параметры $a,b,c,...$ выбираются с таким расчетом, чтобы несколько важнейших числовых характеристик теоретического распределения были равны соответствующим статистическим оценкам.

На графике вместе с $\overline{a}(t)$ строится теоретическая ПРО $a(t)$, что позволяет визуально оценить результаты аппроксимации между $\overline{a}(t)$ и $a(t)$. Поскольку эти расхождения неизбежны, то возникает вопрос: объясняются ли они случайными обстоятельствами, связанными с тем, что теоретическое распределение выбрано ошибочным?

Ответ на этот вопрос дает расчет критерия согласия.

1.4.3. Расчет критерия согласия

Критерий согласия – это критерий проверки гипотезы о том, что случайная величина Т, представленная своей выборкой, имеет распределение предполагаемого типа.

Проверка состоит в следующем. Рассчитывается критерий, как некоторая мера расхождения теоретического и эмпирического распределений, причем эта мера является случайной величиной.

Чем больше мера расхождения, тем хуже согласованность эмпирического распределения с теоретическим, и гипотезу о выборе закона распределения следует отвергнуть, как мало правдоподобную.

В противном случае – экспериментальные данные не противоречат принятому распределению.

Из известных критериев наиболее применяемый критерий согласия χ^2(хи-квадрат) Пирсона.

Проверка согласованности распределений по критерию χ^2 производится следующим образом:

- рассчитывается критерий χ^2 (мера расхождения)

$$\chi^2 = N_0 \sum_1^k \frac{\left(\overline{P_i} - P_i\right)^2}{P_i},$$

где $P_i = a(\tilde{t}_i)\Delta t$ – теоретическая частота (вероятность) попадания случайной величины в интервал $[t_i, t_i + \Delta t]$;

- определяется «число степеней свободы» $R = k - L$,

где L – число независимых условий, наложенных на частоты $\overline{P_i}$, например:

а) условие $\sum \overline{P_i} = 1$;

б) условие совпадения $\sum \tilde{t}_i \cdot \overline{P_i} = T_{cp}$;

в) условие совпадения $\sum (\tilde{t}_i - \overline{T}_{cp})^2 \cdot \overline{P_i} = D$ и т. д.

Чаще всего $L = 3$. Чем больше число степеней свободы, тем больше случайная величина χ^2 подчиняется распределению Пирсона;

- по рассчитанным χ^2 и R определяется вероятность P того, что величина, имеющая распределение Пирсона с R степенями свободы, превзойдет рассчитанное значение χ^2.

Ответ на вопрос: насколько мала должна быть вероятность P, чтобы отбросить гипотезу о выборе того или иного закона распределения – во многом неопределенный.

На практике, если $P < 0{,}1$, то рекомендуется подыскать другой закон распределения.

В целом, с помощью критерия согласия, можно опровергнуть выбранную гипотезу, если же P достаточно велика, то это не может служить доказательством правильности гипотезы, а указывает лишь на то, что гипотеза не противоречит данным эксперимента.

1.5. Законы распределения наработки до отказа

Вид аналитической функции, описывающей изменение показателей надежности $P(t)$, $a(t)$ или $\lambda(t)$, определяет ***закон распределения случайной величины,*** который выбирается в зависимости от свойств объекта, его условий работы и характера отказов.

Наиболее распространенными являются следующие законы распределения [7,16]:

1. Экспоненциальное распределение;
2. Распределение Релея;
3. Распределение Вейбулла;
4. Классическое нормальное распределение (нормальный закон распределения наработки до отказа);
5. Логарифмически нормальное распределение;
6. Гамма–распределение;

1.5.1. Экспоненциальное распределение

Экспоненциальное распределение описывает наработку до отказа объектов, которые прошли период приработки и работают только на участке с $\lambda(t) = \lambda = const$. Круг таких объектов широк: сложные технические системы с множеством компонентов, средства вычислительной техники и системы автоматического регулирования и т. п. Экспоненциальное распределение широко применяется для оценки надежности энергетических объектов.

Считается, что случайная величина наработки объекта до отказа подчинена экспоненциальному распределению, если ВБР описывается выражением:

$$P(t) = e^{-\lambda t}, \tag{1.38}$$

Остальные показатели безотказности при известной $P(t)$, определяются:

вероятность отказа (ВО): $Q(t) = 1 - e^{-\lambda t}$; (1.39)

частота отказов или ПРО: $a(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. (1.40)

Средняя наработка (МО наработки) до отказа определяется выражением

$$T_{cp} = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{(-\lambda)} e^{-\lambda t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}. \tag{1.41}$$

Графики изменения показателей безотказности при экспоненциальном распределении приведены на рис. 1.15.

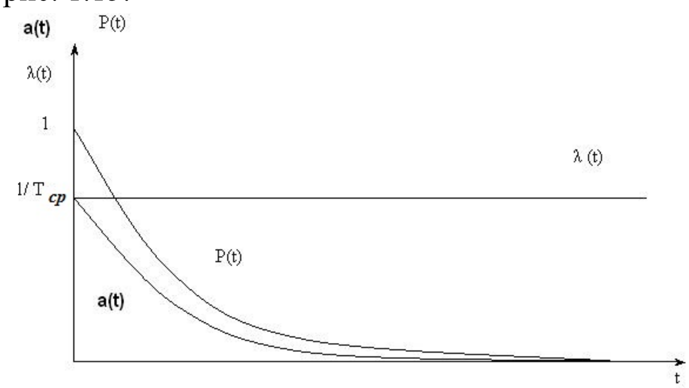


Рис. 1.15. *Графики изменения показателей безотказности при экспоненциальном распределении.*

Следует отметить, что при $\lambda t << 1$, т. е. при наработке t много меньшей, чем средняя наработка T_{cp} выражения (1.38) – (1.41) можно упростить, заменив $e^{-\lambda t}$ двумя первыми членами разложения $e^{-\lambda t}$ в степенной ряд.

Например, выражение для ВБР примет вид:

$$P(t) = e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \frac{(\lambda t)^3}{3!} + ... \approx 1 - \lambda t\,. \qquad (1.42)$$

1.5.2. Распределение Рэлея

Считается, что случайная величина наработки объекта до отказа подчинена распределению Рэлея, если ВБР описывается выражением:

$$P(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma_m^2}},$$

где σ_m - параметр распределения – мода распределения (не путать с СКО).

Вероятность отказа

$$Q(t) = 1 - P(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2\sigma_m^2}}.$$

Частота отказа

$$a(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{1}{2\sigma_m^2} \cdot 2t \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma_m^2}} = \frac{t}{\sigma_m^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_m^2}}.$$

Интенсивность отказа

$$\lambda(t) = \frac{t}{\sigma_m^2}.$$

Графики изменения показателей безотказности при распределении Рэлея приведены на рис. 1.16.

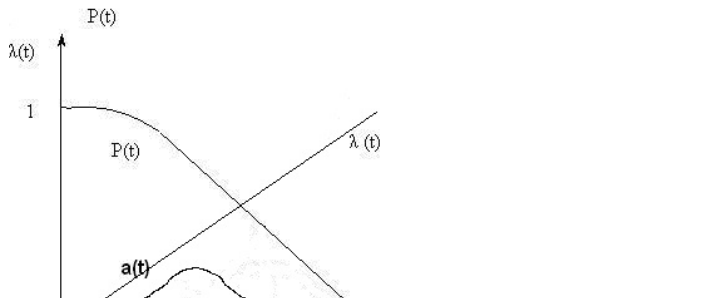


Рис.1.16. *Графики изменения показателей безотказности при распределении Рэлея.*

1.5.3. Распределение Вейбулла

В этом случае ВБР описывается выражением:

$$P(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}},$$

где α - масштабный коэффициент; β - параметр формы; γ - параметр положения.

Если отказы начинаются сразу при начале эксплуатации изделия, то есть при $t = 0$, тогда полагают $\gamma = 0$. ВБР и другие показатели надежности теперь принимают вид

$$P(t) = e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}};$$

$$Q(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}};$$

$$a(t) = \frac{\beta}{t}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}};$$

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}.$$

1.5.4. Классическое нормальное распределение (нормальный закон распределения наработки до отказа)

Нормальное распределение или распределение Гаусса является наиболее универсальным, удобным и широко применяемым [16]. Оно характеризует этап накопления повреждений при износе и старении.

Считается, что наработка подчинена нормальному распределению (нормально распределена), если плотность распределения отказов или частота отказов описывается выражением:

$$a(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-T_{cp})^2}{2\sigma^2}}, \qquad (1.43)$$

где T_{cp} и σ –средняя наработка и СКО между соседними отказами.

Вероятность отказа и безотказной работы, соответственно:

$$Q(t) = \int_0^t a(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(t-T_{cp})^2}{2\sigma^2}} dt;$$

$$P(t) = 1 - Q(t) = 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(t-T_{cp})^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Интенсивность отказа

$$\lambda(t) = \frac{a(t)}{P(t)} = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-T_{cp})^2}{2\sigma^2}}}{1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(t-T_{cp})^2}{2\sigma^2}} dt}.$$

Графики изменения показателей безотказности при нормальном распределении приведены на рис. 1.17.

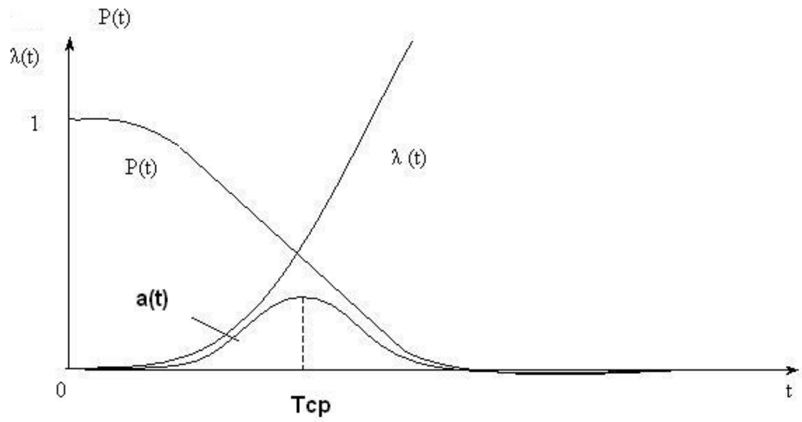


Рис. 1.17. *Графики изменения показателей безотказности при нормальном распределении*

Выясним смысл параметров T_{cp} и σ нормального распределения. Из графика $a(t)$ видно, что T_{cp} является центром симметрии распределения, поскольку при изменении знака разности $t - T_{cp}$ выражение (1.43) не меняется. При $t = T_{cp}$ ПРО достигает своего максимума

$$a_{\max}(t)|_{t=T_{cp}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

При сдвиге T_{cp} влево/вправо по оси абсцисс, кривая $a(t)$ смещается в ту же сторону, не изменяя своей формы. Таким образом, T_{cp} является центром рассеивания случайной величины *T*, т. е. МО.

Параметр σ характеризует форму кривой $a(t)$, т. е. рассеивание случайной величины *T*. Кривая ПРО $a(t)$ тем выше и острее, чем меньше σ.

Изменение графиков *P(t)* и $\lambda(t)$ при различных СКО наработок (*S1 < S2 < S3,* где $S_1 = \sigma_1$, $S_2 = \sigma_2$, $S_3 = \sigma_3$) и T_{cp} = *const* приведено на рис. 1.18.

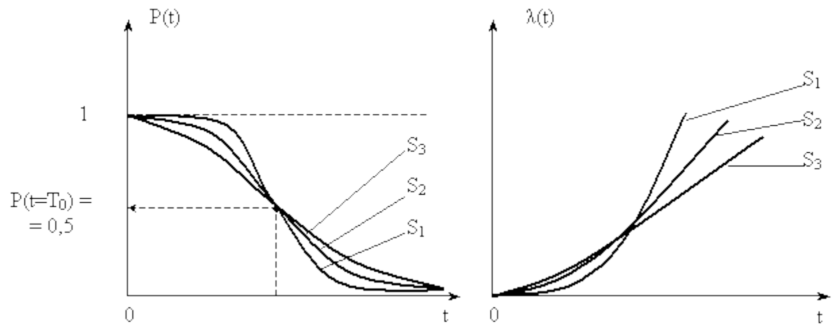


Рис. 1.18. *Изменение графиков P(t) и* $\lambda(t)$ *при различных СКО наработок*

Используя полученные ранее соотношения между показателями надежности, можно было бы записать выражения для $P(t)$; $Q(t)$ и $\lambda(t)$ по известному выражению (1.7) для $a(t)$. Из-за громоздкости этих интегральных выражений для практического расчета показателей надежности вычисление интегралов заменяют использованием таблиц.

С этой целью перейдем от случайной величины t к центрированной и нормированной случайной величине

$$x = \frac{t - T_{cp}}{\sigma}, \tag{1.44}$$

распределенной нормально с параметрами, соответственно, МО и СКО $M\{X\} = 0$ и $\sigma\{X\} = 1$ и плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{1.45}$$

Выражение (1.45) описывает плотность так называемого нормированного нормального распределения (рис. 1.19).

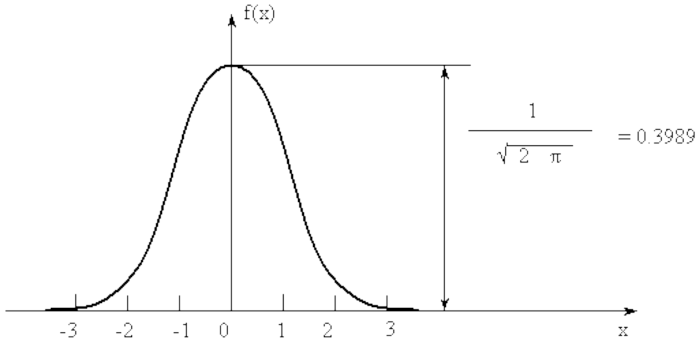


Рис. 1.19. *Плотность нормированного нормального распределения*

Функция распределения случайной величины X запишется в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \tag{1.46}$$

а из симметрии кривой $f(x)$ относительно МО $M\{X\} = 0$, следует, что $f(-x) = f(x)$. В справочной литературе приведены расчетные значения функций $f(x)$ и $F(x)$ для различных $x = \frac{t - T_{cp}}{\sigma}$.

Показатели безотказности объекта через табличные значения $f(x)$ и $F(x)$ определяются следующими выражениями $(\sigma = 1)$:

Частота отказов или ПРО $a(t) = f(x)$. (1.47)

Вероятность отказа $Q(t) = F(x)$. (1.48)

ВБР $P(t) = 1 - F(x)$. (1.49)

Интенсивность отказа $\lambda(t) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$. (1.50)

В практических расчетах часто вместо функции $F(x)$ пользуются функцией Лапласа, представляющей распределение положительных значений случайной величины X в виде:

$$\Phi(x)=\int_0^x f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx. \tag{1.51}$$

Покажем, что *F(x)* связана с $\Phi(x)$ следующим образом:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_0^x f(x)dx=0{,}5+\Phi(x). \tag{1.52}$$

Действительно, так как все значения случайной величины образуют полную группу (сумма всех вероятностей равна 1), то $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$.

В то же время $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_0^{\infty} f(x)dx=1$.

Следовательно, в силу симметрии $f(x)$ первый интеграл $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx=0{,}5$.

Показатели надежности объекта можно определить через $\Phi(x)$, используя выражения (1.47) – (1.50) и (1.52):

Вероятность отказа $Q(t)=0{,}5+\Phi(x)$. (1.53)

ВБР $P(t)=0{,}5-\Phi(x)$. (1.54)

Интенсивность отказа $\lambda(t)=\dfrac{f(x)}{0{,}5-\Phi(x)}$. (1.55)

1.5.5. Логарифмически нормальное распределение

При логарифмически нормальном распределении нормально распределенным является логарифм ($\lg t$) случайной величины T, а не сама эта величина.

Логарифмически нормальное распределение во многом более точно, чем нормальное описывает наработку до отказа тех объектов, у которых отказ возникает вследствие усталости, например, подшипников качения, электронных ламп и пр.

Если величина $\lg t$ имеет нормальное распределение с параметрами: МО U и СКО V, то величина считается логарифмически нормально распределенной с ПРО, описываемой:

$$a(t)=\frac{1}{Vt\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\lg t-U)^2}{2V^2}}. \tag{1.56}$$

Параметры U и V по результатам испытаний принимаются равными:

$$U\approx\overline{U}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\lg t_i; \tag{1.57}$$

$$V\approx\overline{V}=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\lg t_i-\overline{U})^2}, \tag{1.58}$$

где $\overline{U}$ и $\overline{V}$ - оценки параметров U и V.

Показатели надежности можно рассчитать по приведенным выше выражениям, пользуясь табулированными функциями $f(x)$ и, соответственно, $F(x)$ и $\Phi(x)$ для нормального распределения при $x = \dfrac{\lg t - U}{V}$.

Графики изменения показателей надежности при логарифмически нормальном распределении приведены на рис. 1.20.

Средняя наработка (МО наработки) до отказа

$$T_{cp} = e^{U + \frac{V^2}{2}}. \tag{1.59}$$

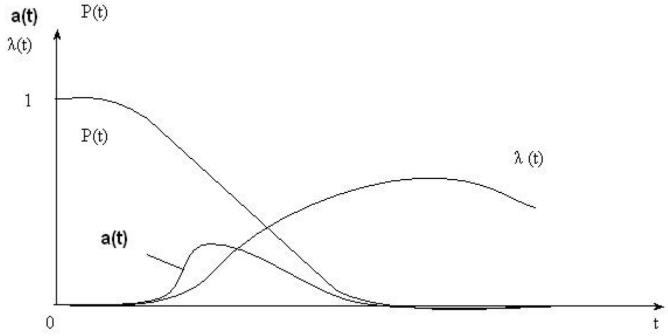


Рис. 1.20. *Графики изменения показателей надежности при логарифмически нормальном распределении*

1.5.6. Гамма–распределение

Случайная величина наработки до отказа T имеет гамма-распределение с параметрами α (масштабный параметр) и β (параметр формы), где α, $\beta > 0$, причем β – целое число, если ее ПРО описывается выражением:

$$a(t) = \frac{\alpha^{\beta} t^{\beta - 1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha t}, \tag{1.60}$$

где $\Gamma(\beta) = (\beta - 1)!$ – гамма-функция Эйлера.

Очевидно, что при β=1 выражение (1.60) упрощается до вида (1.40), соответствующего экспоненциальному распределению (при $\alpha = \lambda$).

Гамма-распределение наиболее хорошо описывает распределение суммы независимых случайных величин, каждая из которых распределена по экспоненциальному закону.

При больших β гамма-распределение сходится к нормальному распределению с параметрами: $T_{cp} = \beta \cdot \alpha$, $\sigma = \beta \cdot \alpha^2$.

Графики изменения показателей надежности при гамма-распределении приведены на рис. 1.21.

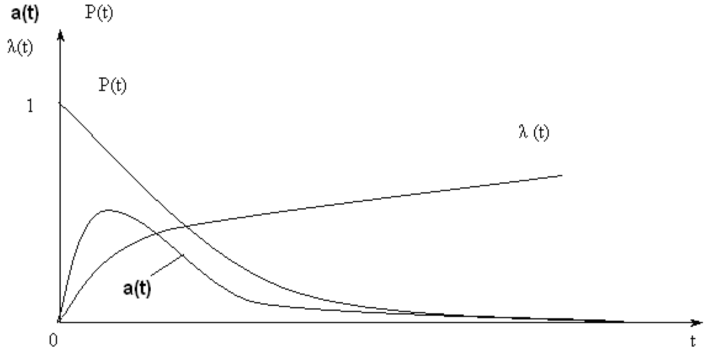


Рис. 1.21. *Графики изменения показателей надежности при гамма-распределении*

Средняя наработка (МО наработки) до отказа

$$T_{cp} = \frac{\beta}{\alpha} \tag{1.61}$$

Используется для характеристики отказов, которые возникают на этапе приработки и отладки.

Контрольные вопросы:

1. Для каких отказов используется экспоненциальное распределение?
2. Для каких отказов используется распределение Релея?
3. Для каких отказов используется распределение Вейбулла?
4. Для каких отказов используется классическое нормальное распределение?

1.6. Расчет надежности систем

До сих пор мы говорили о надежности отдельных элементов или изделия, объекта. Рассмотренные при этом показатели надежности были показателями надежности отдельных элементов (изделий, объектов).

Система представляет собой набор элементов, соединенных между собой строго определенными связями.

В курсе теоретической механики мы вначале изучали динамику точки, а потом переходили к изучению динамики системы. Это имело формальный характер – при изучении системы в формулах добавлялся знак суммы.

Другое дело мы имеем при расчетах надежности. Здесь играет большую роль ***структура системы*** и логическая связь между элементами системы [16].

Структура системы – логическая схема взаимодействия элементов, определяющая работоспособность системы, или иначе, графическое отображение элементов системы, позволяющее однозначно определить состояние системы (работоспособное или неработоспособное) по состоянию элементов.

Для одних и тех же систем могут быть составлены различные структурные схемы надежности в зависимости от вида отказов элементов.

Структурная схема расчета надежности, как правило, отличается от электрической схемы, а в ряде случаев может отличаться и от функциональной.

- Рассмотрим параллельное соединение двух диодов:

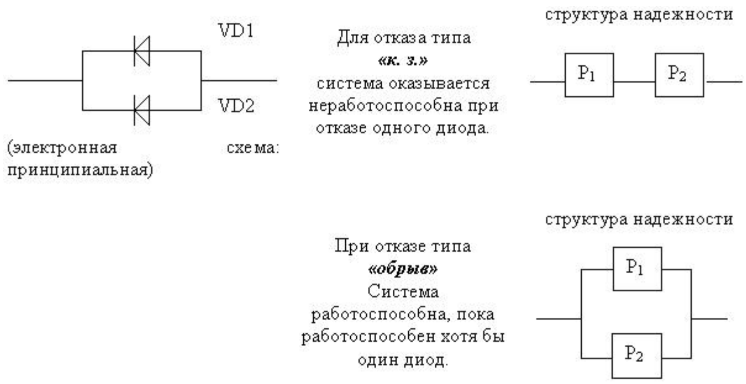


Рис.1.22. *Структурная схема расчета надежности для параллельного соединения двух диодов*

- Рассмотрим параллельное соединение двух конденсаторов.

Основным видом отказа здесь является пробой конденсатора – отказ типа «короткое замыкание». Отказ схемы произойдет при отказе любого элемента. Схема для расчета надежности будет представлять последовательное соединение двух элементов.

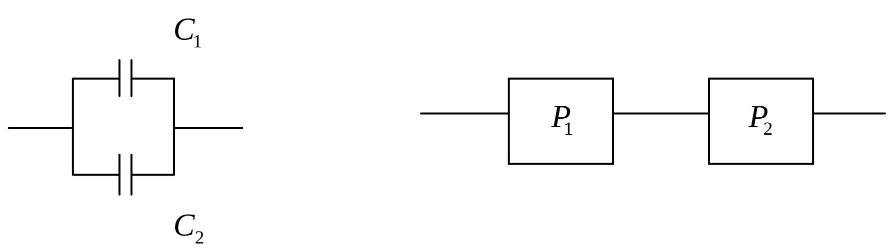


Рис.1.23. *Структурная схема расчета надежности для параллельного соединения двух конденсаторов.*

- Рассмотрим последовательное соединение двух конденсаторов.

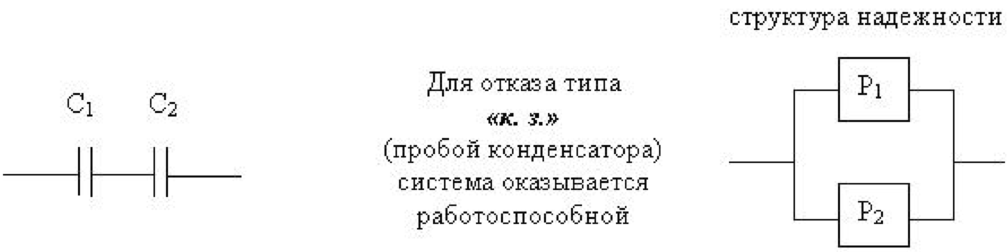


Рис.1.24. *Структурная схема расчета надежности для последовательного соединения двух конденсаторов.*

По структуре системы могут быть:

- без резервирования (**основная система**);
- с резервированием.

1.6.1. Надежность основной системы

Основные системы (ОС) являются простейшими техническими системами, в которых отказ одного элемента приводит к отказу всей системы.

Структура ОС - последовательное соединение элементов надежности (рис.1.25).

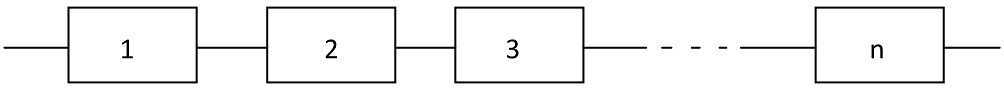


Рис.1.25. *Структурная схема расчета надежности основной системы.*

Работоспособность ОС обеспечивается при условии, когда все n элементов системы находятся в работоспособном состоянии.

Поскольку события, заключающиеся в работоспособности элементов системы, являются независимыми, то вероятность безотказной работы (***ВБР***) ОС и вероятность отказа ОС определяются соответственно

$$P_c(t) = P_1(t) \cdot P_2(t) \cdot \ldots \cdot P_n(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t); \quad (1.62)$$

$$Q_c(t) = 1 - P_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P_i(t). \quad (1.63)$$

Из формулы (1.62) следует, что т.к. $P_i(t) < 1$, то надежность системы быстро убывает с увеличением числа элементов системы, а общая ВБР не превышает ВБР наименее надежного элемента: $P_c(t) \le \min\limits_i \{P_i(t)\}$.

Иными словами, чем проще система, тем она надежнее.

Поскольку согласно уравнению связи основных показателей надежности

$$P_i(t) = e^{-\int_0^t \lambda_i(t)dt}, \quad (1.64)$$

то выражение (1.62) можно записать в виде

$$P_c(t)=\prod_{i=1}^{n} e^{-\int_0^t \lambda_i(t)dt}=e^{-\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \lambda_i(t)dt}. \tag{1.65}$$

Последняя формула – наиболее общее выражение для ВБР основной системы при любом законе изменения интенсивности отказов во времени.

На участке нормальной эксплуатации ВБР можно описать ***экспоненциальным*** распределением каждого элемента

$$P_i(t)=e^{-\lambda_i t}, \tag{1.66}$$

где $\lambda_i = const$, то ВБР ОС

$$P_c(t)=\prod_{i=1}^{n} P_i(t)=\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t}=e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t}. \tag{1.67}$$

Полагая ВБР любого объекта, в том числе и системы, подчиняющимся экспоненциальному закону

$$P_c(t)=e^{-\lambda_c t}, \tag{1.68}$$

приравняв выражения (1.67) и (1.68), получаем, что **интенсивность отказов (ИО) ОС равна сумме ИО элементов:**

$$\lambda_c=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i. \tag{1.69}$$

Итак, ИО системы равна:

$$\lambda_c=\lambda_1(t)+...+\lambda_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t). \tag{1.70}$$

Частота отказа или ПРО

$$a_c(t)=-\frac{dP_c(t)}{dt}=\lambda_c e^{-\lambda_c t}.$$

Получим выражения для средней наработки до отказа системы :

$$T_{cp}=\int_0^\infty P_c(t)dt=\int_0^\infty e^{-\lambda_c t}dt=-\frac{1}{\lambda_c}e^{-\lambda_c t}\Big|_0^\infty=-\frac{1}{\lambda_c}(e^{-\infty}-e^0)=-\frac{1}{\lambda_c}(0-1)=\frac{1}{\lambda_c}.$$

Итак $$T_{cp}=\frac{1}{\lambda_c}. \tag{1.71}$$

Таким образом, при экспоненциальной наработке до отказа каждого из n элементов, распределение наработки до отказа ОС также подчиняется экспоненциальному распределению.

Выражение (1.71) можно представить в виде

$$T_{cp}=\frac{1}{\lambda_c}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T_{cp_i}}}. \tag{1.72}$$

Здесь T_{cp_i} - средняя наработка i -го элемента основной системы.

При ***<u>идентичных</u>*** элементах ОС $P_1(t) = P_2(t) = ... = P_n(t) = P(t)$:

ВБР: $P_c(t) = P^n(t)$, (1.73)

ВО: $Q_c(t) = 1 - P^n(t)$, (1.74)

ИО: для элементов $\lambda_1(t) = ... = \lambda_n(t) = \lambda$,

для системы $$\lambda_c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) = n \cdot \lambda. \qquad (1.75)$$

Тогда ВБР и ВО системы примут вид

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t} = e^{-n\lambda t}; \qquad (1.76)$$

$$Q_c(t) = 1 - e^{-n\lambda t}. \qquad (1.77)$$

Теперь частота отказа или ПРО

$$a_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} = n\lambda e^{-n\lambda t}. \qquad (1.78)$$

Получим выражения для средней наработки до отказа системы:

$$T_{cp} = \int_0^\infty P_c(t)dt = \int_0^\infty e^{-n\lambda t}dt = -\frac{1}{n\lambda}e^{-n\lambda t}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{n\lambda}(e^{-\infty} - e^0) = -\frac{1}{n\lambda}(0-1) = \frac{1}{n\lambda}.$$

Или $$T_{cp} = \frac{1}{n\lambda} = \frac{1}{n\frac{1}{T_0}} = \frac{T_0}{n}. \qquad (1.79)$$

Здесь T_0 - средняя наработка элемента основной системы.

Итак, при *экспоненциальном распределении наработки до отказа* каждого из n элементов ОС $P_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, где $\lambda_i = const$, показатели безотказности ОС можно показать в табл.1.3:

Табл. 1.3. *Показатели безотказности ОС*

	Неидентичные элементы $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq ... \neq \lambda_n$	*Идентичные элементы* $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \lambda$
ВБР:	$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t) = e^{-\lambda_c t}$	$P_c(t) = P^n(t) = e^{-n\lambda t}$
ВО:	$Q_c(t) = 1 - e^{-\lambda_c t}$	$Q_c(t) = 1 - e^{-n\lambda t}$
ИО:	$\lambda_c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$	$\lambda_c = n \cdot \lambda$
ПРО:	$a_c(t) = \lambda_c e^{-\lambda_c t}$	$a_c(t) = n\lambda e^{-n\lambda t}$

Средняя наработка до отказа:	$T_{cp} = \dfrac{1}{\lambda_c}$	$T_{cp} = \dfrac{1}{n\lambda}$

Для ОС надежность всей системы меньше надежности каждого из элементов.

С увеличением числа элементов надежность ОС уменьшается.

Например, при $n = 1000$ и $P_i(t) = 0{,}99$ получим $P_c(t) < 10^{-4}$ и средняя наработка до отказа системы в 1000 раз меньше средней наработки каждого из элементов.

1.6.2. Системы с резервированием

Работоспособность систем без резервирования требует работоспособности всех элементов системы. В сложных технических устройствах без резервирования никогда не удается достичь высокой надежности даже, если использовать элементы с высокими показателями безотказности.

Система с резервированием – это система с избыточностью элементов, т. е. с резервными составляющими, избыточными по отношению к минимально необходимой (основной) структуре и выполняющими те же функции, что и основные элементы.

В системах с резервированием работоспособность обеспечивается до тех пор, пока для замены отказавших основных элементов в наличии имеются резервные.

Виды систем с резервированием изображены на рис.1.26.

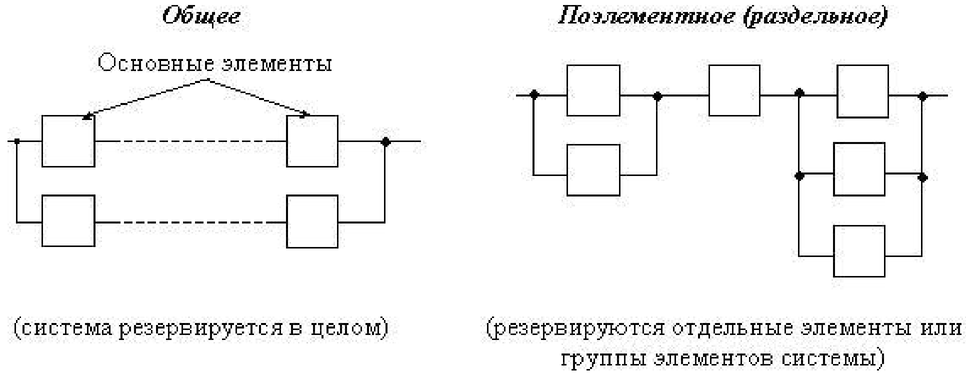


Рис.1.26. *Структура систем с резервированием.*

По виду резервирование подразделяют на нагруженное («горячее», пассивное) и ненагруженное («холодное», активное):

- ***нагруженное*** – резервные элементы функционируют наравне с основными (постоянно включены в работу);
- ***ненагруженное*** – резервные элементы вводятся в работу только после отказа основных элементов (резервирование замещением).

При *нагруженном резервировании* резервные элементы расходуют свой ресурс, имеют одинаковое распределение наработок до отказа и интенсивность отказов основных λ_O и резервных λ_H элементов одинакова ($\lambda_O = \lambda_H$).

При нагруженном резервировании различие между основными и резервными элементами часто условное. Для обеспечения нормальной работы (сохранения работоспособности) необходимо, чтобы число работоспособных элементов не становилось меньше минимально необходимого.

Разновидностью нагруженного резервирования является *резервирование с облегченным резервом,* т. е. резервные элементы также находятся под нагрузкой, но меньшей, чем основные. Интенсивность отказов резервных элементов $\lambda_{ОБ}$ ниже, чем у основных λ_O, *т. е.* $\lambda_O > \lambda_{ОБ}$.

При *ненагруженном резервировании* резервные элементы не подвергаются нагрузке, их показатели надежности не изменяются и они не могут отказать за время нахождения в резерве, т. е. интенсивность отказов резервных элементов $\lambda_X = 0$.

Примеры структурных схем ненагруженного резервирования изображены на рис.1.27.

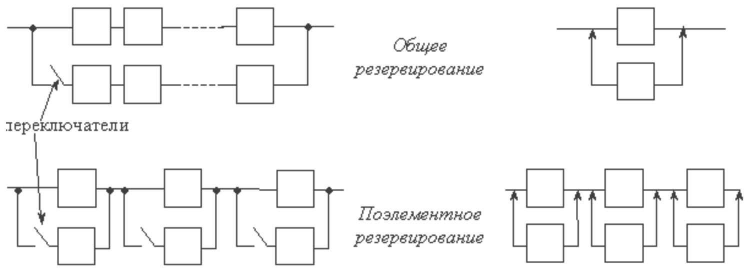


Рис.1.27. *Примеры структурных схем ненагруженного резервирования.*

Резервные элементы включаются в работу только после отказа основных элементов. Переключение производится вручную или автоматически (автоматически – включение резервных машин и элементов в энергетике, в бортовых сетях судов и самолетов и т. д.; вручную – замена инструмента или оснастки при производстве, включение эскалаторов в метро в часы «пик» и т. д.).

Разновидностью ненагруженного резервирования является *скользящее резервирование* (рис.1.28), когда один и тот же резервный элемент может быть использован для замены любого из элементов основной системы.

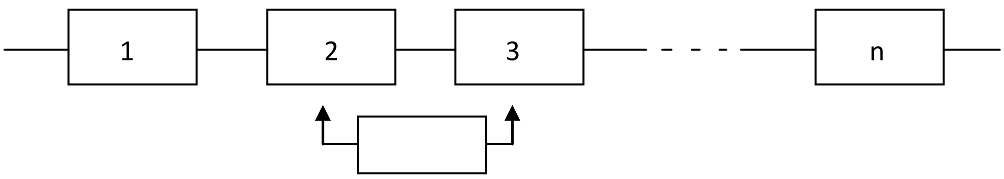


Рис.1.28. *Пример скользящего резервирования.*

Если рассмотреть два характерных вида резервирования - нагруженное («горячее») и ненагруженное («холодное») на рис.1.29, то очевидно, что при равенстве числа основных и резервных элементов ненагруженный резерв обеспечивает большую надежность. Но это справедливо только тогда, когда перевод резервного элемента в работу происходит абсолютно надежно (т. е. ВБР переключателя должна быть равна 1,0). Выполнение этого условия связано со значительными техническими трудностями или является иногда нецелесообразным по экономическим или техническим причинам.

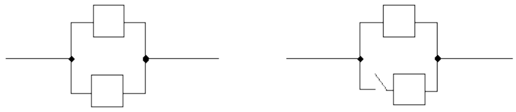


Рис.1.29. *Примеры структурных схем нагруженного и ненагруженного резервирования.*

Кратность резервирования

Обозначим: n – число однотипных элементов в системе;

r – число элементов, необходимых для функционирования системы.

Кратность резервирования – это соотношение между общим числом однотипных элементов и элементов, необходимых для работы системы:

$$k = \frac{n - r}{r}$$

Кратность резервирования может быть целой, если $r = 1$, или дробной, если $r > 1$. Например (рис.1.30):

$$n = 3, \ \ r = 1, \ \ k = \frac{3-1}{1} = 2.$$

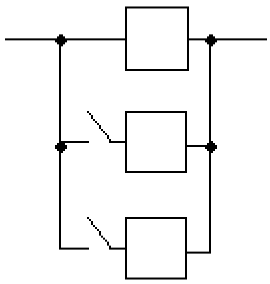


Рис.1.30. *Пример двойного резервирования*

1.6.2.1. Надежность систем с нагруженным резервированием

Когда мы рассматривали надежность основной системы (последовательное соединение элементов), мы выяснили, что *работоспособность ОС* обеспечивается при условии, когда все n элементов системы находятся в работоспособном состоянии.

Рассмотрим систему [16], состоящую из одного основного (на рис.1.31 - 1-й элемент) и $n-1$ резервных элементов.

Структура систем с нагруженным резервированием - имеет вид ***параллельного соединения элементов надежности***.

Рассмотрим пример системы с нагруженным резервированием, состоящей из двух элементов. Обозначим ВБР первого элемента P_1, а второго - P_2.Система будет работоспособна в двух случаях:

- когда оба элемента работоспособны: $P_I = P_1 \cdot P_2$;
- когда первый работоспособен, а второй – нет, или наоборот:

$$P_{II} = P_1 \cdot (1 - P_2) + P_2 \cdot (1 - P_1).$$

Найдем ВБР системы:

$$P_C(t) = P_I + P_{II} = P_1 \cdot P_2 + P_1 \cdot (1 - P_2) + P_2 \cdot (1 - P_1) = P_1 + P_2 - P_1 \cdot P_2.$$

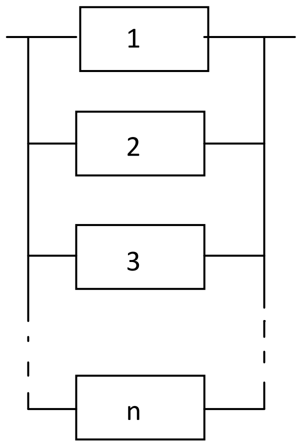


Рис.1.31. *Структура системы с нагруженным резервированием.*

Отказ такой системы наступит, если откажут оба элемента:

$$Q_C(t) = Q_1 \cdot Q_2 = (1 - P_1)(1 - P_2).$$

В этом случае ВБР системы

$$P_C(t) = 1 - (1 - P_1)(1 - P_2) = P_1 + P_2 - P_1 \cdot P_2.$$

Теперь рассмотрим пример системы, состоящей из трех элементов. Система будет работоспособна в трех случаях:

- когда все три элемента работоспособны: $P_I = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$;
- когда работоспособны любые два элемента из трех:
$$P_{II} = P_1 \cdot P_2 \cdot (1 - P_3) + P_2 \cdot P_3 \cdot (1 - P_1) + P_3 \cdot P_1 \cdot (1 - P_2).$$
- когда работоспособен один из трех элементов:

$$P_{III} = P_1 \cdot (1 - P_2) \cdot (1 - P_3) + P_2 \cdot (1 - P_1) \cdot (1 - P_3) + P_3 \cdot (1 - P_1) \cdot (1 - P_3)$$

Найдем ВБР системы:

$$P_C(t) = P_I + P_{II} + P_{III} = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 - P_1 \cdot P_2 - P_1 \cdot P_3 - P_2 \cdot P_3 + P_1 + P_2 + P_3.$$

или

$$P_C(t) = \sum \left(\prod_1^{C_n^3} P_i \cdot P_j \cdot P_k \right) - \sum \left(\prod_1^{C_n^2} P_i \cdot P_j \right) + \sum_{i=1}^{n} P_i.$$

Отказ такой системы наступит, если откажут три элемента:

$$Q_C(t) = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 = (1 - P_1)(1 - P_2)(1 - P_3).$$

В этом случае ВБР системы

$$P_C(t) = 1 - (1 - P_1)(1 - P_2)(1 - P_3) = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 - P_1 \cdot P_2 - P_1 \cdot P_3 - P_2 \cdot P_3 + P_1 + P_2 + P_3.$$

Итак, переходя к системам с нагруженным резервированием, когда резервные элементы функционируют наравне с основными (постоянно включены в работу), удобнее переходить от работоспособности системы к ее отказу.

А отказ системы с нагруженным резервировании происходит только при отказе всех n элементов (при условии, что отказы элементов независимы).

Тогда вероятность отказа (***ВО***) и вероятность безотказной работы (***ВБР***) системы равны соответственно

$$Q_c(t) = \prod_{i=1}^{n} Q_i(t), \tag{1.80}$$

$$P_c(t) = 1 - Q_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} Q_i(t), \tag{1.81}$$

Так как $$Q_i(t) = 1 - P_i(t), \tag{1.82}$$

то $$P_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - P_i(t)] \ . \tag{1.83}$$

Средняя наработка на отказ (математическое ожидание наработки до отказа):

$$T_{cp} = \int_0^{\infty} P_c(t)dt = \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - P_i(t) \right] \right\} dt \ . \tag{1.84}$$

При ***идентичных элементах*** системы, т. е.

$P_1(t) = P_2(t) = ... = P_n(t) = P(t)$, $Q_1(t) = Q_2(t) = ... = Q_n(t) = Q(t)$

ВБР и ВО системы примут вид соответственно:

$$P_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - P_i(t)] = 1 - \left[1 - P(t) \right]^n; \tag{1.85}$$

$$Q_c(t) = \prod_{i=1}^{n} Q_i(t) = Q^n(t). \tag{1.86}$$

Средняя наработка на отказ $$T_{cp} = \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \left[1 - P(t) \right]^n \right\} dt \ . \tag{1.87}$$

Для системы ***с экспоненциальным законом распределения наработки*** до отказа каждого из n элементов:

$$P_i(t) = e^{-\lambda_i t}, \tag{1.88}$$

где $\lambda_i = const$, найдем показатели безотказности.

1. <u>*Неидентичные элементы*</u> $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq ... \neq \lambda_n$

ВБР: Подставим (1.88) в (1.83): $$P_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda_i t}). \tag{1.89}$$

ВО: Подставим (1.88) в (1.80) и (1.82): $$Q_c(t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda_i t}). \tag{1.90}$$

Средняя наработка на отказ для систем с экспоненциальной наработкой

$$T_{cp} = \int_0^{\infty} \left[1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - e^{-\lambda_i t} \right) \right] dt \ .$$

Рассмотрим отдельно $\prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda_i t}) = (1 - e^{-\lambda_1 t})(1 - e^{-\lambda_2 t})...(1 - e^{-\lambda_n t}) =$

$$= 1 - e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} - ... - e^{-\lambda_n t} + e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} + ... + e^{-(\lambda_{n-1} + \lambda_n)t} -$$

$$- e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} - ... - e^{-(\lambda_{n-2} + \lambda_{n-1} + \lambda_n)t} + (-1)^n \cdot e^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i) \cdot t} .$$

Теперь

$$T_{cp} = \int\limits_0^\infty [1 - 1 + e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} + \ldots + e^{-\lambda_n t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} - \ldots - e^{-(\lambda_{n-1}+\lambda_n)t} +$$

$$+ e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} + \ldots + e^{-(\lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}+\lambda_n)t} + (-1)^n e^{-(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i)\cdot t}]dt =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} |_0^\infty - \frac{1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t} |_0^\infty - \ldots - \frac{1}{\lambda_n} e^{-\lambda_n t} |_0^\infty +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} |_0^\infty + \ldots + \frac{1}{\lambda_{n-1}+\lambda_n} e^{-(\lambda_{n-1}+\lambda_n)t} |_0^\infty -$$

$$- \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} |_0^\infty - \ldots - \frac{1}{\lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}+\lambda_n} e^{-(\lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}+\lambda_n)t} |_0^\infty +$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i} e^{-(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i)\cdot t} |_0^\infty .$$

После подстановки пределов интегрирования получим

$$T_{cp} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} - \ldots - \frac{1}{\lambda_{n-1}+\lambda_n} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \ldots + \frac{1}{\lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}+\lambda_n} + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i}.$$

2. *<u>Идентичные элементы</u>* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$

ВБР: Подставим (1.88) в (1.85): $P_c(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n$. (1.91)

ВО: Подставим (1.88) в (1.86): $Q_c(t) = (1 - e^{-\lambda t})^n$. (1.92)

Результаты (1.89)-(1.92) занесем в таблицу табл.1.4.

Табл. 1.4. *ВБР и ВО* для *системы с нагруженным резервированием*

	Неидентичные элементы $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$	*Идентичные элементы* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$
ВБР:	$P_c(t) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - e^{-\lambda_i t})$	$P_c(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n$
ВО:	$Q_c(t) = \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - e^{-\lambda_i t})$	$Q_c(t) = (1 - e^{-\lambda t})^n$

При идентичных n элементах системы найдем среднюю наработку до отказа:

$$T_{cp} = \int\limits_0^\infty \left[1 - (1 - e^{-\lambda\cdot t})^n\right]dt = \otimes$$

Введем замену переменных: $x = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$.

Тогда $e^{-\lambda \cdot t} = 1 - x$. После логарифмирования $\ln e^{-\lambda t} = \ln(1 - x)$.

Или $-\lambda t = \ln(1 - x)$. Отсюда $t = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - x)$.

Теперь вычислим дифференциал $dt = \dfrac{1}{\lambda} \cdot \dfrac{dx}{(1 - x)}$.

Замена переменной привела к изменению пределов интегрирования:

$$t = 0 \to x = 1 - 1 = 0;$$

$$t = \infty \to x = 1 - e^{-\infty} = 1.$$

$$\otimes = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 (1 - x^n)\frac{dx}{1 - x} = \frac{1}{\lambda}\left(\int_0^1 \frac{dx}{1 - x} - \int_0^1 \frac{x^n}{1 - x}dx\right).$$

Известны следующие табличные интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a}\ln|ax + b|$; 2) $\displaystyle\int \frac{x^n dx}{ax + b} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1} b^{i-1} x^i}{i \cdot a^i} + \frac{(-1)^n b^n}{a^{n+1}}\ln|ax + b|$.

Для наших интегралов имеем $a = -1, b = 1$.

Подставим наши значения a и b.Теперь вычислим отдельно

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1 - x} = -\ln|1 - x|\,\Big|_0^1$;

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n dx}{1 - x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1} x^i}{i \cdot (-1)^i}\Bigg|_0^1 + \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}\ln|1 - x|\Bigg|_0^1 = -\sum_{i=1}^{n}\frac{x^i}{i}\Bigg|_0^1 - \ln|1 - x|\Big|_0^1$.

Вычислим значение круглой скобки в $\otimes$:

$$(\ldots) = -\ln|1 - x|\,\Big|_0^1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{x^i}{i}\,\Big|_0^1 + \ln|1 - x|\,\Big|_0^1 = \sum_{i=1}^{n}\frac{x^i}{i}\,\Big|_0^1.$$

Подставляя пределы интегрирования, получим

$$T_{cp} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{x^i}{i}\,\Big|_0^1 = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right). \qquad (1.93)$$

При большом n $(n \to \infty)$, гармонический ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \approx \ln n + C,$$

где $C = 0{,}5772\ldots$

Тогда $$T_{cp} \approx \frac{1}{\lambda}(\ln n + C). \qquad (1.94)$$

Таким образом, при нагруженном резервировании средняя наработка до отказа прямо пропорциональна натуральному логарифму числа элементов. Для сравнения, для систем без резервирования (ОС) $T_{cp} = \frac{1}{n\lambda}$.

Напомним, что <u>*кратность резервирования*</u> $k = \frac{n-r}{r}$,

где n – число однотипных элементов в системе;

r – число элементов, необходимых для функционирования системы.

При $r = 1$, выразим $n = k + 1$.

Подставим полученное значение n в формулу средней наработки до отказа системы при идентичных элементах (1.93):

$$T_c = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i} = \frac{1}{\lambda}(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k+1}) \quad . \tag{1.95}$$

Поскольку $\lambda = const$, то средняя наработка T_c повышается по мере увеличения кратности резервирования.

Обозначим $T_0 = \frac{1}{\lambda}$ - средняя наработка основного элемента.

Тогда выражение (1.95) примет вид

$$T_c = T_0\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i} = T_0(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k+1}).$$

Например, при $k = 1$ (однократное резервирование)

$$T_c = T_0(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}T_0 = 1{,}5T_0$$ - *увеличение* T_{cp} *на 50%;*

при $k = 2$ (двукратное резервирование)

$$T_c = T_0(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{11}{6}T_0 = 1{,}83T_0$$ - *увеличение* T_{cp} *на 83%;*

при $k = 3$ (трехкратное резервирование)

$$T_c = T_0(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{25}{12}T_0 = 2{,}08T_0$$ - *увеличение* T_{cp} *на 108%.*

Таким образом, динамика роста T_{cp} составляет: 50, 33 и 25%, т. е. с увеличением кратности системы с нагруженным резервированием динамика роста средней наработки на отказ системы уменьшается.

1.6.2.2. Надежность систем с ненагруженным резервированием

Рассмотрим систему [16], состоящую из основного элемента (ОЭ), одного резервного (РЭ) и переключающего устройства (ПУ) подключения резервного элемента вместо отказавшего основного (рис.1.32). ОЭ и РЭ являются невосстанавливаемыми объектами.

Примем следующие допущения:

1. Время замены отказавшего элемента резервным равно нулю ($t_з = 0$).
2. Переключающее устройство – абсолютно надежно $P_{ПУ}(t) = 1$.
3. При ненагруженном резервировании резервный элемент не может отказать, находясь в отключенном состоянии $P_{РЭ}(t) = 1$, и его показатели надежности не изменяются.

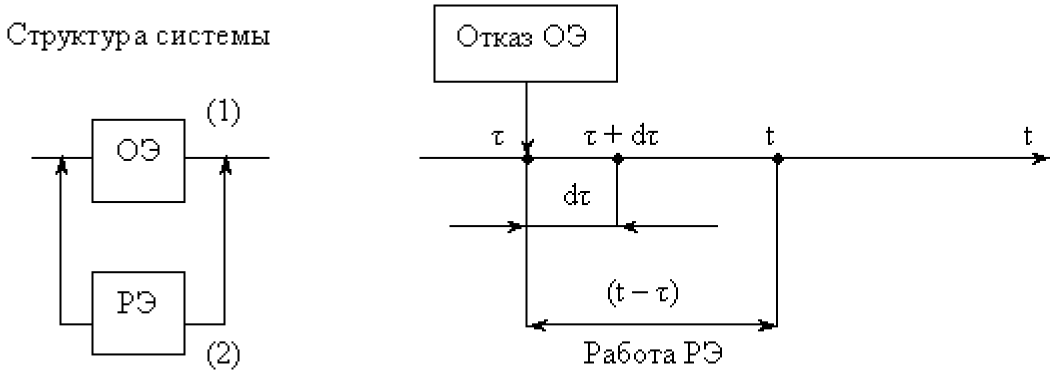


Рис. 1.32. *Структура системы с ненагруженным резервированием*

Безотказная работа системы состоит из безотказной работы ОЭ **или** отказа ОЭ, включения РЭ и безотказной работы РЭ.

События, соответствующие *работоспособности системы* за наработку ($0, t$):

A = {безотказная работа (БР) системы за наработку ($0, t$)};

A_1 = {БР ОЭ за наработку ($0, t$)};

A_2 = {отказ ОЭ в момент $t > \tau$,

включение ($t_з = 0$) РЭ и

БР РЭ на интервале ($t - \tau$)}.

Событие A состоит в появлении хотя бы одного из событий A_1 и A_2, поэтому

$$A = A_1 \vee A_2$$

Здесь $\vee$ - оператор дизъюнкции – логическое «ИЛИ», а согласно теореме о сложении вероятностей:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2),$$

где $P(A) = P_c(t)$ - ВБР системы к наработке t (за наработку ($0, t$));

$P(A_1) = P_1(t)$ – ВБР ОЭ к наработке t;

$P(A_2)$ – вероятность отказа ОЭ и БР РЭ после отказа ОЭ.

При известном законе распределения наработки до отказа ОЭ вычисление $P_1(t)$ не представляет сложности.

Событие A_2 является «сложным» событием, включающим в себя простые:

A_{21} = {отказ ОЭ при $\tau < t$ (вблизи рассматриваемого момента τ)};

A_{22} = {БР РЭ с момента τ до t, т. е. в интервале ($t - \tau$)}.

Событие A_2 осуществляется при одновременном выполнении событий A_{21} и A_{22}:

$$A_2 = A_{21} \wedge A_{22}$$ - логическое «И» - оператор конъюнкции.

События A_{21} и A_{22} являются зависимыми, поэтому вероятность события A_2 согласно теореме об умножении вероятностей

$$P(A_2) = P(A_{21}) \cdot P(A_{22} \mid A_{21}).$$

Соответствующие вероятности:

1) $P(A_{22} \mid A_{21}) = P_2(t-\tau)$ – ВБР РЭ в интервале ($t-\tau$),

где $P_2(t)$ – ВБР РЭ к наработке t.

2) $P(A_{21})$- ВО ОЭ. Для определения $P(A_{21})$ рассмотрен малый интервал ($\tau, \tau + d\tau$), для которого вероятность отказа ОЭ равна:

$$dQ_1(\tau) = a_1(\tau)d\tau,$$

где $a_1(\tau)$- частота отказа (ПРО) ОЭ к моменту τ.

Вероятность события A_2 за малый интервал ($\tau, \tau + d\tau$):

$$dP(A_2) = P(A_{21}) \cdot P(A_{22} \mid A_{21}) = a_1(\tau)d\tau \cdot P_2(t-\tau).$$

Интегрируем полученное выражение по τ от *0* до t:

$$P(A_2) = \int_0^t a_1(\tau)d\tau \cdot P_2(t-\tau) = \int_0^t P_2(t-\tau) \cdot a_1(\tau)d\tau$$

Тогда ВБР рассмотренной системы с ненагруженным резервом равна:

$$P_c(t) = P_1(t) + \int_0^t P_2(t-\tau)a_1(\tau)d\tau. \qquad (1.96)$$

Аналогично, для системы с одним ОЭ и ($n-1$) РЭ, получается рекуррентное выражение:

$$P_c(t) = P_{n-1}(t) + \int_0^t P_n(t-\tau)a_{n-1}(\tau)d\tau, \qquad (1.97)$$

где индекс ($n-1$) означает, что соответствующие характеристики (ВБР и ПРО) относятся к системе, в которой включается в работу последний n- й элемент.

Выражение (1.97) приведено для состояния, когда к моменту τ отказал предпоследний ($n-1$) элемент системы и остался лишь один (последний) работоспособный элемент.

Выражение (1.97) можно представить по-другому:

Так как $P_n(t-\tau) = 1 - Q_n(t-\tau)$, то формулу (1.97) запишем в виде

$$P_c(t) = P_{n-1}(t) + \int_0^t \left[1 - Q_n(t-\tau)\right]a_{n-1}(\tau)d\tau =$$

$$= P_{n-1}(t) + \int_0^t a_{n-1}(\tau)d\tau + \int_0^t Q_n(t-\tau)a_{n-1}(\tau)d\tau = \otimes$$

По определению $a_{n-1}(\tau) = \dfrac{dQ_{n-1}(\tau)}{d\tau}$, следовательно $\int_0^t a_{n-1}(\tau)d\tau = Q_{n-1}(t)$.

Тогда $\otimes = P_{n-1}(t) + Q_{n-1}(t) - \int\limits_0^t Q_n(t-\tau)a_{n-1}(\tau)d\tau = 1 - \int\limits_0^t Q_n(t-\tau)a_{n-1}(\tau)d\tau.$

Таким образом
$$P_c(t) = 1 - \int\limits_0^t Q_n(t-\tau)a_{n-1}(\tau)d\tau. \tag{1.98}$$

$$Q_c(t) = \int\limits_0^t Q_n(t-\tau)a_{n-1}(\tau)d\tau. \tag{1.99}$$

Пример 1. Пусть $n = 2$. Примем для рассматриваемой системы, что наработки до отказа ОЭ и РЭ подчиняются экспоненциальному распределению с параметрами λ_1 и λ_2:

$$P_1(t) = e^{-\lambda_1 t}; \qquad P_2(t) = e^{-\lambda_2 t}.$$

Найти: $P_c(t)$.

В интервале $(t-\tau)$ будем иметь $P_2(t-\tau) = e^{-\lambda_2(t-\tau)}$.

Кроме того, $a_1(\tau) = -\dfrac{dP_1(\tau)}{d\tau} = \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau}$.

Полученные выражения, подставим в формулу (1.96) для ВБР системы:

$$P_c(t) = e^{-\lambda_1 t} + \int\limits_0^t e^{-\lambda_2(t-\tau)} \cdot \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 \tau} d\tau = e^{-\lambda_1 t} + \lambda_1 \int\limits_0^t e^{-\lambda_2(t-\tau)} \cdot e^{-\lambda_1 \tau} d\tau =$$

$$= e^{-\lambda_1 t} + \lambda_1 \int\limits_0^t e^{-\lambda_2 t} \cdot e^{(\lambda_2-\lambda_1)\tau} d\tau = e^{-\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{-\lambda_2 t} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2-\lambda_1)\tau} \Big|_0^t =$$

$$= e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}\left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} - 1\right] = e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}\right).$$

Итак, выражение (1.96) после интегрирования имеет вид:

$$P_c(t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}\right). \tag{1.100}$$

Плотность распределения наработки до отказа системы, равна:

$$a_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right). \tag{1.101}$$

Пример 2. Рассмотрим случай идентичных элементов

$$P_1(t) = P_2(t) = e^{-\lambda t}.$$

Найти: $P_c(t)$.

Подставить $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ в формулу (1.100) нельзя.

В интервале $(t-\tau)$ будем иметь $P_2(t-\tau) = e^{-\lambda(t-\tau)}$.

Кроме того, $a_1(\tau) = -\dfrac{dP_1(\tau)}{d\tau} = \lambda e^{-\lambda\tau}$.

Полученные выражения, подставим в формулу (1.96) для ВБР системы:

$$P_c(t) = e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda\tau} d\tau = e^{-\lambda t} + \lambda \int_0^t e^{-\lambda t + \lambda\tau - \lambda\tau} d\tau =$$

$$= e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t d\tau = e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \tau \Big|_0^t = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t).$$

Итак, для $n = 2$ и идентичных элементов, имеем

$$P_c(t) = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t). \tag{1.102}$$

<u>Пример 3.</u> Пусть $n = 3$(рис.1.33). Формула (1.97) теперь примет вид

$$P_c(t) = P_2(t) + \int_0^t P_3(t-\tau) a_2(\tau) d\tau. \tag{1.103}$$

Используя результат предыдущего случая, имеем

$$P_2(t) = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t). \qquad P_3(t-\tau) = e^{-\lambda(t-\tau)}.$$

$$a_2(\tau) = -\frac{dP_2(\tau)}{d\tau} = -\left[(-\lambda) \cdot e^{-\lambda\tau} \cdot (1 + \lambda\tau) + \lambda \cdot e^{-\lambda\tau}\right] = \lambda^2 \tau \cdot e^{-\lambda\tau}.$$

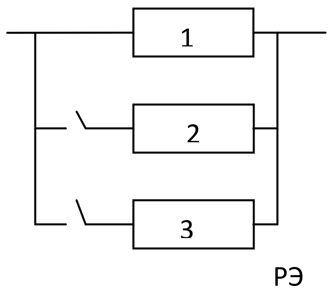


Рис. 1.33. *Пример системы с ненагруженным резервированием при* $n = 3$.

Подставляя последние выражения в формулу (1.103), получим

$$P_c(t) = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t) + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \cdot \lambda^2 \tau \cdot e^{-\lambda\tau} d\tau =$$

$$= e^{-\lambda t}(1 + \lambda t) + \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^t \tau d\tau = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t) + \lambda^2 e^{-\lambda t} \frac{t^2}{2} = e^{-\lambda t}\left[1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2}\right].$$

Итак, для $n = 3$ и идентичных элементов, имеем

$$P_c(t) = e^{-\lambda t}\left[1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2}\right]. \tag{1.104}$$

Аналогично получим ВБР для $n = 4$ и идентичных элементов:

$$P_c(t) = e^{-\lambda t}\left[1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2} + \frac{(\lambda t)^3}{6}\right]. \tag{1.105}$$

Проанализируем, как изменяется ВБР системы при различной кратности резервирования:

1. $k=0; \quad n=1; \qquad P_c(t)=e^{-\lambda t};$
2. $k=1; \quad n=2; \qquad P_c(t)=e^{-\lambda t}(1+\lambda t);$
3. $k=2; \quad n=3; \qquad P_c(t)=e^{-\lambda t}\left(1+\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2}\right);$
4. $k=3; \quad n=4; \qquad P_c(t)=e^{-\lambda t}\left[1+\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2}+\frac{(\lambda t)^3}{6}\right].$

В общем случае для идентичных ОЭ и $(n-1)$ *РЭ и экспоненциальном распределении наработки элементов для ВБР системы с ненагруженным резервом и целой кратностью резервирования* $k=\frac{n-r}{r}$*, где* r *= 1:*

$$P_c(t)=e^{-\lambda t}\left(1+\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\ldots+\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right),$$

или

$$P_c(t)=e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}=e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{k}\frac{(\lambda t)^i}{i!} \qquad (1.106)$$

где n – число элементов системы;

$k=n-1$ - кратность резервирования, при r = *1* .

ПРО системы:

$$a_c(t)=-\frac{dP_c(t)}{dt}=-\left\{\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}\right)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}+e^{-\lambda t}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right)\right\}=$$

$$=-\left\{-\lambda e^{-\lambda t}\left(1+\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\ldots+\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)+e^{-\lambda t}\left(\lambda+\frac{2\cdot(\lambda t)\lambda}{2!}+\ldots+\frac{(n-1)(\lambda t)^{n-2}\cdot\lambda}{(n-1)!}\right)\right\}=$$

$$=\lambda e^{-\lambda t}\left\{\left(1+\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\ldots+\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)-\left(1+\lambda t+\ldots+\frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!}\right)\right\}=$$

$$=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Итак,
$$a_c(t)=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}. \qquad (1.107)$$

ИО системы:

$$\lambda_c(t)=\frac{a_c(t)}{P_c(t)}=\frac{\lambda\cdot(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}}. \qquad (1.108)$$

Сравнение ненагруженного и нагруженного резервирований представлено на рис.1.34 и проведено по графику $P_C(t)$ для системы с идентичными элементами ($\lambda_i = \lambda$) и кратностью резервирования $k = 2$.

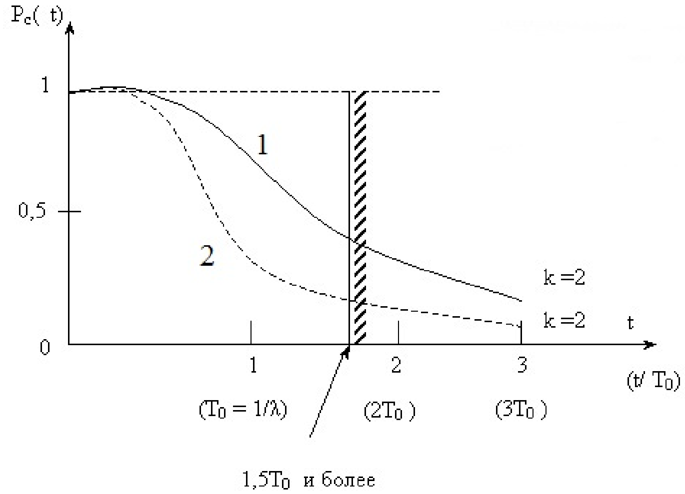


Рис.1.34. *Сравнение ВБР систем с ненагруженным и нагруженным резервом*

Кривая 1 (сплошная) для системы с ненагруженным резервированием и

$$P_c(t) = e^{-\lambda t}\left(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2}\right).$$

Кривая 2 (прерывистая) для системы с нагруженным резервированием и

$$P_c(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^3.$$

Наибольшая эффективность от использования системы с ненагруженным резервом будет при продолжительности работы РЭ не менее 1.5 T_0.

1.6.2.3. Надежность систем с облегченным резервом

Итак, ненагруженный резерв более эффективен, чем нагруженный.

Однако, ненагруженный резерв в рамках принятых допущений не всегда осуществим.

Во-первых, в авиа- и судовых системах как основные, так и резервные элементы подвержены вибрации, ударам, повторно-статическим нагрузкам, перепадам температур и т. п. Поэтому не включенные в работу резервные элементы будут иметь некоторую $\lambda \neq 0$, то есть они также изнашиваются, но менее интенсивно.

Во-вторых, на практике трудно обеспечить абсолютно надежное и мгновенное подключение резервных элементов, особенно это касается таких инерционных элементов, как гироскопы (время готовности, прогрев и т.д.).

Поэтому, в ряде практических случаев, уместно применять *облегченный резерв*, при котором:

- резервные элементы (РЭ) подключены к цепям питания для прогрева и удержания требуемых значений параметров;
- внешние нагрузки и воздействия приводят к изменению свойств материалов, рабочих параметров и т. п. РЭ.

При этом, РЭ будут иметь некоторую интенсивность отказов $\lambda \neq 0$.

Согласно ГОСТ 27.002-89 облегченный резерв – резерв, который содержит один или несколько резервных элементов, находящихся в менее нагруженном режиме, чем основной элемент.

Рассмотрим систему, состоящую из равнонадежных основного (ОЭ) и резервного (РЭ) элементов (рис.1.35). Элементы невосстанавливаемые.

События, обеспечивающие безотказную работу (БР) системы за наработку ($0,t$):

A = {БР системы за наработку ($0,t$)};

A_1 = {БР ОЭ за наработку $(0,t)$};

A_2 = {отказ ОЭ в момент $\tau < t$, включение РЭ и БР его на интервале $(t-\tau)$}.

Событие *A* представляет сумму событий A_1 и A_2

$$A = A_1 \vee A_2$$

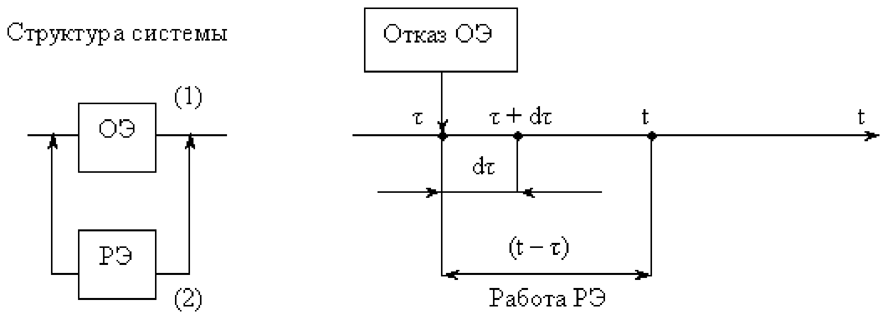


Рис.1.35. *Структура системы с облегченным резервом*

ВБР системы за наработку $(0,t)$, т.е. к наработке t равна сумме вероятностей событий A_1 и A_2:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2),$$

где $P(A) = P_c(t)$ – ВБР системы к наработке t;

$P(A_1) = P_0(t)$ – ВБР ОЭ к наработке t за интервал $(0,t)$;

$P(A_2) = P_p(t)$ – ВБР РЭ к наработке t, при условии, что ОЭ отказал.

При известном законе распределения наработки ОЭ вычисление $P_0(t)$ не составляет

труда, подробнее рассмотрим определение $P(A_2)$.

Для этого событие A_2 раскладывается на три составляющие:

- A_{21}= {отказ ОЭ при наработке $t > \tau$ };
- A_{22} = {БР РЭ до наработки τ – момента включения его в работу};
- A_{23}= {БР РЭ от τ до t, т.е. за интервал $(t-\tau)$}.

Очевидно, событие A_2 выполнится при одновременном выполнении всех событий:

$$A_2 = A_{21} \wedge A_{22} \wedge A_{23} .$$

События A_{21}, A_{22}, A_{23} являются зависимыми, но поскольку они представляют ВБР или ВО элементов, наработки до отказа которых описываются своими законами распределения, то вероятность события A_2 равна произведению вероятностей событий:

$$P(A_2) = P(A_{21}) \cdot P(A_{22}) \cdot P(A_{23}) \ .$$

Соответствующие вероятности определяются через:

- Частоту отказа (ПРО) ОЭ: $a_0(\tau) = \dfrac{dQ_0(\tau)}{d\tau}, \ \Rightarrow dQ_0(\tau) = a_0(\tau)d\tau$, $P(A_{21}) = dQ_0(\tau)$.
- ВБР РЭ до момента τ отказа ОЭ: $P(A_{22}) = P_p(\tau)$.
- ВБР РЭ от момента τ включения в работу до t: $P(A_{23}) = P_p(t-\tau)$.

Тогда вероятность события A_2 за малый интервал $d\tau$ при условии, что ОЭ отказал, будет равна:

$$dP(A_2) = a_0(\tau)d\tau \cdot P_p(\tau) \cdot P_p(t-\tau).$$

Интегрируя по τ, получим:

$$P(A_2) = P_p(t) = \int_0^t P_p(\tau) \cdot P_p(t-\tau) \cdot a_0(\tau)d\tau.$$

Тогда ВБР резервируемой системы с облегченным резервом:

$$P_c(t) = P_0(t) + \int_0^t P_p(\tau) \cdot P_p(t-\tau) \cdot a_0(\tau)d\tau. \qquad (1.109)$$

Аналогично, ВБР системы, состоящей из n равнонадежных элементов:

$$P_c(t) = P_{(n-1)c}(t) + \int_0^t P_p(\tau) \cdot P_p(t-\tau) \cdot a_{(n-1)c}(\tau)d\tau, \qquad (1.110)$$

где индекс $(n-1)c$ означает, что ВБР и ПРО относятся к системе, при отказе которой включается рассматриваемый n – й элемент.

При экспоненциальном распределении наработки до отказа элементов составляющие расчетного выражения принимают вид:

$$P_0(t) = e^{-\lambda_{раб} \cdot t}; \quad a_0(\tau) = -\frac{dP_0(\tau)}{d\tau} \Rightarrow \quad a_0(\tau) = \lambda_{раб} e^{-\lambda_{раб} \cdot \tau};$$

$$P_p(\tau) = e^{-\lambda_p \cdot \tau}; \qquad P_p(t-\tau) = e^{-\lambda_{раб} \cdot (t-\tau)},$$

где $\lambda_{раб}$ – ИО элементов в рабочем режиме; λ_p – ИО РЭ в режиме резерва.

Следует обратить внимание на последнее выражение – после подключения РЭ его ИО будет равна $\lambda_{раб}$.

<u>При наличии одного ОЭ и одного РЭ (</u>$n = 2$), ВБР определяется по формуле (1.109):

$$P_c(t)=P_0(t)+\int_0^t P_p(\tau)\cdot P_p(t-\tau)\cdot a_0(\tau)d\tau=e^{-\lambda_{раб}t}+\int_0^t e^{-\lambda_p\tau}\cdot e^{-\lambda_{раб}(t-\tau)}\cdot\lambda_{раб}e^{-\lambda_{раб}\tau}d\tau=$$

$$=e^{-\lambda_{раб}t}+\lambda_{раб}e^{-\lambda_{раб}t}\int_0^t e^{-\lambda_p\tau}d\tau=e^{-\lambda_{раб}t}+\lambda_{раб}e^{-\lambda_{раб}t}\frac{1}{(-\lambda_p)}e^{-\lambda_p\tau}\Big|_0^t=$$

$$=e^{-\lambda_{раб}t}-\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}e^{-\lambda_{раб}t}\left(e^{-\lambda_p t}-1\right)=e^{-\lambda_{раб}t}\left[1-\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\left(e^{-\lambda_p t}-1\right)\right]=e^{-\lambda_{раб}t}\left[1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\left(1-e^{-\lambda_p t}\right)\right]$$

Тогда ВБР резервируемой системы с облегченным резервом:

$$P_c(t)=e^{-\lambda_{раб}t}\left[1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\left(1-e^{-\lambda_p t}\right)\right]. \tag{1.111}$$

Найдем среднюю наработку на отказ для $n=2$:

$$T_{ср}=\int_0^\infty P_c(t)dt=\int_0^\infty e^{-\lambda_{раб}t}\left[1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\left(1-e^{-\lambda_p t}\right)\right]dt=$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda_{раб}t}dt+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\int_0^\infty e^{-\lambda_{раб}t}dt-\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\int_0^\infty e^{-(\lambda_{раб}+\lambda_p)t}dt=$$

$$=\frac{1}{\lambda_{раб}}+\frac{1}{\lambda_p}-\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p(\lambda_{раб}+\lambda_p)}=\frac{2\lambda_{раб}+\lambda}{\lambda_{раб}\lambda_p(\lambda_{раб}+\lambda_p)}=\frac{1}{\lambda_{раб}}\left(1+\frac{1}{1+\dfrac{\lambda_p}{\lambda_{раб}}}\right).$$

При наличии одного ОЭ и двух РЭ ($n=3$), ВБР системы теперь определяется по формуле (1.110), при этом из предыдущего примера имеем:

$$P_{2c}(t)=e^{-\lambda_{раб}t}\left[1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\left(1-e^{-\lambda_p t}\right)\right]$$

$$P_p(\tau)=e^{-\lambda_p\cdot\tau};\quad P_p(t-\tau)=e^{-\lambda_{раб}\cdot(t-\tau)}.$$

Вначале найдем частоту отказов

$$a_{2c}(\tau)=-\frac{dP_{2c}(\tau)}{d\tau}=-\frac{d}{d\tau}\left(e^{-\lambda_{раб}\tau}\right)\left[1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\left(1-e^{-\lambda_p\tau}\right)\right]+e^{-\lambda_{раб}\tau}\cdot\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\frac{d}{d\tau}\left(e^{-\lambda_p\tau}\right)=$$

$$=\lambda_{раб}e^{-\lambda_{раб}\tau}\left[1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\left(1-e^{-\lambda_p\tau}\right)\right]-e^{-\lambda_{раб}\tau}\cdot\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\cdot\lambda_p e^{-\lambda_p\tau}=$$

$$=\lambda_{раб}e^{-\lambda_{раб}\tau}\left[1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\left(1-e^{-\lambda_p\tau}\right)-e^{-\lambda_p\tau}\right]=$$

$$=\lambda_{раб}e^{-\lambda_{раб}\tau}\left[1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}-\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}e^{-\lambda_p\tau}-e^{-\lambda_p\tau}\right]=$$

$$=\lambda_{раб}e^{-\lambda_{раб}\tau}\left(1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\right)\left(1-e^{-\lambda_p\tau}\right).$$

Подставим полученное выражение в (1.110):

$$P_c(t)=P_{2c}(t)+\int_0^t e^{-\lambda_p\tau}e^{-\lambda_{раб}(t-\tau)}\lambda_{раб}e^{-\lambda_{раб}\tau}\left(1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\right)\left(1-e^{-\lambda_p\tau}\right)d\tau=$$

$$=P_{2c}(t)+\lambda_{раб}\left(1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\right)e^{-\lambda_{раб}t}\int_0^t e^{-\lambda_p\tau}\left(1-e^{-\lambda_p\tau}\right)d\tau=$$

$$=P_{2c}(t)+\lambda_{раб}\left(1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\right)e^{-\lambda_{раб}t}\left[\int_0^t e^{-\lambda_p\tau}d\tau-\int_0^t e^{-2\lambda_p\tau}d\tau\right]=$$

$$=P_{2c}(t)+\lambda_{раб}\left(1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\right)e^{-\lambda_{раб}t}\left[\frac{1}{(-\lambda_p)}e^{-\lambda_p\tau}\Big|_0^1-\frac{1}{(-2\lambda_p)}e^{-2\lambda_p\tau}\Big|_0^1\right]=$$

$$=P_{2c}(t)+\lambda_{раб}\left(1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\right)e^{-\lambda_{раб}t}\left[\frac{1}{(-\lambda_p)}\left(e^{-\lambda_p t}-1\right)-\frac{1}{(-2\lambda_p)}\left(e^{-2\lambda_p t}-1\right)\right]=$$

$$=P_{2c}(t)+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\left(1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\right)e^{-\lambda_{раб}t}\left[1-e^{-\lambda_p t}-\frac{1}{2}\left(1-e^{-\lambda_p t}\right)\right]=$$

$$=P_{2c}(t)+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\left(1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\right)e^{-\lambda_{раб}t}\left(1-e^{-\lambda_p t}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda_p t}\right)=$$

$$=P_{2c}(t)+\frac{1}{2}\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\left(1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\right)e^{-\lambda_{раб}t}\left(1-2e^{-\lambda_p t}+e^{-2\lambda_p t}\right)=$$

$$=P_{2c}(t)+\frac{1}{2}\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\left(1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\right)e^{-\lambda_{раб}t}\left(1-e^{-\lambda_p t}\right)^2.$$

Итак, после вычисления интеграла получим:

$$P_c(t)=P_{2c}(t)+\frac{1}{2}\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\left(1+\frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p}\right)e^{-\lambda_{раб}t}\left(1-e^{-\lambda_p t}\right)^2. \qquad (1.112)$$

Проводя аналогичные вычисления при $n>3$, методом индукции получим общее выражение для системы из n элементов с экспоненциальной наработкой до отказа

$$P_c(t) = P_{(n-1)c}(t) + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \prod_{j=0}^{n-2} \left(j + \frac{\lambda_{раб}}{\lambda_p} \right) \cdot e^{-\lambda_{раб} t} \cdot \left(1 - e^{-\lambda_p t}\right)^{n-1}.$$

Средняя наработка до отказа системы из n элементов:

$$T_c = \frac{1}{\lambda_{раб}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{1 + j\dfrac{\lambda_p}{\lambda_{раб}}}.$$

Для практических расчетов систем с облегченным резервированием в случае, если ОЭ имеет $P_0(t) = e^{-\lambda_{раб} \cdot t}$ и идентичные резервные элементы (РЭ)

$P_p(\tau) = e^{-\lambda_p \cdot \tau}$ – *для* $n-1$ резервных элементов,

ВБР системы может быть приближенно определена по выражению:

$$P_c(t) \approx 1 - \frac{t \cdot \prod_{i=1}^{n} \left[\lambda_{раб} + (i-1)\lambda_p\right]}{n!}$$

где n – общее число элементов системы.

Например, при $n = 2$ $(k = 1, m = 1)$

$$P_c(t) \approx 1 - \frac{t \cdot \lambda_{раб}\left(\lambda_{раб} + \lambda_p\right)}{2!};$$

при $n = 3$ $(k = 2, m = 1)$

$$P_c(t) \approx 1 - \frac{t \cdot \lambda_{раб}\left(\lambda_{раб} + \lambda_p\right)\left(\lambda_{раб} + 2\lambda_p\right)}{3!}.$$

Облегченное резервирование используют при большой инерционности переходных процессов при переходе из резервного в основной режим.

1.6.2.4. Надежность систем со скользящим резервированием

Для резервирования систем, которые состоят из одинаковых элементов, можно использовать небольшое число резервных элементов, подключающихся взамен отказавших основных [16]. Отказ системы наступает лишь в случае, когда число отказавших основных элементов превысит число резервных.

Такое резервирование называется ***скользящим,*** потому что резервный элемент может быть включен взамен любого из отказавших элементов основной системы.

Примером скользящего резервирования является одна резервная линия связи на три основных.

Скользящее резервирование является активным тогда, когда есть переключающее устройство, определяющее наличие отказа и включающее резервный элемент.

Структура системы со скользящим резервированием представлена на рис.1.36.

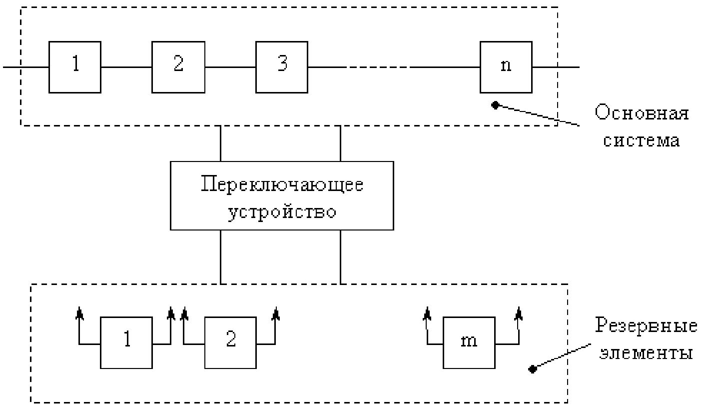


Рис.1.36. *Структура системы со скользящим резервированием*

Здесь основная система состоит из n элементов, а резервная группа – m элементов.

Обычно $m < n$, т. е. число резервных элементов (РЭ) меньше числа основных (ОЭ), поэтому скользящее резервирование считается *активным с дробной кратностью.*

Рассмотрим случай определения ВБР системы с одним РЭ $(m = 1)$ на n элементов основной системы (рис.1.37).

Допущение: пусть РЭ и все элементы основной системы равнонадежны и РЭ не может отказать до момента его включения в работу.

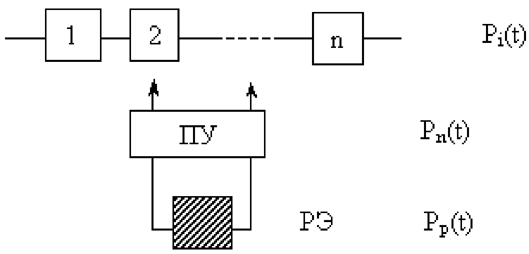


Рис.1.37. *Структура системы со скользящим резервированием* (*с одним РЭ)*

Соответствующие вероятности:

1. Выделяется бесконечно малый интервал $[\tau, \tau + d\tau]$ и определяется ВО ОЭ в интервале $[\tau, \tau + d\tau]$:

$$a(\tau) = \frac{dQ(\tau)}{d\tau} \qquad \Rightarrow \qquad dQ(\tau) = a(\tau)d\tau .$$

2. ВБР ПУ до момента τ отказа одного из элементов ОС равна $P_{\text{п}}(\tau)$;

3. ВБР РЭ с момента τ его включения, т. е. за интервал ($t - \tau$): $P_p(t - \tau)$.

Тогда ВБР системы в течение наработки $[\tau, \tau + d\tau]$ при отказе первого элемента ОС, равна:

$$a(\tau)d\tau \cdot P_{\text{п}}(\tau) \cdot P_p(t - \tau)$$

Интегрируя по всем τ от *0* до t, определяется ВБР системы при условии, что первый из элементов ОС отказал:

$$P(A_2^1) = \int_0^t a(\tau) \cdot P_{\text{п}}(\tau) P_p(t - \tau) d\tau .$$

Мы получили вероятность события A_2 при отказе 1-го элемента ОС.

Аналогичные рассуждения можно провести для каждого из n элементов ОС. После отказа одного из элементов, $n-1$ элементов должны остаться работоспособными:

$$P^{n-1}(t)\cdot P(A_2^1)=P^{n-1}(t)\cdot\int_0^t a(\tau)\cdot P_{\text{п}}(\tau)P_p(t-\tau)d\tau$$

Поскольку событие A_2, заключающееся в БР системы, подразумевает БР при отказе любого из n элементов ОС, то его можно рассматривать, как

$$A_2=A_2^1\vee A_2^2\vee A_2^3\vee\ldots\vee A_2^n$$

Поэтому ВБР системы при отказе $i=\overline{1,n}$ элемента ОС выражается:

$$P(A_2)=P\left(A_2^1\right)+P\left(A_2^2\right)+P\left(A_2^3\right)+\ldots+P\left(A_2^n\right)=$$

$$=n\cdot P^{n-1}(t)\cdot\int_0^t a(\tau)\cdot P_{\text{п}}(\tau)\cdot P_p(t-\tau)d\tau.$$

Тогда ВБР системы со скользящим резервом определяется:

$$P_c(t)=P(A_1)+P(A_2)=P^{n-1}(t)\left[P(t)+n\cdot\int_0^t a(\tau)\cdot P_{\text{п}}(\tau)\cdot P_p(t-\tau)d\tau\right].$$

Рассмотрим случай экспоненциального распределения наработки до отказа основных $P(t)=e^{-\lambda_0 t}$ (и, следовательно $a(\tau)=\lambda_0 e^{-\lambda_0\tau}$) и резервных элементов $P_p(t-\tau)=e^{-\lambda_0(t-\tau)}$, а также переключающего устройства (ПУ) $P_{\text{п}}(t)=e^{-\lambda_{\text{п}}t}$.

Вначале вычислим интеграл:

$$\int_0^t a(\tau)\cdot P_{\text{п}}(\tau)P_p(t-\tau)d\tau=\lambda_0\int_0^t e^{-\lambda_0\tau}\cdot e^{-\lambda_{\text{п}}\tau}\cdot e^{-\lambda_0(t-\tau)}d\tau=$$

$$=\lambda_0\int_0^t e^{-\lambda_0\tau}\cdot e^{-\lambda_{\text{п}}\tau}\cdot e^{-\lambda_0 t}\cdot e^{+\lambda_0\tau}d\tau=\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}\int_0^t e^{-\lambda_{\text{п}}\tau}d\tau=$$

$$=-\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{п}}}e^{-\lambda_0 t}\cdot e^{-\lambda_{\text{п}}\tau}\Big|_0^t=-\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{п}}}e^{-\lambda_0 t}\left(e^{-\lambda_{\text{п}}t}-1\right)=\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{п}}}e^{-\lambda_0 t}\left(1-e^{-\lambda_{\text{п}}t}\right).$$

Теперь вычислим ВБР системы:

$$P_c(t)=e^{-n\lambda_0 t}\left[1+n\cdot\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{п}}}\left(1-e^{-\lambda_{\text{п}}t}\right)\right].$$

При большем числе резервных элементов ($m>1$) при определении $P_c(t)$ рассматриваются четыре несовместных события (для $m=2$), при которых возможна БР системы и т. п.

1.6.2.5. Мажоритарные системы (резервирование с дробной кратностью)

Надо отметить, что исторически первыми появились системы, резервированные по методу голосования – мажоритарные системы [11]. Такие системы содержат n одинаковых элементов, объединенных схемой голосования «k из n» $\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

В основу мажоритарной системы положен логический анализ результатов всевозможных попарных сравнений выходных сигналов элементов. На выход мажоритарной системы (рис.1.38) передается информация y, совпадающая с выходной информацией, по крайней мере, в k из n элементов.

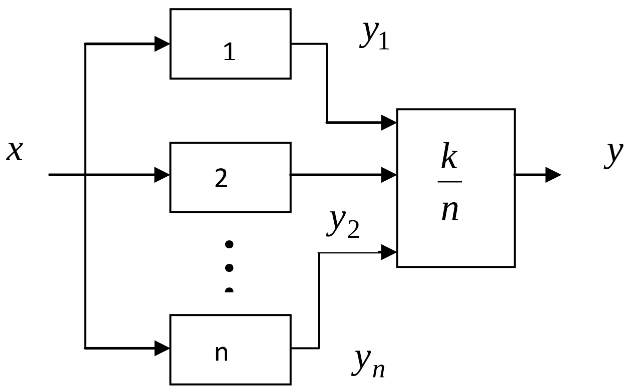


Рис.1.38. *Структура мажоритарной системы резервирования*

Формула для ВБР мажоритарной системы с одинаковыми элементами имеет вид [20]:

$$P_c(t) = \sum_{i=0}^{n-k} C_n^i \cdot p_e^{n-i} \cdot q_e^i, \tag{1.113}$$

где $C_n^i = \dfrac{n!}{(n-i)! \cdot i!}$; p_e, q_e - надежность (ВБР) и вероятность отказа одного элемента соответственно.

Получим выражение для средней наработки на отказ.

Для системы из двух одинаковых элементов (при $n = 2$ и $k = 1$) получим выражение для ВБР:

$$P_c(t) = p_e^2 + 2p_e \cdot q_e.$$

Для системы из трех одинаковых элементов (при $n = 3$ и $k = 2$) и правиле голосования 2/3, выражение для ВБР будет иметь вид

$$P_c(t) = p_e^3 + 3p_e^2 \cdot q_e.$$

Для системы из четырех одинаковых элементов (при $n = 4$ и $k = 3$) и правиле голосования 3/4 получим выражение для ВБР

$$P_c(t) = p_e^4 + 4p_e^3 \cdot q_e.$$

Предположим, что $p_e = e^{-\lambda t}$, $q_e = 1 - e^{-\lambda t}$. Используя формулу (1.15), получим выражения для средней наработки на отказ для рассмотренных примеров:

при $n=2$ и $k=1$: $T_{cp}=\frac{3}{2\lambda}=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)$;

при $n=3$ и $k=2$: $T_{cp}=\frac{5}{6\lambda}=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$;

при $n=4$ и $k=3$: $T_{cp}=\frac{7}{12\lambda}=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$;

……………………………………………….

Для общего случая системы из n и k элементов: $T_{cp}=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$

Тогда среднюю наработку на отказ можно выразить рекуррентной формулой

$$T_{cp}=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{1}{k+i}.$$

Сравним надежность мажоритарной системы и системы с нагруженным резервированием. Так для системы из трех одинаковых элементов $T_{cp}=\frac{5}{6\lambda}$. Напомним, что для систем с нагруженным двукратным резервированием (при $n=3$ и $k=2$) мы раньше получили $T_{cp}=\frac{11}{6\lambda}$. ВБР для таких двух систем имеет практически одинаковое значение. Таким образом, мажоритарная система менее надежна, чем система с нагруженным резервированием.

Кроме того, недостатком такого способа резервирования является неполное использование аппаратурных ресурсов, поскольку отказ системы наступает при $k-1$ исправных элементах.

1.6.2.6. Надежность резервированных систем с восстановлением

До сих пор предполагалось, что отказавшие элементы не подлежат восстановлению. Рассмотрим надежность систем, у которых происходит восстановление отказавших элементов [11]. Алгоритм функционирования системы, у которой кроме отказа может еще возникнуть сбой, изображен на рис.1.39.

При обнаружении сбоя система переходит к восстановлению процесса измерения и обработки информации, а при возникновении отказа к этим действиям добавляются поиск места отказа и включение резервного элемента. Получим для этого случая ВБР $p_0(t)$.

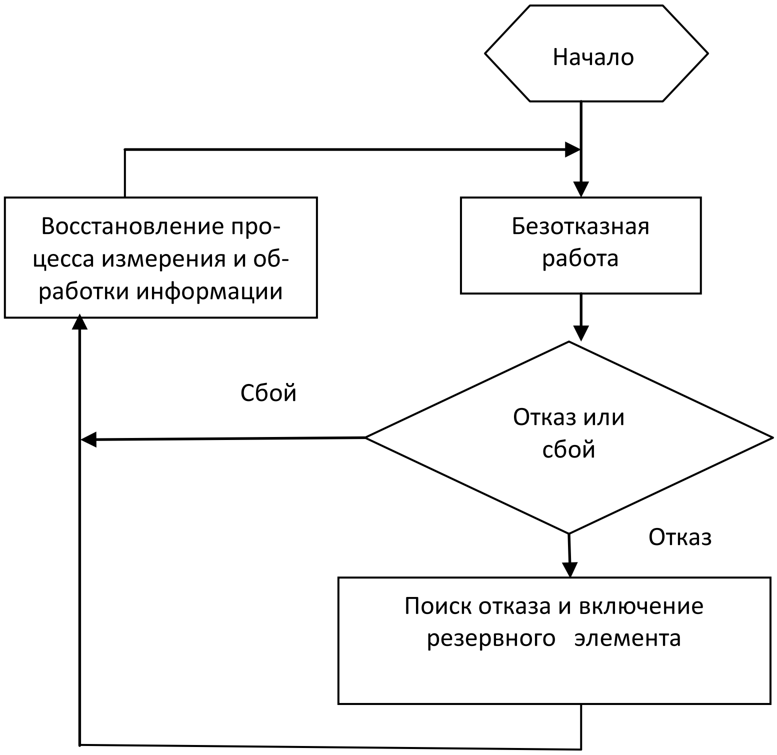


Рис.1.39. *Алгоритм функционирования системы с восстановлением*

Вначале рассмотрим систему, состоящую из одного восстанавливаемого элемента ($n = 1$), поведение которой описывается графом состояний на рис.1.40.

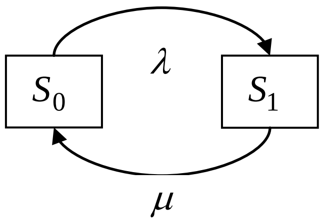


Рис.1.40. *Пример системы с восстановлением*

Система находится в одном из двух состояний:

S_0 - безотказная работа (БР) системы; такому состоянию соответствует ВБР $p_0(t)$;

S_1 - отказ и восстановление системы; такому состоянию соответствует $p_1(t)$, причем

$$p_0(t) + p_1(t) = 1. \tag{1.114}$$

Будем предполагать, что вероятность безотказной работы и вероятность восстановления распределены по экспоненциальному закону, при этом интенсивность отказов элемента равна λ, а интенсивность восстановления равна μ.

Придадим t малое приращение Δt и найдем $p_0(t + \Delta t)$ - вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0. Данное событие (A), причем

$$P(A) = p_0(t + \Delta t),$$

может произойти двумя способами:

1. Событие A_1: в момент t система была в состоянии S_0 – подсобытие A_{11}= {БР системы за время t}, вероятность $P(A_{11}) = p_0(t)$ и за Δt не вышла из него – подсобытие A_{12}={БР системы за время Δt},

$$P(A_{12}) = p_{бр}(\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} \approx 1 - \lambda \Delta t$$

$$A_1 = A_{11} \wedge A_{12} \quad \Rightarrow \quad P(A_1) = P(A_{11}) \cdot P(A_{12})$$

Вероятность этого случая есть произведение вероятностей:

$$p_0(t)(1 - \lambda \Delta t).$$

2. Событие A_2: в момент t система была в состоянии S_1 - подсобытие A_{21}= {отказ системы за время t}, $P(A_{21}) = p_1(t)$ и за Δt перешла из него в S_0 - подсобытие A_{22}={вероятность восстановления системы за время Δt}.

$$P(A_{22}) = p_в(\Delta t) = 1 - e^{-\mu \Delta t} \approx \mu \Delta t$$

$$A_2 = A_{21} \wedge A_{22} \quad \Rightarrow \quad P(A_2) = P(A_{21}) \cdot P(A_{22})$$

Вероятность этого случая есть произведение вероятностей $p_1(t)\mu\Delta t$.

$$A = A_1 \vee A_2 \quad \Rightarrow \quad P(A) = P(A_1) + P(A_2)$$

Применяя правило сложения вероятностей, получим

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t)(1 - \lambda \Delta t) + p_1(t)\mu \Delta t.$$

Раскроем скобки в правой части, перенесем $p_0(t)$ в левую и разделим обе части на Δt:

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, в левой части получим

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t).$$

С учетом выражения (1.114), подставим в левую часть $p_0(t) = 1 - p_1(t)$ и получим второе уравнение

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - \mu p_1(t).$$

Такие дифференциальные уравнения называют ***уравнениями Колмогорова*** (или Колмогорова - Чепмена).

На практике при составлении уравнений Колмогорова пользуются *мнемоническим правилом*:

- в левой части – производная по времени t от $p_i(t)$;
- число членов в правой части равно числу стрелок, соединяющих рассматриваемое состояние с другими состояниями;
- каждый член правой части равен произведению интенсивности перехода на вероятность того состояния, из которого выходит стрелка;

- знак произведения положителен, если стрелка входит (направлена острием) в рассматриваемое состояние, и отрицателен, если стрелка выходит из него.

Проверкой правильности составления уравнений является равенство нулю суммы правых частей уравнений.

Подставляя $p_1(t) = 1 - p_0(t)$ в первое уравнение, получаем

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -(\lambda + \mu) p_0(t) + \mu .$$

Решая это уравнение при начальных условиях $p_0(0) = 1$, будем иметь

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} .$$

Последнее выражение определяет *нестационарный коэффициент готовности*, т.е. вероятность того, что в произвольный момент времени система будет работоспособна. При $t \to \infty$ в этом выражении сохраняется только слагаемое $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$, которое определяет *стационарный коэффициент готовности системы.*

Рассмотрим случай резервированной системы, состоящей из двух одинаковых элементов – основного и резервного.

В случае нагруженного резервирования система может находиться в одном из трех состояний:

S_0 - безотказная работа (БР) системы; такому состоянию соответствует ВБР $p_0(t)$;

S_1 - один элемент отказал λ_1 и восстанавливается μ_1, второй элемент работает. Такому состоянию соответствует $p_1(t)$,

S_2 - отказали оба элемента $\lambda_1 + \lambda_2$ и восстанавливаются $\mu_1 + \mu_2$. Такому состоянию соответствует вероятность $p_2(t)$.

Рассматриваемому случаю соответствует граф состояний на рис.1.41.

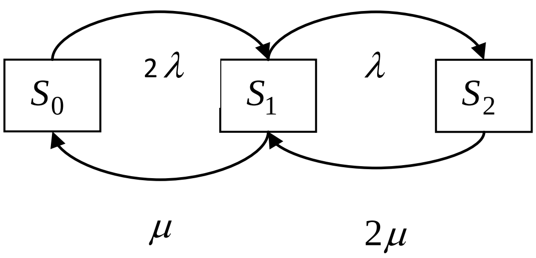


Рис.1.41. *Пример системы с восстановлением, состоящей из двух одинаковых элементов*

Составим дифференциальные уравнения Колмогорова, пользуясь мнемоническим правилом:

$$\dot{p}_0(t) = -2\lambda p_0(t) + \mu p_1(t);$$

$$\dot{p}_1(t) = 2\lambda p_0(t) - (\lambda + \mu) p_1(t) + 2\mu p_2(t);$$

$$\dot{p}_2(t) = \lambda p_1(t) - 2\mu p_2(t).$$

Сюда еще следует добавить одно уравнение $p_0(t)+p_1(t)+p_2(t)=1$, из которого выражаем $p_2(t)=1-p_0(t)-p_1(t)$ и, подставляя во второе уравнение системы, получим

$$\dot{p}_1(t)=2(\lambda-\mu)p_0(t)-(\lambda+3\mu)p_1(t)+2\mu.$$

Выразим $p_1(t)$ из первого уравнения системы дифференциальных уравнений Колмогорова и вычисляя производную $\dot{p}_1(t)$, подставим полученные выражения $p_1(t)$ и $\dot{p}_1(t)$ в последнее уравнение. В результате получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{p}_0(t)+3(\lambda+\mu)\dot{p}_0(t)+2(\lambda+\mu)^2 p_0(t)=2\mu^2,$$

общее решение которого будем искать в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$p_0(t)=P_0(t)+\tilde{p}_0(t).$$

Корни характеристического уравнения имеют значения $r_1=-(\lambda+\mu)$ и $r_2=-2(\lambda+\mu)$, следовательно, решение однородного уравнения получим в виде:

$$P_0(t)=C_1e^{-(\lambda+\mu)t}+C_2e^{-2(\lambda+\mu)t}.$$

Находя частное решение неоднородного уравнения, получим общее решение

$$p_0(t)=\frac{\mu^2}{(\mu+\lambda)^2}+C_1e^{-(\lambda+\mu)t}+C_2e^{-2(\lambda+\mu)t}.$$

Подставляя полученное выражение $p_0(t)$ и вычисляемую по нему производную $\dot{p}_0(t)$ в первое уравнение системы дифференциальных уравнений Колмогорова, получим выражение для $p_1(t)$:

$$p_1(t)=\frac{2\lambda\mu}{(\mu+\lambda)^2}+\frac{\lambda-\mu}{\mu}C_1e^{-(\lambda+\mu)t}-2C_2e^{-2(\lambda+\mu)t}.$$

Учитывая начальные условия $p_0(0)=1$ и $p_1(0)=0$, найдем произвольные постоянные $C_1=\dfrac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}$ и $C_2=\dfrac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2}$.

В итоге имеем

$$p_0(t)=\frac{1}{(\mu+\lambda)^2}\left[\mu^2+2\lambda\mu e^{-(\lambda+\mu)t}+\lambda^2e^{-2(\lambda+\mu)t}\right];$$

$$p_1(t)=\frac{2}{(\mu+\lambda)^2}\left[\lambda\mu+(\lambda-\mu)\lambda e^{-(\lambda+\mu)t}-\lambda^2e^{-2(\lambda+\mu)t}\right].$$

Функцию готовности найдем как сумму $p_0(t)$ и $p_1(t)$:

$$\Gamma_1(t)=\frac{1}{(\mu+\lambda)^2}\left[\mu^2+2\lambda\mu+2\lambda^2e^{-(\lambda+\mu)t}-\lambda^2e^{-2(\lambda+\mu)t}\right].$$

Если принять функцию готовности в качестве нестационарного коэффициента готовности, то входящие в нее постоянные слагаемые являются стационарным коэффициентом готовности. На рис.1.42 приведены графики функции готовности [12] для четырех вариантов резервирования (1-ый, рассмотрен выше – нагруженный резерв, восстановление без ограничений, 2-ой – нагруженный резерв, ограниченное восстановление, 3-ий – ненагруженный резерв, восстановление без ограничений, 4-ый – ненагруженный резерв, ограниченное восстановление) при $\lambda = 0{,}01$ 1/час и $\mu = 0{,}1$ 1/час.

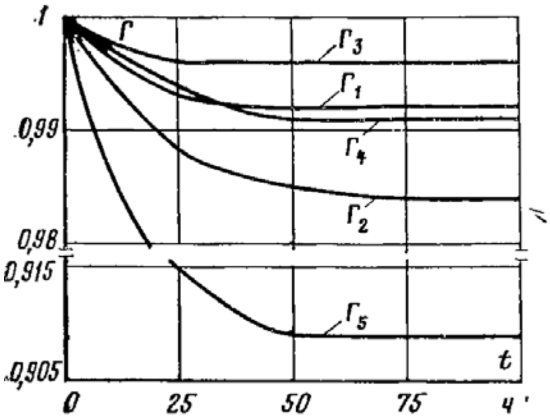


Рис.1.42. *Графики функции готовности для четырех вариантов резервирования*

Для сравнения на графике изображена функция готовности нерезервированной системы $\Gamma_5(t)$ с теми же значениями λ и μ.

1.6.2.7. Пример оценки вероятности безотказной работы микроЭВМ в составе бортовой аппаратуры космических аппаратов

Настоящий параграф подготовлен по материалам работы [9]. В стандарте РД 11 1003-2000 «Изделия полупроводниковой электроники. Метод прогнозирования вероятности безотказной работы (ВБР) в условиях низкоинтенсивного ионизирующего облучения» итоговая ВБР $P_\Sigma(t)$ определяется как произведение вероятности безотказной работы при отсутствии радиации $P_\lambda(t)$ на вероятность отсутствия радиационного отказа $P_p(t)$:

$$P_\Sigma(t) = P_\lambda(t) \cdot P_p(t).$$

В свою очередь,

$$P_\lambda(t) = e^{-\lambda t},$$

где λ — интенсивность отказов аппаратуры (для платы Micro PC 6024 $\lambda = 2{,}57 \cdot 10^{-6}$ 1/час), t — время эксплуатации (срок активного существования);

$$P_p(t) = \prod_{i=1}^{n} P_{pi}^{n}(t),$$

где $P_{pi}(t)$ — вероятность отсутствия радиационного отказа комплектующих микросхем, n — общее число микросхем.

Для отдельной микросхемы

$$P_{pi}(t) = 1 - e^{\left(K_p D\right)^2},$$

где K_p — коэффициент радиационного повреждения микросхемы, D — доза, накопленная за время эксплуатации.

Испытания показали, что наиболее критическим к радиации элементом на плате 6024 является СБИС флэш памяти типа Am28F020, которая фактически и определяет радиационную стойкость всей платы. Поэтому полагаем

$$P_{\Sigma 6024}(t) = P_{\lambda 6024}(t) \cdot P_{pAm28F020}(t).$$

Табл. 1.5. Вероятность безотказной работы MicroPC 6024 при сроке активного существования равном пяти годам.

Кратность резерва	**Режим и вид резервирования**	**Без воздействия радиации**	**Геостационарная орбита (D=800 рад/год)**
Без резерва	Непрерывная работа	0,893147	0,168227
	Сеансовый режим (2 часа в сутки)	0,990229	0,943254
2	«Горячий» резерв	0,988582	0,277925
	«Холодный» резерв	0,917560	0,755419
	ППР один раз в месяц	0,945066	0,935498
3	«Горячий» резерв	0,998780	0,386417
	«Холодный» резерв	0,999560	0,864222
	ППР один раз в месяц	0,962670	0,955894

Для определения K_p микросхемы Am28F020 проводились радиационные испытания при низкой мощности дозы (0,1 рад/с) в выключенном и включённом состояниях. В режиме периодического переключения была вычислена постоянная D_τ экспоненциальной функции, описывающей переходный процесс из включённого состояния в выключенное.

Результаты испытаний использовались для прогнозирования $P_{\Sigma 6024}(t)$ на геостационарной орбите при толщине алюминиевого защитного экрана 8 мм, в различных режимах и конфигурациях.

Полученные значения ВБР (см. таблицу 1.5) иллюстрируют существенное снижение надёжности при радиационном облучении и эффективность использования сеансового режима и «холодного» резерва в режиме периодического переключения.

Примеры решения задач

Пример 1.5

Система состоит из 25 однотипных элементов, соединенных последовательно. Средняя наработка на отказ системы -100 часов.

Определить:

- Безотказность системы в конце 50 часов работы.
- Частоту отказов системы в конце первого часа работы.
- Среднюю наработку до отказа элементов.

Р е ш е н и е. Имеем $n = 25$ и $T_c = 100$.

Средняя наработка до отказа основной системы определяется по формуле

$$T_c = \frac{T_i}{n}.$$

Отсюда находим наработку до отказа одного элемента

$$T_i = nT_c = 25 \cdot 100 = 2500\,год.$$

Также известно, что

$$T_c = \frac{1}{\lambda_c}.$$

Тогда $\lambda_c = \frac{1}{T_c} = 0{,}01\,год^{-1}$.

Безотказность системы или вероятность безотказной работы определяется по формуле $P_c(t) = e^{-\lambda_c t}$.

Тогда за 50 часов получим

$$P_c(50) = e^{-0{,}01 \cdot 50} = 0{,}61.$$

Частота отказов системы определяется по формуле $a_c(t) = \lambda_c e^{-\lambda_c t}$.

Расчитаем частоту отказов системы за один час работы:

$$a_c(1) = 0{,}01 e^{-0{,}01 \cdot 1} = 0{,}0099.$$

Пример 1.6

Система, которая состоит из 200 соединенных последовательно элементов, в конце первого часа работы удовлетворяет условию безотказности $P_c(t)$=0,97.

Определить:

- Минимально допустимую безотказность элементов.
- Частоту отказов системы в конце первого часа работы.
- Наработку на отказ одного элемента.

Р е ш е н и е. Имеем $n = 200$.

Вероятность безотказной работы системы вычисляется по формуле

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t}.$$

Если взять логарифм последнего выражения, то получим

$$\ln P_c(t) = -\lambda_c t.$$

Тогда $\lambda_c = -\dfrac{\ln P_c(t)}{t} = -\dfrac{\ln 0{,}97}{1} = 0{,}03046$.

Частота отказов системы определяется по формуле $a_c(t) = \lambda_c e^{-\lambda_c t}$.

А частота отказов системы в конце первого часа работы

$$a_c(1) = 0{,}03046 \cdot e^{-0{,}03046 \cdot 1} = 0{,}029.$$

Средняя наработка до отказа системы

$$T_c = \frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{0{,}03046} = 32{,}83 \text{ часа.}$$

Наработка до отказа одного элемента

$$T_i = nT_c = 200 \cdot 32{,}83 = 6566 \text{ часов}$$

Интенсивность отказов элементов

$$\lambda_i = \frac{\lambda_c}{n} = \frac{0{,}03046}{200} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}.$$

Минимально допустимую безотказность элементов найдем по формуле

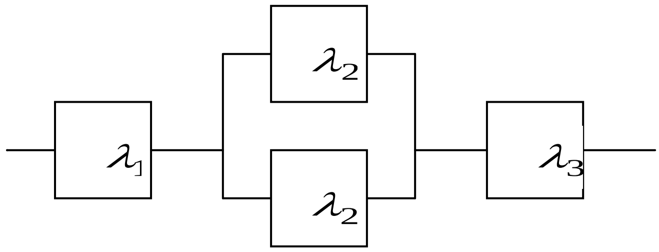
$$P_i(t) = e^{-\lambda_i t}.$$

В конце первого часа будем иметь

$$P_i(1) = e^{-1{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 1} = 0{,}999.$$

Пример 1.7

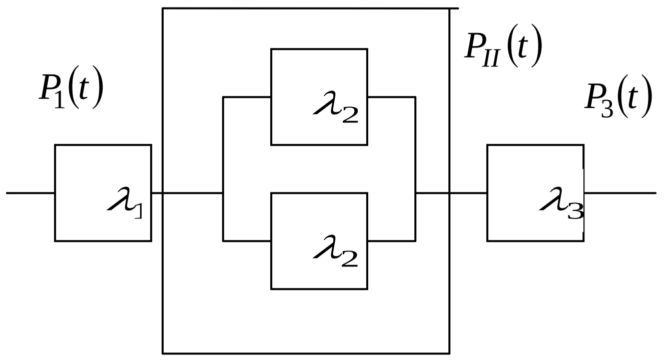
Найти среднюю наработку на отказ системы, схема которой изображена ниже, если известны интенсивности отказов элементов: $\lambda_1 = 0{,}3 \cdot 10^{-4}\ 1/\textit{год}$, $\lambda_2 = 0{,}4 \cdot 10^{-4}\ 1/\textit{год}$, $\lambda_3 = 0{,}5 \cdot 10^{-4}\ 1/\textit{год}$.



1) Средняя наработка на отказ системы определим по формуле

$$T_c = \int_0^\infty P_c(t)\,dt.$$

Структуру системы представим в виде



Тогда для этой схемы справедлива формула для ВБР:

$$P_c(t) = P_1(t) \cdot P_{II}(t) \cdot P_3(t),$$

где

$$P_{II}(t) = 1 - Q_{II}(t) = 1 - [1 - P_2(t)]^2 = 1 - 1 + 2P_2(t) - P_2^2(t) = 2P_2(t) - P_2^2(t).$$

Подставляя последнее выражение, получим

$$P_c(t) = P_1(t) \cdot \left[2P_2(t) - P_2^2(t)\right] \cdot P_3(t) = 2P_1(t)P_2(t)P_3(t) - P_1(t)P_2^2(t)P_3(t) =$$
$$= 2e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} - e^{-(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)t}.$$

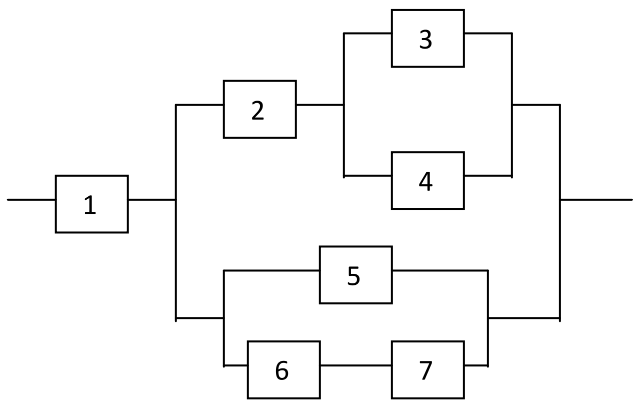
Интегрируя полученный результат, будем иметь

$$T_c = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3} = 10450 \text{ час.}$$

Пример 1.8

В конце первого часа работы безотказность элементов составляла:

P_1=0,99; P_2=0,95; P_3=0,85; P_4=0,8;
P_5=0,75; P_6=0,9; P_7=0,92.
Экспоненциальный закон распределения.



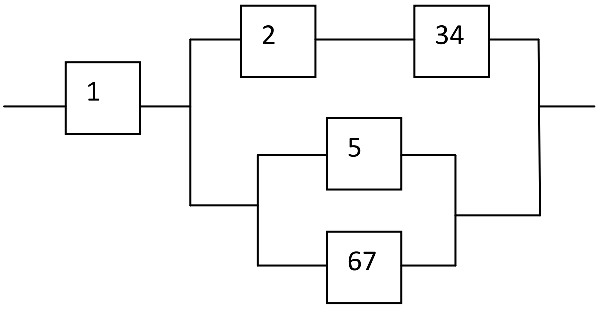
Определить:

1.Среднее время безотказной работы системы.

2.Безотказность системы в конце первого часа работы.

3.Частоту отказов в конце первого часа работы элемента № 5.

1) Р е ш е н и е. Преобразуем схему к следующему виду:



Теперь рассчитаем вероятности отказов и ВБР новых элементов:

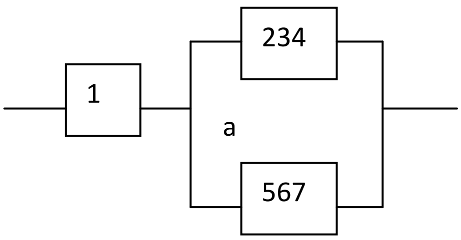
$$Q_{34} = Q_3 \cdot Q_4 = (1 - P_3)(1 - P_4) = (1 - 0{,}85)(1 - 0{,}8) = 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 0{,}03.$$

$$P_{34} = 1 - Q_{34} = 1 - 0{,}03 = 0{,}97.$$

$$P_{67} = P_6 \cdot P_7 = 0{,}9 \cdot 0{,}92 = 0{,}83.$$

$$Q_{67} = 1 - P_{67} = 1 - 0{,}83 = 0{,}17$$

Опять преобразуем схему:



Снова рассчитаем вероятности отказов и ВБР новых элементов

$$P_{234} = P_2 \cdot P_{34} = 0{,}95 \cdot 0{,}97 = 0{,}92.$$

$$Q_{234} = 1 - P_{234} = 1 - 0{,}92 = 0{,}08.$$

$$Q_{567} = Q_5 \cdot Q_{67} = (1 - P_5) \cdot Q_{67} = 0{,}25 \cdot 0{,}17 = 0{,}0425.$$

$$Q_a = Q_{234} \cdot Q_{567} = 0{,}08 \cdot 0{,}0425 = 0{,}0034.$$

$$P_a = 1 - Q_a = 1 - 0{,}0034 = 0{,}9966.$$

Теперь ВБР системы имеет вид и значение:

$$P_c = P_1 \cdot P_a = 0{,}99 \cdot 0{,}9966 = 0{,}9866.$$

Известно, что безотказность системы имеет вид

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t}.$$

Если взять логарифм последнего выражения, то получим

$$\ln P_c(t) = -\lambda_c t.$$

Тогда $\lambda_c = -\dfrac{\ln P_c(t)}{t} = -\dfrac{\ln 0{,}9866}{1} = 0{,}0135.$

Среднее время безотказной работы системы вычислим по формуле

$$T_c = \frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{0{,}0135} = 74 \text{ час.}$$

Частота отказов пятого элемента $a_5(t)=\lambda_5 e^{-\lambda_5 t}$.

Чтобы найти интенсивность отказов пятого элемента, воспользуемся формулой для ВБР пятого элемента

$$P_5(t)=e^{-\lambda_5 t}.$$

Из последней формулы получим $\lambda_5=-\dfrac{\ln P_5(t)}{t}=-\dfrac{\ln 0{,}75}{1}=0{,}2877$.

Тогда частота отказов пятого элемента в конце первого часа работы

$$a_5(1)=0{,}2877\cdot e^{-0{,}2877\cdot 1}=0{,}216.$$

Задачи для самостоятельной работы

№ 1.3. Система состоит из 2-х устройств, соединенных последовательно. Средняя наработка на отказ каждого устройства соответственно равна 250 и 290 часов. Время непрерывной работы системы - 150 часов. Экспоненциальный закон распределения.

Определить:

- Частоту отказов системы в целом и каждого устройства отдельно.
- Среднюю наработку на отказ системы.
- Время непрерывной работы системы, при которой безотказность системы не ниже 0,95.

№ 1.4. Для системы с последовательно соединенными элементами справедлив экспоненциальный закон распределения. Среднее время безотказной работы системы составляет 350 часов.

Определить:

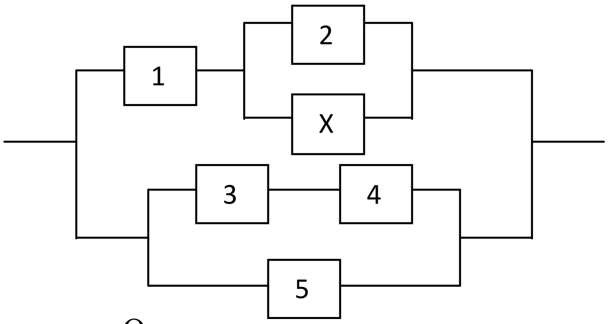
- Безотказность системы в конце 50-х часов работы.
- Время работы системы, за которое ее безотказность достигнет величины 0,85.
- Интенсивность отказов элементов, если система состоит из 35 однотипных элементов.

№ 1.5. Система с экспоненциальным законом распределения содержит 100 идентичных элементов, соединенных последовательно, в конце первых часов работы характеризовалась безотказностью 0,997.

Определить:

- Безотказность системы в конце первого часа работы, если она будет содержать 200 идентичных элементов.
- Частоту отказов начальной системы в конце первого часа работы.
- Среднюю наработку на отказ системы, которая содержит 120 элементов, а также среднюю наработку на отказ одного элемента.

№ 1.6. Экспоненциальный закон распределения. Интенсивность отказов системы
0,00005 1/час. Время работы системы 30 часов.

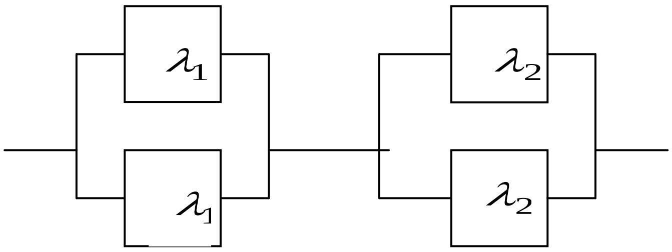


P_1=0,95; P_2=0,8; P_3=0,93; P_4=0,95; P_5=0,8.

Определить:

- Интенсивность отказов элемента Х.
- Частоту отказов элемента 5.
- Частоту отказов всей системы.

№ 1.7. Найти среднюю наработку на отказ системы, если известны интенсивности отказов элементов: $\lambda_1 = 0,2 \cdot 10^{-4}$ 1/час, $\lambda_2 = 0,4 \cdot 10^{-4}$ 1/час.



№ 1.8. Интенсивность отказов навигационного компьютера составляет $\lambda_0 = 0,45 \cdot 10^{-4}$ 1/час. Его дублирует такой же навигационный компьютер, который находится в режиме ненагруженного резерва с $\lambda_1 = 0,1 \cdot 10^{-4}$ 1/час. Определить безотказность системы за 10000 часов.

№ 1.9. У гирокомпаса интенсивность отказов $\lambda_0 = 0,5 \cdot 10^{-5}$ 1/час. Его дублирует такой же гирокомпас, который находится в режиме ожидания (облегченного резерва) с $\lambda_1 = 0,1 \cdot 10^{-5}$ 1/час. Определить безотказность системы за 10000 часов.

1.7. Надежность программного обеспечения

Как было указано вначале, помимо аппаратурной существует программная надежность, которая зависит от надежности программного обеспечения вычислительных средств системы [5].

В соответствии с общим определением, **надежность программного обеспечения (ПО)** – это способность программного продукта безотказно выполнять определенные функции при заданных условиях в течение заданного периода времени.

Степень надежности характеризуется вероятностью безотказной работы программного продукта в течение определенного периода времени.

Существует *четыре* основные составляющие функциональной надежности программных систем [5]:

– *безотказность* - свойство программы выполнять свои функции во время эксплуатации;

– *работоспособность* - свойство программы корректно (так как ожидает пользователь) работать весь заданный период эксплуатации;

– *безопасность* - свойство программы в ходе ее выполнения гарантировать безопасность для людей и окружающих систем;

– *защищенность* - свойство программы противостоять случайным или умышленным вторжениям в нее.

На надежность ПО влияют следующие факторы:

– взаимодействие ПО с внешней средой (программно-аппаратные средства, трансляторы, операционные системы). Этот фактор вносит наименьший вклад в надежность ПО при современном уровне надежности аппаратуры, операционных систем и компиляторов;

– взаимодействие с человеком (разработчиком и пользователем);

– организация ПО (проектирование, постановка задачи и способы их достижения и реализации) и качество его разработки. Этот фактор вносит наибольший вклад в надежность;

– тестирование.

На качество и, следовательно, надежность ПО влияет его сложность.

В борьбе со сложностью ПО используются две концепции**:**

Иерархическая структура. Иерархия позволяет разбить систему по уровням понимания (абстракции, управления). Концепция уровней позволяет анализировать систему, скрывая несущественные для данного уровня детали реализации других уровней. Иерархия позволяет понимать, проектировать и описывать сложные системы.

Независимость. В соответствии с этой концепцией, для минимизации сложности, необходимо максимально усилить независимость элементов системы. Это означает такую декомпозицию системы, чтобы её высокочастотная динамика была заключена в отдельных компонентах, а межкомпонентные взаимодействия (связи) описывали только низкочастотную динамику системы.

При разработке ПО важную роль играют *методы обнаружения ошибок*, которые базируются на введении в ПО системы различных видов избыточности:

Временная избыточность. Использование части производительности ЭВМ для контроля исполнения и восстановления работоспособности ПО после сбоя.

Информационная избыточность. Дублирование части данных информационной системы для обеспечения надёжности и контроля достоверности данных.

Программная избыточность включает в себя: взаимное недоверие (компоненты системы проектируются, исходя из предположения, что другие компоненты и исходные данные содержат ошибки, и должны пытаться их обнаружить); немедленное обнаружение и регистрацию ошибок; выполнение одинаковых функций разными модулями системы и сопоставление результатов обработки; контроль и восстановление данных с использованием других видов избыточности.

В соответствии с ГОСТ 19.004-80 различают следующие *виды работ, направленные на устранение ошибок в ПО*:

- проверка;
- отладка;
- испытание (тестирование) программы.

Чем интенсивнее использование программного изделия (ПИ), тем быстрее выявляются в нем ошибки. На рис.1.43 приведена зависимость числа обнаруженных ошибок от числа использующих ПИ пользователей (K – число пользователей, $K_1 > K_2 > K_3$).

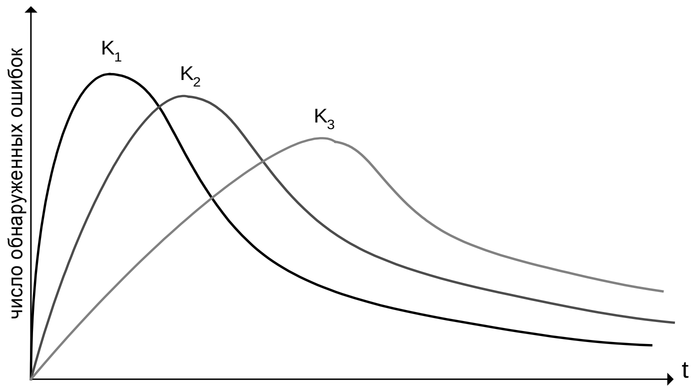


Рис. 1.43. *Интенсивность обнаружения ошибок от интенсивности использования*

Частота появления ошибок в ПО, в зависимости от типа ошибок, представлена в таблице 1.5.

Таблица 1.5 – *Процентные частоты появления ошибок в ПО*

ТИП ОШИБКИ	ЧАСТОТА ПОЯВЛЕНИЯ, %
Неполная или ошибочная спецификация	28
Отклонение от спецификации	12
Пренебрежение правилами программирования	10
Ошибочная выборка данных	10
Ошибочная логика или последовательность операций	12
Ошибочные арифметические операции	9
Нехватка времени для решения	4
Ошибка обработки прерываний	4
Ошибка в исходных данных	3
Неточная запись	8

Как видно из табл. 1.5, основное количество ошибок возникает из-за неверной спецификации или ТЗ. Из таблицы следует, на что нужно обращать особое внимание при проведении валидации и верификации ПО (**верификация** отвечает на вопрос, правильно ли и качественно ли создана программа, а **валидация** (или аттестация) - на вопрос правильно ли работает программа).

1.7.1. Тестирование ПО

Качество программного продукта характеризуется [17] набором свойств, определяющих, насколько продукт "хорош" с точки зрения заинтересованных сторон, таких как заказчик продукта, спонсор, конечный пользователь, разработчики и тестировщики продукта, инженеры поддержки, сотрудники отделов маркетинга, обучения и продаж. Каждый из участников может иметь различное представление о продукте и о том, насколько он хорош или плох, то есть о том, насколько высоко качество продукта. Таким образом, постановка задачи обеспечения *качества продукта* выливается в задачу определения заинтересованными лицами критериев качества продукции и затем нахождения оптимального решения, удовлетворяющего этим критериям. *Тестирование* является одним из наиболее устоявшихся способов обеспечения качества разработки программного обеспечения и входит в набор эффективных средств современной системы обеспечения *качества программного продукта*.

Важным этапом жизненного цикла ПО, определяющим качество и надёжность системы, является **тестирование**. *Тестирование* - процесс выполнения программ с намерением найти ошибки и включает в себя следующие этапы:

- автономное тестирование;
- тестирование сопряжений;
- тестирование функций;
- комплексное тестирование;
- тестирование полноты и корректности документации;
- тестирование конфигураций.

Надежность ПО повышается также с помощью применения различных *методов тестирования*. Полное тестирование ПО невозможно. Обычно применяют следующие виды тестирования:

– тестирование ветвей;

– математическое доказательство правильности алгоритма решения задачи (в некоторых работах именно в этом смысле употребляется слово верификация).

– символическое тестирование (с помощью специально подобранных тестовых наборов), еще называется статическим тестированием. Удобно при локализации ошибки, проявление которой выявлено при конкретном узком или строго заданном диапазоне входных значений;

– динамическое тестирование (с помощью динамически генерируемых входных данных), что удобно при быстром тестировании во всем широком диапазоне входных параметров;

– тестирование путей выполнения программы;

– функциональное тестирование;

– проверки по времени выполнения программы;

– проверка по использованию ресурсов и стрессовое тестирование.

С технической точки зрения ***тестирование ПО*** заключается в выполнении ПО на некотором множестве исходных данных и сверке получаемых результатов с заранее известными (эталонными). Целью является определение соответствия различных свойств и характеристик приложения заданным свойствам.

Как одна из основных фаз процесса разработки программного продукта (*Дизайн - Разработка кода - Тестирование*), *тестирование* характеризуется достаточно большим вкладом в суммарную трудоемкость разработки продукта. Известна [17] оценка распределения трудоемкости между фазами создания программного продукта:

40% - 20% - 40% из чего следует, что наибольший эффект в снижении трудоемкости может быть получен прежде всего на фазах Design и *Testing*. Поэтому основные вложения в автоматизацию или генерацию кода следует осуществлять, прежде всего, на этих фазах. Хотя в современном индустриальном программировании *автоматизация тестирования* является широко распространенной практикой, в то же время технология верификации требований и спецификаций пока делает только свои первые шаги. Задачей ближайшего будущего является движение в сторону такого распределения трудоемкости: 60% - 20% - 20%, чтобы суммарная цена обнаружения большинства дефектов стремилась к минимуму за счет обнаружения преимущественного числа на наиболее ранних фазах разработки программного продукта.

Интенсивность обнаружения ошибок на единицу затрат и *надежность* тесно связаны со временем тестирования и, соответственно, с гарантией качества продукта (рис.1.44). Чем больше трудозатрат вкладывается в процесс тестирования, тем меньше ошибок в продукте остается незамеченными. Однако совершенство в индустриальном программировании имеет пределы, которые прежде всего связаны с затратами на получение программного продукта, а также с избытком качества, которое не востребовано заказчиком приложения. Нахождение оптимума – очень ответственная задача тестировщика и менеджера проекта.

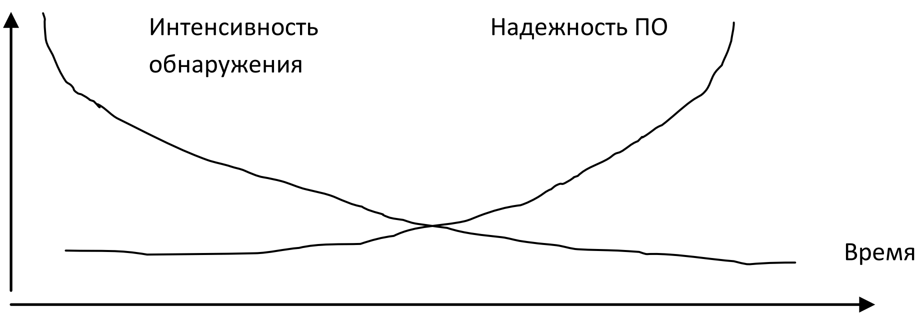


Рис.1.44. *Зависимость интенсивности обнаружения ошибок и надежности ПО от времени тестирования.*

Движение к уменьшению числа оставшихся ошибок или к качеству продукта приводит к применению различных методов отладки и тестирования в процессе создания продукта.

1.7.2. Основные показатели надежности ПО

К основным показателям надежности ПО относятся рассмотренные выше показатели [17]:

- *вероятность безотказной работы;*
- *вероятность отказа;*
- *интенсивность отказов;*
- *средняя наработка на отказ;*
- *среднее время восстановления;*
- *коэффициент готовности К.*

Необходимо стремиться повышать уровень надежности ПО, но достижение 100%-ной надежности лежит за пределами возможного. Количественные показатели надежности могут использоваться для оценки достигнутого уровня технологии программирования, для выбора метода проектирования будущего программного средства.

Основным средством определения количественных показателей надежности являются модели надежности, под которыми понимают математическую модель, построенную для оценки зависимости надежности от заранее известных или оцененных в ходе создания программных средств параметров.

Все приведенные показатели надежности ПО характеризуют наличие ошибок программы (производственных дефектов), но ни один из них не уточняет характер этих ошибок и возможные их последствия. Поэтому предложено [5] ввести новый показатель надежности ПО – *среднюю тяжесть ошибок* (СТО):

$$B = \frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{m}\left(b_i p_i z_i\right)$$

где Q – вероятность сбоя ПО; b_i – функция принадлежности тяжести последствий ошибки, возникшей при i-ом наборе входных данных, к максимально тяжелым последствиям; p_i – вероятность ввода i-го набора входных данных при эксплуатации ПО; z_i – дихотомическая переменная, равная 1, если при i-ом наборе входных данных был зафиксирован сбой, и 0 в противном случае;

m – общее число наборов входных данных.

Значение показателя надежности СТО лежит в интервале [0;1]. Чем ближе значение СТО к единице, тем тяжелее последствия ошибок ПО, и тем менее надежна программа. Близость СТО к нулю показывает незначительность последствий ошибок программы.

Введение нового показателя надежности ПО позволило различать по надежности программные продукты, вероятности сбоя которых имеют один и тот же порядок. К тому же, говоря о надежности ПО, пользователь желает получить не столько безошибочное ПО, сколько безопасное. А именно безопасность ПО характеризует СТО. Значение этого показателя субъективно и может быть различным для одного и того же программного продукта в зависимости от области его применения. Это объясняется тем, что при использовании конкретного ПО, например, для выполнения студенческих расчетов и для выполнения конструкторских расчетов в космической промышленности последствия ошибок программы – несопоставимы. В ряде случаев, если к ПО предъявляются жесткие требования, лучше оценивать максимальную тяжесть ошибок ПО.

Таким образом, оценивая вероятность сбоя ПО и СТО ПО, получаем многостороннюю оценку надежности ПО.

1.7.3. Модели надежности ПО

Все модели надежности можно классифицировать [5] по тому, какой из перечисленных процессов они поддерживают (предсказывающие, прогнозные, измеряющие и т.д.). Нужно отметить, что модели надёжности, которые в качестве исходной информации используют данные об интервалах между отказами, можно отнести и к измеряющим, и к оценивающим в равной степени. Некоторые модели, основанные на информации, полученной в ходе тестирования ПО, дают возможность делать прогнозы поведения ПО в процессе эксплуатации.

Аналитические модели дают возможность рассчитывать количественные показатели надежности, основываясь на данных о поведении программы в процессе тестирования (измеряющие и оценивающие модели).

Эмпирические модели базируются на анализе структурных особенностей программ. Они рассматривают зависимость показателей надёжности от числа межмодульных связей, количества циклов в модулях и т.д. Часто эмпирические модели не дают конечных результатов показателей надёжности, однако они включены в классификационную схему, так как развитие этих моделей позволяет выявлять взаимосвязь между сложностью ПО и его надежностью. Эти модели можно использовать на этапе проектирования ПО, когда осуществляется разбивка на модули и известна его структура.

Аналитические модели представлены двумя группами: динамические модели и статические. В *динамических* моделях появление отказов рассматривается во времени. В *статических* моделях появление отказов не связывают со временем, а учитывают только зависимость количества ошибок от числа тестовых прогонов (по области ошибок) или зависимость количества ошибок от характеристики входных данных (по области данных).

Для использования динамических моделей необходимо иметь данные о появлении отказов во времени. Если фиксируются интервалы каждого отказа, то получается непрерывная картина появления отказов во времени (группа динамических моделей с непрерывным временем). С другой стороны, может фиксироваться только число отказов за произвольный интервал времени.

1.7.3.1. Динамические модели надежности ПО

Модель Шумана

Исходные данные для модели Шумана, которая относится к динамическим моделям дискретного времени, собираются в процессе тестирования ПО в течение фиксированных или случайных временных интервалов. Каждый интервал - это стадия, на котором выполняется последовательность тестов и фиксируется некоторое число ошибок.

Модель Шумана может быть использована при определенном образе организованной процедуре тестирования. Использование модели Шумана предполагает, что тестирование поводиться в несколько этапов. Каждый этап представляет собой выполнение на полном комплексе разработанных тестовых данных. Выявление ошибки регистрируется, но ошибки не исправляются. По завершении этапа, на основе собранных данных о поведении ПО на очередном этапе тестирования может быть использована модель Шумана для расчета количественных показателей надежности. При использовании модели Шумана предполагается, что исходное количество ошибок в программе постоянно, и в процессе тестирования может уменьшаться по мере того, как ошибки выявляются и исправляются.

Предполагается, что до начала тестирования в ПО имеется E_T ошибок. В течение времени тестирования τ в системе обнаруживается ε_C ошибок в расчете на команду в машинном языке.

Удельное число ошибок на одну машинную команду, оставшуюся в системе после времени тестирования τ, равно:

$$\varepsilon_r(\tau) = \frac{E_T}{I_T} - \varepsilon_C(\tau), \qquad (1.115)$$

где I_T – общее число машинных команд, которое предполагается в рамках этапа тестирования.

Предполагается, что значение интенсивности отказов $\lambda(t)$ пропорционально числу ошибок $\varepsilon_r(\tau)$, оставшихся в ПО после израсходованного на тестирование времени τ:

$$\lambda(t) = C \cdot \varepsilon_r(\tau), \qquad (1.116)$$

где C - некоторая константа, t – время работы ПО без отказа.

Тогда, для экспоненциального закона распределения наработки, функция надежности, или вероятность безотказной работы на интервале времени от 0 до t, равна:

$$P(t) = e^{-C\left[\frac{E_T}{I_T} - \varepsilon_C(\tau)\right]t}, \qquad (1.117)$$

Вычисляя по формуле (1.41) среднюю наработку на отказ, получим

$$T_{cp} = \frac{1}{C\left[\dfrac{E_T}{I_T} - \varepsilon_C(\tau)\right]}. \qquad (1.118)$$

Из величин, входящих в последние формулы, не известны начальное значение ошибок в ПО E_T и коэффициент пропорциональности C. Для их определения прибегают к следующим рассуждениям. В процессе тестирования собирается информация о времени и количестве ошибок на каждом прогоне, т.е общее время тестирования τ складывается из времени каждого прогона:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n.$$

Предполагая, что интенсивность появления ошибок постоянна и равна λ, можно вычислить её как число ошибок в единицу времени:

$$\lambda = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{k} A_i, \qquad (1.119)$$

$$T_{cp} = \frac{1}{\lambda}, \qquad (1.120)$$

где A_i – количество ошибок на i-ом прогоне.

Имея данные для двух различных моментов тестирования τ_a и τ_b, которые выбираются произвольно с учетом требования, чтобы $\varepsilon_c(\tau_b) > \varepsilon_c(\tau_a)$, можно сопоставить уравнения (1.118) и (1.120) при τ_a и τ_b:

$$\lambda\left(\tau_a\right)=C\left[\frac{E_T}{I_T}-\varepsilon_C\left(\tau_a\right)\right]; \tag{1.121}$$

$$\lambda\left(\tau_b\right)=C\left[\frac{E_T}{I_T}-\varepsilon_C\left(\tau_b\right)\right]. \tag{1.122}$$

Вычисляя отношения последних двух выражений, получим

$$E_T=I_T\cdot\frac{\varepsilon_C\left(\tau_a\right)\lambda\left(\tau_b\right)-\varepsilon_C\left(\tau_b\right)\lambda\left(\tau_a\right)}{\lambda\left(\tau_b\right)-\lambda\left(\tau_a\right)}. \tag{1.123}$$

Подставив полученную оценку параметров E_T в выражение (1.121), получим оценку для второго неизвестного параметра:

$$C=\frac{\lambda(\tau_a)}{\dfrac{E_T}{I_T}-\varepsilon_C(\tau)}. \tag{1.124}$$

Получив неизвестные E_T и C, можно рассчитать надежность программы по формуле (1.117).

Достоинство этой модели заключается в том, что можно исправлять ошибки, внося изменения в текст программы в ходе тестирования, не разбивая процесс на этапы, чтобы удовлетворить требованию постоянства числа машинных инструкций.

Модель La Padula

По этой модели выполнение последовательности тестов производиться в m этапов. Каждый этап заканчивается внесением изменений (исправлений) в ПО. Возрастающая функция надёжности базируется на числе ошибок, обнаруженных в ходе каждого тестового прогона.

Надёжность ПО в течение i –го этапа:

$$R(t)=R(\infty)-\frac{A}{i}, \tag{1.125}$$

где $i=1,2,...,m$; A – параметр роста, $R(\infty)=\lim\limits_{i\to\infty}R(i)$ - предельная надежность ПО. Эти неизвестные величины можно найти, решив следующие уравнения:

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{S_i-m_i}{S_i}-R(\infty)+\frac{A}{i}\right]=0, \tag{1.126}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\left(\frac{S_i-m_i}{S_i}-R(\infty)+\frac{A}{i}\right)\frac{1}{i}\right]=0, \tag{1.127}$$

где S_i – число тестов; m_i – число отказов во время i -го этапа; m – число этапов;

Преимущество данной модели заключается в том, что она является прогнозной и, основываясь на данных, полученных в ходе тестирования, дает возможность предсказать вероятность безотказной работы программы на последующих этапах её выполнения.

1.7.3.2. Статические модели надежности ПО

Статические модели принципиально отличаются от динамических прежде всего тем, что в них не учитывается время появления ошибок в процессе тестирования и не используется никаких предположений о поведении функции риска. Эти модели строятся на твердом статическом фундаменте.

Модель Миллса

Использование этой модели предполагает необходимость перед началом тестирования искусственно вносить в программу (засорять) некоторое количество известных ошибок. Ошибки вносятся случайным образом и фиксируются в протоколе искусственных ошибок. Специалист, проводящий тестирование, не знает ни количества ошибок, ни характера внесенных ошибок до момента оценки показателей надежности по модели Миллса. Предполагается, что все ошибки (как естественные, так и искусственно внесенные) имеют равную вероятность быть найденными в процессе тестирования.

Тестируя программу в течение некоторого времени, собирается статистика об ошибках. В момент оценки надежности по протоколу искусственных ошибок все ошибки делятся на собственные и искусственные. Формула Миллса дает возможность оценить первоначальное количество ошибок в программе N:

$$N = \frac{S \cdot n}{V} \tag{1.128}$$

где S – количество искусственно внесенных ошибок, n – число найденных собственных ошибок, V – число обнаруженных к моменту оценки искусственных ошибок.

Достоинством модели является простота применения математического аппарата, наглядность и возможность использования в процессе тестирования.

Модель Липова

Модель Липова – это модифицированная модель Миллса, которая учитывает вероятность обнаружения ошибки при использовании различного числа тестов. Если сделать то же предположение, что и модель Миллса, т.е. что собственные и искусственные ошибки имеют равную вероятность быть найденными, то вероятность обнаружения n собственных и V внесенных ошибок равна:

$$Q(n,V) = \frac{m}{n+V} \cdot q^{n+V} \cdot (1-q)^{m-n-V} \cdot \frac{\frac{N}{n} \cdot \frac{S}{V}}{\left(\frac{N+S}{n+V}\right)}, \tag{1.129}$$

где $m\,m$ – количество тестов, используемых при тестировании; q - вероятность обнаружения ошибки в каждом из m тестов, рассчитывается по формуле:

$$q = \frac{n+V}{n}, \tag{1.130}$$

S – общее количество искусственно внесенных ошибок; N – количество собственных ошибок, имеющихся в ПО до начала тестирования.

Для использования модели Липова должны выполняться следующие условия:

$$N \geq n \geq 0;$$
$$S \geq V \geq 0; \quad (1.131)$$
$$m \geq n + V \geq 0.$$

Модель Липова дополняет модель Миллса, давая возможность оценить вероятность обнаружения определенного количества ошибок к моменту оценки.

Модель последовательности испытаний Бернулли

Из эмпирических моделей можно выделить модель последовательности испытаний Бернулли. В работе [21] рассмотрен для простоты класс программ, имеющих единственный вход и выход, т.е. не содержащих бесконечных циклов. Фазу выполнения программы от начала до завершения будем называть запуском. Все возможные результаты запуска разобьем на два класса: правильные и неправильные (ошибочные). Будем считать, что любой результат всегда можно отнести к одному из этих классов. (Ясно, что по этому вопросу возможны разногласия между изготовителями программы и пользователями, однако будем предполагать, что имеется какой-то общий критерий, например, "клиент всегда прав".) Рассмотрим классическую вероятностную модель последовательности испытаний Бернулли. Пространство элементарных событий в этой модели содержит $2n$ точек, где n - число испытаний (в данном случае под испытанием подразумевается запуск программы). Каждый запуск программы имеет два исхода: правильный и неправильный. Обозначим вероятность неправильного исхода p, а вероятность правильного - $(1-p)$. Вероятность того, что из n запусков k приведут к неправильному результату, выражается хорошо известной формулой биномиального распределения [21]:

$$P(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad (1.132)$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ - число сочетаний.

Вероятность p априори неизвестна, но по результатам запусков известны n и k. Величина $P(k)$ как функция p имеет максимум при $p = \dfrac{k}{n}$. В качестве меры надежности программы можно принять величину

$$R = 1 - \frac{k}{n} = \frac{n-k}{n}, \quad (1.133)$$

значения которой (от 0 до 1) согласуются с общепринятым смыслом термина надежность: например, если все запуски окончились с ошибочным результатом ($k = n$), то надежность - нулевая.

Наиболее существенное предположение в данной модели состоит в том, что запуски программы считаются независимыми. Это означает, что результаты предыдущих запусков не дают никакой информации о результатах следующего. Ясно, что это предположение на практике выполняется не всегда: например, повторный запуск с теми же входными данными даст, очевидно, тот же самый результат.

Следует отметить, что изготовитель программы и ее пользователь располагают разной информацией о ней. Например, изготовителю заведомо известна логика программы, так что по результатам запуска с некоторыми исходными данными он иногда может точно предсказать результаты запусков с другими исходными данными (на этом, в конечном счете, основана любая методика тестирования), и в этом смысле предположение о независимости испытаний не выполняется. Однако пользователя редко интересует устройство программы, для него важно лишь одно: выполняет ли она требуемые функции, поэтому у пользователя нет оснований считать запуски зависимыми. Если же имеется желание использовать информацию об устройстве программы при оценке ее надежности, то следует придумать какую-то более сложную вероятностную модель, которая бы ее учитывала.

Формула (1.133) позволяет оценить надежность программы по результатам ее запусков. Следует особо остановиться на двух предельных случаях: $k = n$ (нулевая надежность) и $k = 0$ (абсолютная надежность). В обоих случаях результаты не следует интерпретировать буквально: нет никаких гарантий того, что очередной запуск приведет к тому же результату, что и предыдущие. Однако с точки зрения пользователя эти случаи совершенно разные. Если нулевая надежность свидетельствует о том, что программа явно непригодна для эксплуатации, то показатель абсолютной надежности не должен вводить в заблуждение: такой вывод нельзя делать по результатам даже очень большого числа запусков. Следует подчеркнуть, что для оценки надежности в этом случае необходимо рассмотреть другие вероятностные модели.

Из формулы (1.133) следует, что оценка надежности программы растет с увеличением числа ее запусков по гиперболическому закону. Это подтверждает интуитивно ясное соображение о том, что программа тем надежнее, чем больше опыт ее эксплуатации, который зависит как от интенсивности использования программы, так и от тиража компьютера, на котором она запускается. Таким образом, надежность программ для персональных компьютеров типа IBM PC, общий тираж которых составляет в настоящее время сотни миллионов, на несколько порядков выше аналогичных программ для специализированных процессоров (если, конечно, такие программы действительно существуют и эксплуатируются).

Известно утверждение, что ошибка в программе обходится тем дороже, чем позже она обнаружена. На самом же деле дорого обходится не ошибка, а опыт эксплуатации программы (т.е. общее количество ее запусков), независимо от того, проявились ошибки или нет. Перед пользователем программы, в которой проявились ошибки, возникает дилемма: продолжать ее эксплуатировать или установить модифицированную версию (разумеется, речь не идет о тех случаях, когда последствия ошибок могут быть катастрофическими). Следует еще раз подчеркнуть, что если программа подвергалась модификациям (в частности, в ней исправлялись ошибки), то при оценке надежности следует учитывать только запуски, выполненные с момента последней модификации: в результате модификации получается новая программа, с другим (возможно, худшим) показателем надежности, и вся прежняя статистика должна быть аннулирована. Этим частично объясняется тот факт, что пользователи порой предпочитают обновленным версиям программ старые, проверенные, которые эксплуатировались длительное время.

Стремление разработчиков создавать бинарно совместимые семейства микропроцессоров находит дополнительное объяснение с позиций надежности программного обеспечения: если бы это удалось в полной мере, то опыт эксплуатации программ не приходилось бы аннулировать при переходе на новый тип процессора, что способствовало бы существенному повышению надежности использующихся программ.

Можно ли сравнивать характеристики надежности аппаратуры и компьютерной программы? Как известно, надежность физического устройства меняется со временем: в начале эксплуатации она растет (происходит "приработка" изделия), затем некоторое время остается постоянной и, наконец, начинает уменьшаться (эффект износа или "старения"). Говоря о надежности аппаратуры, имеют в виду именно среднюю фазу, на которой надежность постоянна. Автором [21] отмечается тот факт, что компьютерная программа не изнашивается, так что последней фазы для нее не существует. Однако первая фаза ("приработки" программы) тоже отсутствует: коррекция программы (независимо от причин, по которым она выполнялась) аналогична внесению изменений в конструкцию физического устройства, в результате чего получается новое устройство, с другим показателем надежности.

Контрольные вопросы:

1. Что такое надежность ПО?
2. Какие факторы влияют на надежность ПО?
3. Что такое тестирование ПО?
4. Какова на сегодня оценка распределения трудоемкости между фазами создания программного продукта (дизайн – разработка кода – тестирование)?
5. Какие существуют модели надежности ПО?
6. Каковы особенности динамических моделей?
7. Каковы особенности статических моделей?

2. Основы технической диагностики

2.1. Средства контроля и диагностики

Современные навигационные системы (НС), в особенности автономные НС, характеризуются структурной и информационной избыточностью [11]. Это вызвано необходимостью повышения надежности и точности НС.

Примерный состав современной НС изображен на рис.2.1.

В данную НС входят несколько подсистем, среди которых

- инерциальные навигационные системы (ИНС);
- измерители скорости (ИС);
- приемник сигналов спутниковой навигационной системы (СНС);
- курсовые системы (гирокомпасы, гиромагнитные компасы и курсовертикали);
- навигационный компьютер или бортовая ЭВМ, осуществляющие комплексную обработку информации.

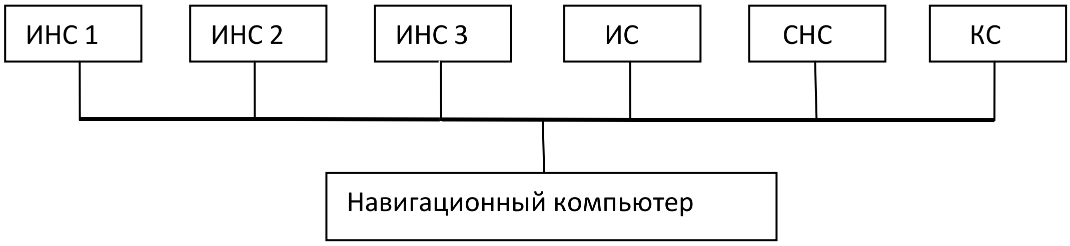


Рис.2.1. *Состав современной навигационной системы*

Структуру элемента (подсистемы) НС можно представить в виде трех последовательно включенных блоков: датчиков информации, преобразователей информации из аналоговой формы в цифровую и устройств цифровой обработки информации (рис.2.2).

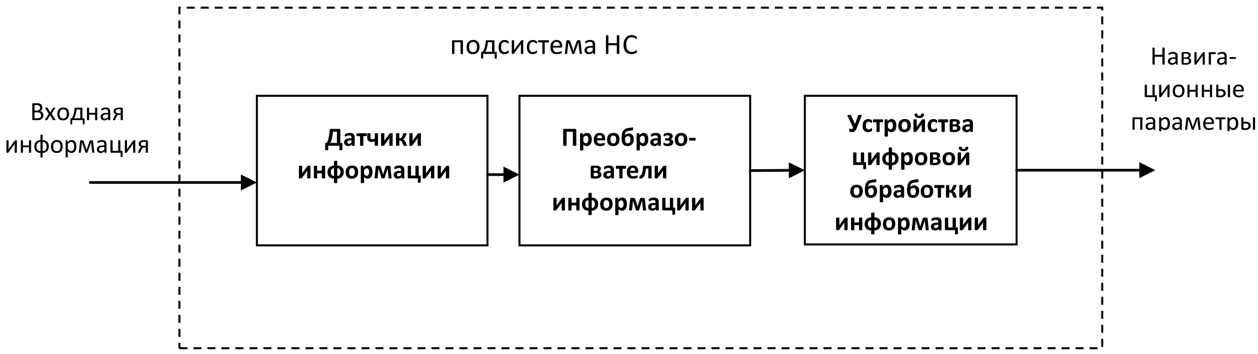


Рис.2-2. *Структура подсистемы навигационной системы*

Приведенная на рис.2.2 структура соответствует одной из подсистем НС, изображенных на рис.2.1.

Практически все современные бортовые приборы и системы оснащаются средствами КОНТРОЛЯ и ДИАГНОСТИКИ (КД), которые часто объединяют в единую систему. Рассмотрим особенности системы КД НС.

При корректном построении системы КД НС все компоненты подсистемы НС должны быть охвачены средствами КД.

На практике наиболее эффективные варианты технической реализации решения задачи КД удается найти для устройств цифровой обработки информации. Последние обычно представляют собой специализированный компьютер или локальную вычислительную сеть. Применение тестовых методов КД в отношении компьютера оказывается возможным благодаря принятой во всех современных компьютерах магистральной организации. При этом входы компьютеров доступны для управления, их выходы – для наблюдения, а тестовые средства КД реализуются в виде программных модулей.

Производительность используемых компьютеров выбирается таким образом, чтобы у них возникал ресурс свободного от обработки навигационной информации времени. Этот ресурс расходуется на проведение **тестового** КД как компьютера, так и других устройств НС.

Труднее реализовать задачу КД в отношении преобразователей информации:

- во-первых, практически отсутствует ресурс времени из-за непрерывности процесса измерения,
- во-вторых, значительны затраты на реализацию функциональных методов КД.

Наибольшие трудности возникают при решении задачи КД в отношении датчиков. Это вызвано тем, что у последних отсутствует возможность непосредственного управления их входами, а значит нет возможности использовать тестовые методы КД.

Средства КД подразделяются на тестовые (активные) и функциональные (пассивные).

<u>Тестовые средства КД</u> – контроль и диагностика осуществляются на основе специально формируемых тестовых воздействий во время перерывов в функционировании системы (подсистемы) по прямому назначению (рис.2.3).

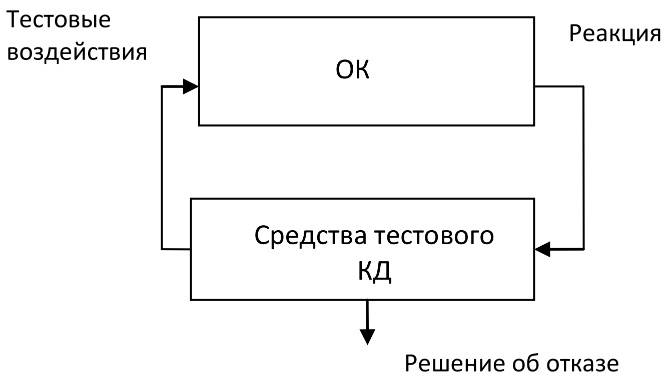


Рис.2.3. *Тестовые средства КД*

<u>Общие правила построения тестовых воздействий для любого устройства:</u>

1) описывается класс отказов устройства $E = \{e_i \mid i = \overline{1, N}\}$, подлежащих КД;
2) для каждого отказа e_i из класса E по описанию устройства отыскивается и включается в результирующий тест входная последовательность u_{T_i} такая, что исправное устройство в ответ на эту последовательность выдает выходную последовательность z_i, а неисправное устройство - выходную последовательность $\overline{z_i}$, причем $z_i \neq \overline{z_i}$.

<u>Функциональные средства КД</u> - контроль и диагностика осуществляются на основе рабочих воздействий в процессе функционирования системы (подсистемы) по прямому назначению (рис.2.4).

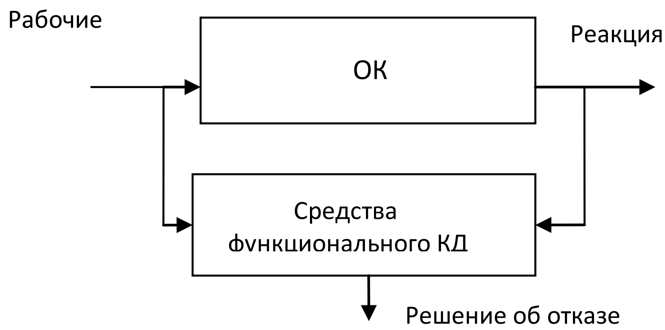


Рис.2.4. *Функциональные средства КД*

Общие правила построения средств функционального КД для любого устройства:

1) описывается класс отказов устройства $E = \{e_i \mid i = \overline{1, N}\}$, подлежащих КД;
2) синтезируется контролирующее устройство по описанию контролируемого устройства (контролирующее устройство в частном случае является моделью контролируемого) со следующими правилами:

   - пусть между выходными последовательностями z_0 контролируемого и z_k контролирующего устройств, находящимися в исправном состоянии, существует функциональная связь:

   $$\varphi(z_0) = z_k,$$

   тогда при появлении любого отказа e_i из класса E функциональная связь φ должна нарушаться, т.е.

   $\varphi(\overline{z_0}) \neq z_k$ -отказ в изделии (приборе или системе),

   $\varphi(z_0) \neq \overline{z_k}$ - отказ в средствах функционального КД.

При синтезе средств функционального КД существует три подхода:

1) использование инвариантов;
2) использование моделей объектов;
3) использование «аналитической избыточности».

При п е р в о м п о д х о д е для решения задачи КД осуществляется контроль инвариантов, т.е. характеристик объекта, остающихся неизменными при его нормальном функционировании. Таковыми для линейных систем являются полюса, собственные числа, статический коэффициент усиления и т.п.

При в т о р о м п о д х о д е средства КД реализуют модель объекта КД. Размерность этой модели может совпадать с размерностью объекта, но может быть и меньше ее. При этом могут применяться разнообразные методы редукции (reduction- англ. снижение) моделей. При втором подходе широко применяемым вариантом средств функционального КД является дублирование. В этом случае средства КД представляют собой дополнительный экземпляр контролируемого устройства (или его модель, характеризуются большой степенью адекватности), с выходами которого сравниваются выходы основного устройства, а по результатам сравнения делаются выводы о работоспособности. Так, например, при полете космической орбитальной станции одновременно на Земле работает аналогичная станция в режиме реального времени.

При т р е т ь е м п о д х о д е решение задачи КД осуществляется путем такого синтеза средств контроля и диагностики (введения избыточности), в результате которого между выходами объекта и средств КД возникают аналитические соотношения (контрольные условия, соотношения паритета). Проверка этих соотношений и составляет алгоритм решения задачи КД.

Задача КД датчиков информации решается в двух уровнях – на уровне подсистем и на уровне комплексной обработки информации.

На первом уровне средства КД подсистем анализируют выходы устройств той подсистемы, в которую они входят и формируют выводы о работоспособности этих устройств и подсистемы в целом.

На втором уровне средства КД на основе анализа выходов подсистем формируют выводы о работоспособности этих подсистем и НС в целом. На рис.2.5 поясняется роль функциональных средств КД комплексного уровня в работе НС, где навигационные подсистемы представлены тремя ИНС [11].

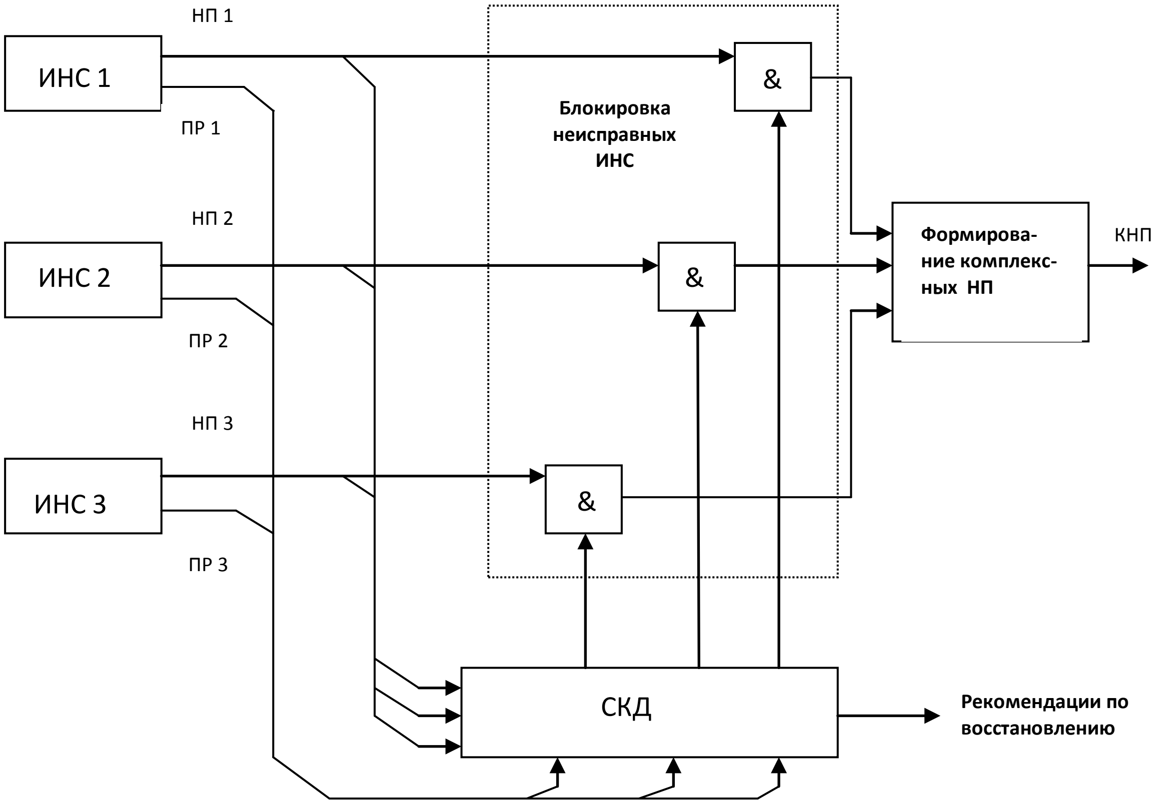


Рис.2.5. *Пример функциональных средств КД комплексного уровня*

На схеме НП 1(2,3) и ПР 1(2,3) – обозначены навигационные параметры и диагностические признаки, вырабатываемые в ИНС 1(2,3), КНП- комплексные НП. Процедура блокировки данных от неисправных ИНС условно отражена в виде логического элемента «И» (на схеме обозначено знаком «&» логического умножения).

Выходные параметры и контрольно-диагностические признаки этих ИНС анализируются в средствах КД комплексного уровня. При обнаружении нарушений или отказов в какой-либо ИНС ее выходная информация блокируется, т.е. исключается из процедуры формирования комплексных навигационных параметров. Кроме того, для отказавшей ИНС указывается адекватная процедура ее восстановления.

Отметим одну важную особенность средств КД комплексного уровня. Несмотря на то, что проектируются они для решения КД датчиков, значимость этих средств для НС существенно больше, поскольку они обнаруживают любой отказ, проявляющийся на выходе какой-либо из ее подсистем. Благодаря чему их можно назвать универсальными средствами КД.

Желательно датчики информации выполнять в виде быстросъемных блоков электронного оборудования. Так системы «Line Replaceable Unit» (LRU), устанавливаемые на современных самолетах, как правило, оснащаются встроенными средствами контроля (ВСК), выполненными как ***Built-In-Test Equipment*** **(BITE)**.

Реализация ВСК «BITE» в LRU приборного оборудования, например, самолета позволяет:

- обеспечить *контроль во время полета* с регистрацией данных об отказах. Эти данные могут быть доступны другим системам, например системе ACARS (для передачи данных об отказах на землю в процессе полета);
- обеспечить *оперативную локализацию отказа при работе линейного техника*;
- обеспечить *адекватность замены или ремонта отказавших блоков*;
- обеспечить *послеремонтное тестирование блоков* с целью определения готовности системы самолета к вылету;
- обеспечить *контроль правильности взаимодействия данного блока с другими бортовыми системами*;
- обеспечить возможность модернизации оборудования самолета *без изменения программ в* бортовой системе технического обслуживания (БСТО).

Контрольные вопросы:

1. На какие виды подразделяются средства контроля и диагностики?
2. Какие средства КД называются тестовыми?
3. Какие средства КД называются функциональными?

2.2. **Диагностические модели объектов контроля**

Диагностическая модель объекта контроля (ОК) – это совокупность количественных и логических зависимостей между параметрами, характеризующими техническое состояние объекта, и контролируемыми параметрами или их функциями.

Диагностическая модель ОК является формальным описанием (в аналитической, табличной или другой форме) его поведения в различных состояниях.

Построение модели составляет одну из основных задач теории контроля. В общем случае оно предусматривает:

а) изучение нормального функционирования ОК;
б) выделение элементов и связей между ними;
в) выделение возможных состояний объекта с учётом возможных отказов;
г) анализ возможностей контроля признаков, характеризующих состояние объекта.

Основные требования к диагностическим моделям ОК следующие:

1) модель должна быть достаточно абстрактной, чтобы ее можно было применять для описания сравнительно широкого класса объектов.
2) модель должна позволять выделять наиболее информативные параметры, которые отражают существенные особенности объекта и которые необходимо контролировать;
3) модели должны охватывать как можно большее количество состояний и позволять определять отказавший элемент;
4) модель должна быть удобной при технической реализации.

Математическая модель ОК может быть задана явным и неявным способом.

Явные модели представляют собой совокупность формальных описаний исправного и неисправного объекта. При этом формы (виды) таких моделей для одного и того же объекта могут быть одинаковыми или разными.

Обозначим символом x n- мерный вектор, компонентами которого являются значения входных переменных $x_1, x_2, ... x_n$. Символом y обозначим m- мерный вектор внутренних переменных $y_1, y_2, ..., y_m$.

Символом z обозначим k- мерный вектор значений k выходных сигналов $z_1, z_2 ... z_k$.

Запись

$$z = \psi(x, y_{нач}, t) \qquad (2.1)$$

будем рассматривать как некоторый оператор, отражающий зависимость z от x, начальных значений $y_{нач}$ внутренних переменных, от времени t. Этот оператор может иметь аналитическую, графическую, табличную, логическую и другие формы.

На рис.2.6 представлена блок-схема, которая иллюстрирует математическую модель ОК.

Система (2.1) является математической моделью исправного (работоспособного) объекта.

Описание (модель) неисправного объекта основано на выделении конечного множества N одиночных (элементарных) или кратких отказов и представляет собой оператор

$$\overline{z}_i = \overline{\psi}(x, y_i, t), \qquad i = \overline{1, N}. \tag{2.2}$$

Этот оператор также может быть выражен в различных формах.

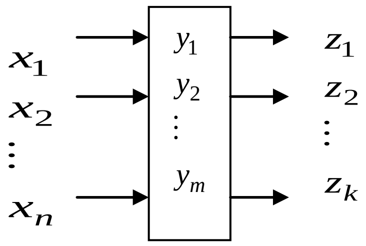


Рис.2.6. *Математическая модель объекта контроля*

Описание (2.1) и совокупность $\overline{z}_i$ систем (2.2) для всех отказов образует ***явную модель*** объекта контроля:

$$\{z, \overline{z}_i\}. \tag{2.3}$$

Неявные модели представляют собой какое-либо одно формальное описание объекта и правила получения из этого описания другого описания.

Чаще всего заданным описанием в таких моделях служит только описание исправного объекта (2.1). Поведение объекта в неисправных состояниях представляется косвенно через множество N возможных отказов, представленных их математическими моделями. ***Неявную модель*** ОК в этом случае образуют зависимость (2.1), множество N и способ вычисления зависимости (2.2) по зависимости (2.1) для любого i - го отказа, т.е. преобразование $z \to \overline{z}_i$:

$$\{z, N, z \to \overline{z}_i\} \tag{2.4}$$

Если математические модели отказов известны для всего множества N, то преобразованием $z \to \overline{z}_i$ можно получить все зависимости (2.2) и тем самым перейти от модели $\{z, N, z \to \overline{z}_i\}$ к явной модели $\{z, \overline{z}_i\}$.

Если же математические модели отказов неизвестны, то зависимости (2.2) можно получить в результате эксперимента над объектом контроля либо его модели.

Важным моментом является использование того или иного подхода к построению моделей. Среди таких подходов различают два: функциональный и структурный.

Функциональный подход к построению модели заключается в рассмотрении алгоритмов функционирования объекта. При этом внутренняя организация (структура) объекта может быть не известна или не иметь значения.

Структурный подход основан на использовании структуры объекта.

Модели ОК задают, используя понятия элементарных проверок и их результатов.

<u>Элементарная проверка</u>, физически осуществимая в конкретных условиях проведения контроля, характеризуется значением сигнала (воздействия), подаваемого на объект, и ответом (реакцией) объекта на этот сигнал. Значение α_j сигнала в элементарной проверке, которую обозначим π_j, определяется составом входных переменных и последова-

тельностью во времени их значений x_j, а также начальным значением $y_{нач}$ внутренних переменных.

Ответ объекта в элементарной проверке π_j характеризуется составом (множеством) $\{\gamma_j\}$ контрольных точек и значением, зависящим от технического состояния. Это значение является результатом элементарной проверки, который обозначим $\{R_j^i\}$. Объект, находящийся в разных технических состояниях будет выдавать разные значения одной и той же элементарной проверки. Отсутствие верхнего индекса в обозначении результата элементарной проверки будет соответствовать исправному состоянию объекта.

Таким образом, результат $\{R_j^i\}$ элементарной проверки представляет в общем случае последовательность $\lfloor\{\gamma\}_j\rfloor$ - мерных векторов. Он является функцией значения α_j - ого сигнала (воздействия)

$$R_j^i = \Psi(\alpha_j, \{\gamma_j\}) \tag{2.5}$$

Вместо записи (2.5) будем применять более короткие записи, которые для исправного объекта имеют такой вид

$$R_j = \Psi(\pi_j) \tag{2.6}$$

Для объектов с i - ой неисправностью результат элементарной проверки запишем в таком виде

$$R_j^i = \Psi_i(\pi_j) \tag{2.7}$$

Модели вида (2.6) и (2.7) могут быть получены из моделей (2.1) и (2.2). В этом заключается связь между этими типами моделей.

Получение моделей (2.6) и (2.7) из моделей (2.1) и (2.2) состоит в подстановке в правые части (2.1) и (2.2) значений $x_{j,} y_{нач}, t$ для каждой элементарной проверки и после чего вычисления значений тех компонентов векторов z и $\bar{z}_i$ выходных сигналов, которые сопоставлены контрольным точкам из множества $\{\gamma\}_j$.

Неявная модель предполагает заданными модель Ψ исправного объекта, множество N неисправностей, а также множество $\Pi = \{\pi_{1,} \pi_2 ... \pi_n\}$ допустимых элементарных проверок. Такую модель можно представить записью

$$\{z, N, z \to \bar{z}_i\} \tag{2.8}$$

2.2.1. Классификация моделей объектов контроля

Модели ОК можно разделить на 5 классов [23]:

1) параметрические;
2) непараметрические;
3) функциональные;
4) логические;
5) графовые.

Это значит, что единой универсальной модели не существует. В тоже время получение модели некоторых из этих форм основывается на использовании модели в другой форме. Например, графовые модели можно получить из функциональной или логической модели.

Кроме того, на основании некоторых форм моделей затруднительно, а порой невозможно непосредственно разрабатывать системы контроля.

Параметрические модели.

Наиболее общей параметрической моделью является оператор объекта. Этот оператор может быть представлен в различных формах:

а) дифференциальной;
б) линейной интегральной;
в) нелинейной интегральной;
г) интегро-дифференциальной.

Для непрерывных и линейных объектов параметрической моделью служат линейные обыкновенные дифференциальные уравнения или передаточные функции; для дискретных объектов – разностные уравнения.

Условия работоспособности объектов с такими моделями формируются в виде ограничений (одно- или двухсторонних), допустимых значений на параметры, коэффициенты, нули или полюса передаточных функций. Выход этих показателей за установленные пределы считается отказом объекта.

Контроль работоспособности на основе таких моделей состоит в

- наблюдении за перемещением нулей и полюсов на комплексной плоскости, определённым путём изменения или расчёта параметров, коэффициентов;
- сравнении с допусками, ограничениями;
- формировании результата контроля.

Осуществлять такой контроль можно по состоянию элементов объекта или по реакции объекта на рабочие или стимулирующие сигналы.

Недостаток таких моделей состоит в неудобстве отыскания отказавшего элемента и в сложности их применения для контроля объектов с нелинейными характеристиками.

Непараметрические модели.

К непараметрическим моделям ОК относят временные (переходные и импульсные переходные функции), частотные и спектральные характеристики.

Использование этих моделей для контроля работоспособности позволяет получить в ряде случаев более точные результаты по сравнению с результатами контроля, основанными на использовании параметрических моделей. Однако такие модели, как и параметрические, малопригодны для диагностирующего контроля.

Функциональные модели.

Функциональная модель непрерывных объектов представляет собой графическое изображение схемы ОК с указанием функциональных элементов и связей между ними, которые обозначаются линиями со стрелками, показывающими направление прохождения сигналов. Под функциональным элементом понимается часть объекта, который может иметь несколько входов и только один выход и который находится в одном из двух несовместимых состояниях (работоспособном или неработоспособном). Построение этой модели осуществляется при выполнении следующих предположений:

- Для каждого функционального элемента известны функциональные зависимости между входными и выходным сигналом, а также их допустимые значения. При этом допустимыми считаются сигналы, все параметры которых принадлежат области их допустимых значений.

- Функциональный элемент работоспособен, если при допустимых входных сигналах на его выходе появляется допустимый сигнал. При выходе за пределы допустимых значений хотя бы одного из входных сигналов на выходе функционального элемента появляется недопустимый сигнал.
- Недопустимым сигналом является сигнал, у которого значения хотя бы одного параметра выходит за область допустимых значений.
- Функциональный элемент считается неработоспособным, если при допустимых входных сигналах на выходе элемента появляется недопустимый сигнал.
- Внешние входные сигналы объекта, которые не соединены ни с одним выходом, всегда являются допустимыми.
- Если выходной сигнал k - ого функционального элемента является входным для j - ого, то допустимые значения этих сигналов совпадают.
- Линии связи между функциональными элементами считаются абсолютно надёжными. При этом реальные цепи связи можно включать в функциональную модель в качестве самостоятельных функциональных элементов и тем самым учесть возможность отказов цепей связи.

Чтобы полностью задать функциональный элемент, необходимо:

а) перечислить все возможные для данного объекта комбинации одновременно отказавших элементов, т.е. задать множество возможных состояний объекта;

б) указать, какие комбинации допустимых сигналов необходимо приложить к каждому элементу для получения допустимой реакции;

в) указать все элементы и связи между ними.

Для дискретных объектов функциональной моделью служит таблица истинности.

Составление функциональной модели осуществляется на основе функциональной или электрической схем объектов. При этом функциональная модель может не совпадать с функциональной схемой объекта.

Для многорежимных объектов функциональные модели должны составлять отдельно для каждого режима, в том числе с учётом выделения допустимых значений сигналов.

Сами по себе функциональные модели в виде схем не являются в полном смысле диагностической моделью объекта, определённой ранее. Такими моделями можно считать таблицы функций неисправностей (ТФН), которые составляются на основе функциональной схемы. Именно ТФН являются табличной формой явных математических моделей объектов контроля.

2.2.2. Таблица функций неисправностей

Множество технических состояний объекта обозначим символом E. Пусть $e_0 \in E$ обозначает исправное состояние объекта, а $e_i \in E$ - его неисправное состояние. Каждому i – ому неисправному состоянию соответствует e_i - ая неисправность из множества E.

Таблицей функций неисправностей (таблицей состояний или таблицей неисправностей) называется прямоугольная таблица, строкам которой поставлены в соответствие допустимые элементарные проверки π_i из множества Π, а столбцам технические состояния из множества E, или, что то же самое $\Psi_i(i=1,2...s)$, реализуемые объектом, находящимся в исправном e_0 или неисправном e_i состоянии.

В клетке (j,i) этой таблицы (табл.2.1), находящейся на пересечении строки π_j и столбца e_i, проставляется результат R_j^i элементарной проверки π_j объекта, находящегося в техническом состоянии e_i.

Таблицы снабжают столбцом e_0, в котором указываются результаты R_j^0, соответствующие исправному состоянию. Столбец e_0 задает функцию (2.6), а остальные её столбцы – реакции объекта, находящегося в неисправном состоянии, т.е. функции (2.7), обусловленных отказом элементов.

Табл.2.1. *Пример таблицы функции неисправности*

	e_0	e_1	$\cdots$	e_i	$\cdots$	e_s
π_1	R_1^0	R_1^1	$\cdots$	R_1^i	$\cdots$	R_1^s
π_2	R_2^0	R_2^1	$\cdots$	R_2^i	$\cdots$	R_2^s
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
π_j	R_j^0	R_j^1	$\cdots$	R_j^i	$\cdots$	R_j^s
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
π_n	R_n^0	R_n^1	$\cdots$	R_n^i	$\cdots$	R_n^s

Анализ ТФН дает возможность сформировать такие два свойства множества Π проверок:

- СВОЙСТВО ОБНАРУЖЕНИЯ означает, что для любого неработоспособного состояния $e_i \in E$ найдется хотя бы одна элементарная проверка $\pi_j \in \Pi$, при которой результат проверки покажет, что объект неработоспособен т.е. $R_j^0 \neq R_j^i$.

- СВОЙСТВО РАЗЛИЧЕНИЯ всех состояний из множества E означает, что для каждой пары состояний-неисправностей $(e_i, e_k) \in E(i \neq k)$ найдётся хотя бы одна элементарная проверка $\pi_j \in \Pi$, при которой результат проверки отличается, т.е. $R_j^i \neq R_j^k$.

Наличие у множества Π свойства обнаружения неисправностей эквивалентно тому, что столбец e_0 таблицы функций неисправностей отличается от каждого из остальных её столбцов, а наличие свойства различимости – тому, что все столбцы таблицы попарно различимы.

Логические модели

Логические модели представляются в виде высказывающих форм, построенных на основе двузначной логики, и являются булевыми функциями, зависящими от ряда переменных, каждая из которых может принимать только два значения: 0 или 1.

Кстати, булевые функции получили свое название по имени английского математика Джорджа Буля (1815-1864), отца писательницы Этель Лилиан Войнич, автора романа «Овод».

Эти модели строятся на основе логических схем, представляющих собой совокупность элементов и связей между ними. Элементы имеют один выход и существенные для данного выхода входы. Работа элементов описывается функцией F входных сигналов (условий работы).

На рис.2.7 изображена структурно-функциональная схема системы электроснабжения самолета переменным током [23].

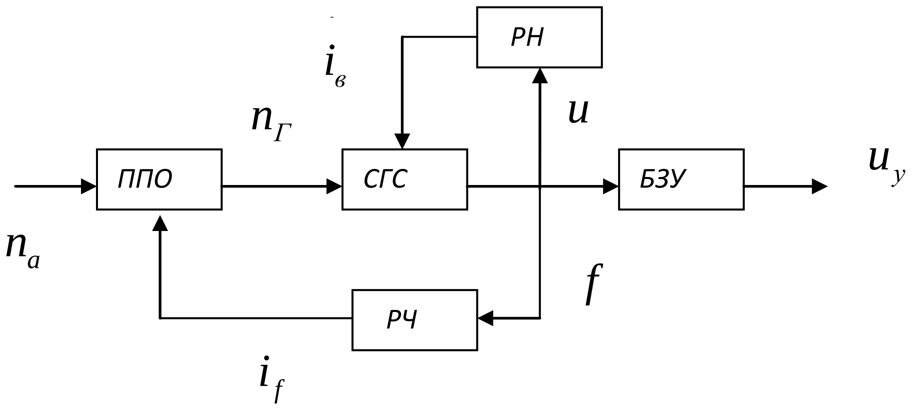


Рис.2.7. *Структурно-функциональная схема системы электроснабжения самолета переменным током*

Здесь обозначено: $n_a, n_г$ - частота вращения авиадвигателя и генератора, соответственно; u, f, i_B - напряжение, частота и ток возбуждения генератора; i_f - управляющее воздействие на привод; u_y - напряжение управления; ППО - привод постоянных оборотов авиадвигателя; РН – регулятор напряжения; СГС – самолетный синхронный генератор; РЧ – регулятор частоты; БЗУ – блок защиты и управления.

На основе структурно-функциональной схемы составлена логическая схема системы электроснабжения самолета (рис.2.8).

Здесь соответствующие блоки схемы имеют обозначения Q_i, а сформированные из выходных параметров блоков признаки обозначены через π_i.

Допустим, что в объекте возможен отказ только одного блока и логическая модель объекта является правильной.

Логическая модель называется **правильной**, если для любой пары блоков, у которой выход одного является входом другого, области допустимых значений входа и выхода и области их недопустимых значений соответственно совпадают;

ТФН составляют двумя способами:

- методом функций входных сигналов блоков модели;
- методом логического анализа.

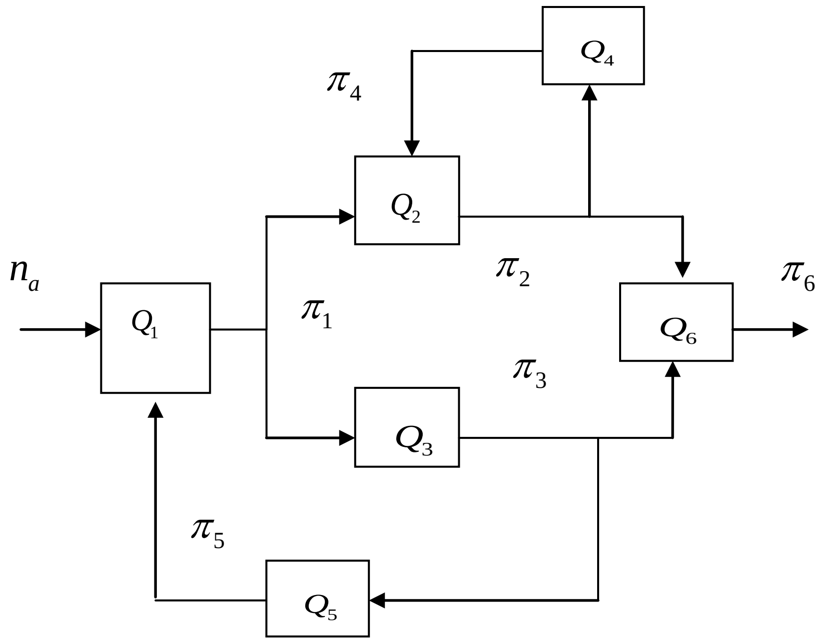


Рис.2.8. *Логическая схема системы электроснабжения самолета*

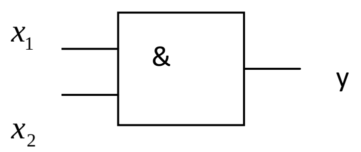
Составим ТФН или таблицу состояний, воспользовавшись методом функций входных сигналов блоков модели:

Функция F_i входных сигналов i-го блока есть конъюнкция правильных входов этого блока:

$$F_i = x_{i1} \cdot x_{i2} \cdot \ldots \cdot x_{in} \qquad (2.9)$$

Напомним, что КОНЪЮНКЦИЯ – операция логического умножения обозначается «$\cdot$» или «$\wedge$», «&».

Например, на рис. 2.9 представлен логический элемент «И» (*логическая схема совпадения*), который содержит два или более входов $x_1, x_2, \ldots$ и один выход y и его таблица истинности:



x_1	0	1	0	1
x_2	0	0	1	1
y	0	0	0	1

Рис.2.9. *Логическая схема элемента «И» и его таблица истинности*

Символ «&» отражает операцию конъюнкции для двух переменных и определяется следующим выражением:

$$y = x_1 \cdot x_2$$

Для рассматриваемой модели имеем:

$$F_1 = n_a \pi_5; \quad F_2 = \pi_1 \pi_4; \quad F_3 = \pi_1; \quad F_4 = \pi_2; \quad F_5 = \pi_3; \quad F_6 = \pi_2 \pi_3.$$

Тогда фактическое значение выхода π_i блока Q_i зависит от состояния блока (исправен - Q_i=1, неисправен - Q_i=0) и значения функции F_i.

Формально π_i является конъюнкцией переменных F_i и Q_i:

$$\pi_i = Q_i F_i \tag{2.10}$$

Составим выражения типа (2.10) для каждого блока:

$$\begin{aligned} &\pi_1 = Q_1 F_1 = Q_1 n_a \pi_5; \quad \pi_3 = Q_3 F_3 = Q_3 \pi_1; \quad \pi_5 = Q_5 F_5 = Q_5 \pi_3; \\ &\pi_2 = Q_2 F_2 = Q_2 \pi_1 \pi_4; \quad \pi_4 = Q_4 F_4 = Q_4 \pi_2; \quad \pi_6 = Q_6 F_6 = Q_6 \pi_2 \pi_3. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Таблицу будем заполнять по столбцам, учитывая, что внешний вход $n_a = 1$. Первый столбец e_0, соответствующий исправному состоянию объекта контроля, т.е. условию, что $Q_i = 1$ для всех блоков $i = \overline{1,6}$, заполняется значениями $\pi_i = 1$ согласно результатам вычислений по выражениям (2.11):

$$\pi_1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1;$$
$$\pi_2 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1;$$
$$\pi_3 = 1 \cdot 1 = 1;$$
$$\pi_4 = 1 \cdot 1 = 1;$$
$$\pi_5 = 1 \cdot 1 = 1;$$
$$\pi_6 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Второй столбец e_1 вычисляется при условии $Q_1 = 0$, а $Q_i = 1$ для всех остальных блоков $i = \overline{2,6}$. При этом из уравнений (2.11) получаем:

$$\pi_1 = 0 \cdot 1 \cdot 0 = 0;$$
$$\pi_2 = 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0;$$
$$\pi_3 = 1 \cdot 0 = 0;$$
$$\pi_4 = 1 \cdot 0 = 0;$$
$$\pi_5 = 1 \cdot 0 = 0;$$
$$\pi_6 = 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

Аналогично определяются значения выходов π_i:

- при $Q_2 = 0$:

$$\pi_1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1;$$
$$\pi_2 = 0 \cdot 1 \cdot 0 = 0;$$
$$\pi_3 = 1 \cdot 1 = 1;$$
$$\pi_4 = 1 \cdot 0 = 0;$$
$$\pi_5 = 1 \cdot 1 = 1;$$
$$\pi_6 = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

- при $Q_3 = 0$:

$$\pi_1 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0;$$
$$\pi_2 = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0;$$
$$\pi_3 = 0 \cdot 0 = 0;$$
$$\pi_4 = 1 \cdot 0 = 0;$$
$$\pi_5 = 1 \cdot 0 = 0;$$
$$\pi_6 = 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

- при $Q_4 = 0$:

$$\pi_1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1;$$
$$\pi_2 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0;$$
$$\pi_3 = 1 \cdot 1 = 1;$$
$$\pi_4 = 0 \cdot 0 = 0;$$
$$\pi_5 = 1 \cdot 1 = 1;$$
$$\pi_6 = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

- при $Q_5 = 0$:

$$\pi_1 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0;$$
$$\pi_2 = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0;$$
$$\pi_3 = 1 \cdot 0 = 0;$$
$$\pi_4 = 1 \cdot 0 = 0;$$
$$\pi_5 = 0 \cdot 0 = 0;$$
$$\pi_6 = 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

- при $Q_6 = 0$:

$$\pi_1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1;$$
$$\pi_2 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1;$$
$$\pi_3 = 1 \cdot 1 = 1;$$
$$\pi_4 = 1 \cdot 1 = 1;$$
$$\pi_5 = 1 \cdot 1 = 1;$$
$$\pi_6 = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0.$$

Итак, ТФН или таблица состояний примет вид табл.2.2:

Табл.2.2. *Таблица состояний системы электроснабжения самолета*

π_i	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
π_1	1	0	1	0	1	0	1
π_2	1	0	0	0	0	0	1
π_3	1	0	1	0	1	0	1
π_4	1	0	0	0	0	0	1
π_5	1	0	1	0	1	0	1
π_6	1	0	0	0	0	0	0

Принцип заполнения ТФН методом логического анализа заключается в следующем.

При состоянии e_0 (все блоки исправны) значения всех признаков состояний π_i соответствуют 1. Следовательно, столбец e_0 заполняется единицами. Для заполнения столбца e_1 полагаем отказавшим блок Q_1. В этом случае $\pi_1 = 0$. Поскольку π_1 поступает на входы Q_2 и Q_3, то их выходы π_2 и π_3 принимают значение 0. В результате столбец e_1 заполняется нулями. Отказ блока Q_2 определяет равенство нулю признаков π_2, π_4 и π_6. Остальные признаки соответствуют 1. Аналогично заполняются оставшиеся столбцы ТФН.

Полученная табличная модель обладает свойством контроля работоспособности, поскольку столбец e_0 отличается от всех остальных. Следовательно, тест состояний и проверок $\pi_1 ... \pi_6$ является проверяющим. Однако тест не является различающим, т.к. состояния e_1, e_3, e_5 и e_2, e_4 не различаются друг от друга. Для устранения неразличимости отказов необходимо расширить множество Π проверок, вводя в него дополнительные проверки или изменить структуру объекта на время проверки.

Появление недопустимой реакции (0) на выходе хотя бы одного элемента свидетельствует об отказе ОК в целом .

После заполнения таблицы состояний ее анализируют и выбирают минимальную проверяющую совокупность точек контроля для определения исправности системы и локализации любого единичного отказа с точностью до блока.

Контрольные вопросы:

1. Какие существуют диагностические модели объектов контроля?
2. Что такое таблица состояний?
3. Что такое допустимое воздействие?
4. Будет ли работоспособным функциональный элемент, если на его вход поступает недопустимый сигнал?

2.3. Методы поиска отказов

Основной целью диагностирования является определение места и при необходимости причины и вида отказа объекта [22].

Состояние E каждого объекта в данный момент времени определяется значениями ряда независимых величин (параметров) $a_i (i = \overline{1,n})$, которые являются мерами его качеств. Для нескольких одинаковых объектов значения параметров каждого объекта всегда отличаются от номинальных (эталонных) значений a_{i0} из-за допусков производства, неоднородности элементов, старения и изнашивания, влияния условий эксплуатации и дефектов элементов.

Следовательно, параметры каждого конкретного объекта являются случайными величинами, если рассматривать всю совокупность объектов данного типа.

Техническое диагностирование – это процесс определения технического состояния объекта, который сводится к проведению элементарных проверок, представляющих собой эксперимент над объектом контроля и диагностирования. При этом на объект поступает определенное входное воздействие и с контрольных точек снимается отклик объекта на это воздействие - результат элементарной проверки. Затем сопоставляются значения параметров конкретного объекта с их номинальными значениями.

Заключение о состоянии объекта (диагноз) делается на основе результатов этого сопоставления. Процесс функционального технического диагностирования по отношению к объекту является пассивным актом и никакого влияния на состояние самого объекта не оказывает.

Очевидно, что процесс технического диагностирования не является самоцелью и необходим только для того, чтобы на основе его результатов можно было бы произвести необходимые активные воздействия на объект: регулировку, замену дефектных элементов и т.п.

Если при определении технического состояния установлено, что объект неработоспособен, возникает необходимость поиска места отказа.

Поиск отказа проводится [23] с заданной глубиной (подробностью, точностью): до съемного блока, съемной платы в блоке, отдельного элемента в схеме.

Процесс поиска отказа (его длительность и трудоемкость) зависит от алгоритма диагностирования и средств диагностирования.

Алгоритмом диагностирования называется совокупность предписаний о порядке проведения диагностирования (ГОСТ 20911-75). Он задает совокупность элементарных проверок, последовательность их реализации и правила обработки результатов контроля.

Условный алгоритм диагностирования - если в последовательности проверок выбор очередной из них зависит от результата предыдущей проверки.

Безусловный алгоритм диагностирования – если последовательность проверок задана и не зависит от результатов элементарных проверок, входящих в данную последовательность проверок.

Алгоритм с безусловной остановкой – если выдача результатов диагностирования осуществляется только по завершении всех элементарных проверок.

Алгоритм с условной остановкой – если выдача результатов диагностирования осуществляется после реализации каждой элементарной проверки или определенной группы проверок и прекращение проверок происходит при выявлении технического состояния объекта контроля до окончания всех предусмотренных проверок.

Алгоритм может состоять из ряда диагностических тестов. Диагностический тест (сокращенно ТЕСТ) – определенная совокупность проверок и последовательности их выполнения.

Проверяющий тест – тест для проверки исправности или работоспособности объекта.

Тест поиска отказа – тест диагностирования, обеспечивающий поиск отказа (дефекта).

На практике вместо определения отказа с точностью до элемента часто принимают глубину поиска отказа с точностью до съемного блока ОК.

Опыт эксплуатации сложных систем показывает, что время поиска неисправности значительно больше, чем время ее устранения. Поэтому большое значение имеют ***методы диагностирования объектов***:

- метод последовательного анализа;
- половинного разбиения;
- комбинационный метод.

2.3.1. Метод последовательного анализа (диагностирования)

Этот метод осуществляется путем последовательной, начиная с выходного элемента, проверки технических состояний отдельных функциональных элементов (ФЭ). Если проверка очередного элемента выявила его неисправное состояние, то осуществляется проверка элементов, выходные сигналы которых поступают на вход (входы) данного элемента. При исправном его состоянии делается вывод об исправном состоянии проверяемого элемента. В противном случае производится проверка технических состояний последующих элементов функциональной модели ОК.

Продолжая аналогичные суждения, можно составить алгоритм для ОК, функциональная модель которого изображена на рис.2.10.

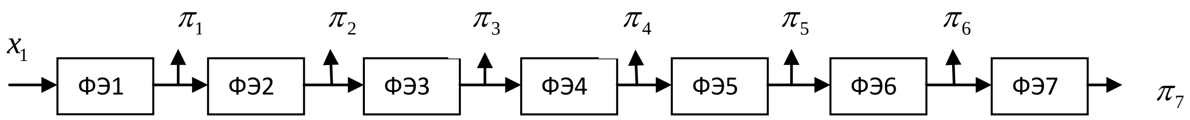


Рис.2.10. *Функциональная схема модели ОК*

Первой выполняется проверка технического состояния элемента ФЭ7. При исправном состоянии e_0 имеем $\pi_7 = 1$. Если $\pi_7 = 0$ (выходной сигнал ОК является недопустимым), то выполняется проверка элемента ФЭ6 и т.д. Граф алгоритма поиска отказов («дерево» поиска отказа) показан на рис.2.11.

Цифры в кружках показывают номера неисправных элементов. Этот метод построения программы, отличается наглядностью, однако его применение затруднено для ОК, имеющих внутренние обратные связи. Кроме того, данный метод не оптимален по временным и стоимостным затратам.

С учетом вероятности отказов отдельных элементоа, сначала проверяется элемент с максимальной вероятностью отказа. Если он исправен, то проверяется следующий и т.д. Метод интуитивно используется техниками и механиками на практике при ручном поиске неисправностей.

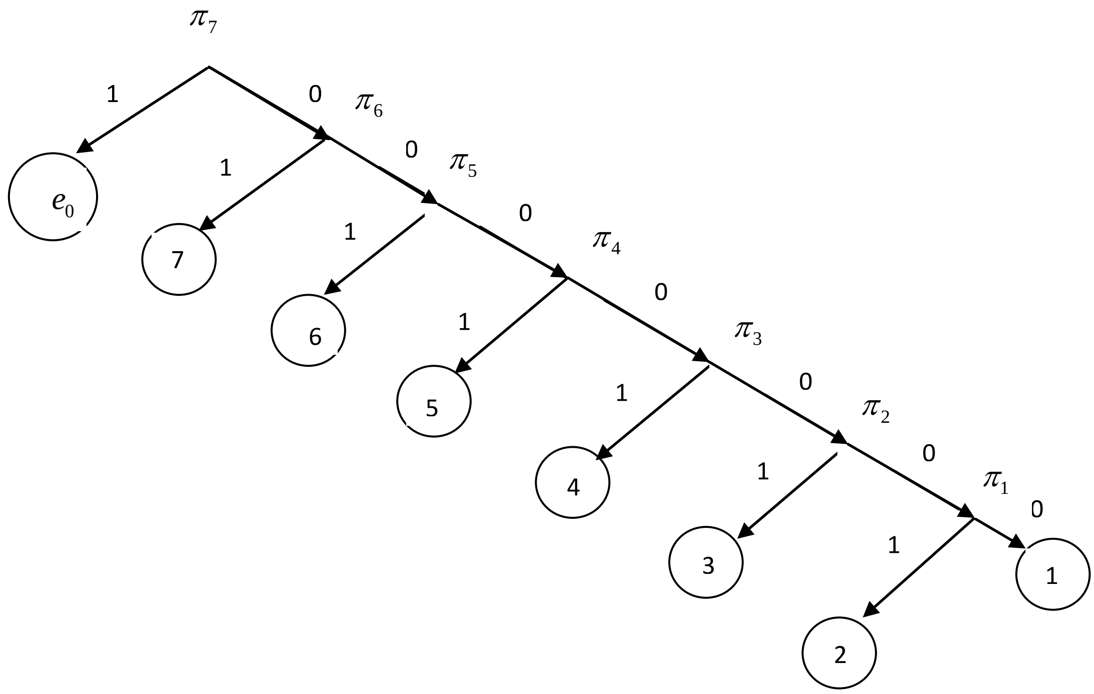


Рис.2.11. *Граф метода последовательного анализа*

Например, при отказе аэронавигационного огня сначала проверяется лампа, затем предохранитель, а потом выключатель.

2.3.2. Метод половинного разбиения

Граф алгоритма поиска отказов показан на рис.2.12. Для рассмотренного ОК (рис.2.10) при отсутствии на выходе сигнала проверяется реакция на выходе элемента ФЭ3 (π_3), делящей систему примерно пополам.

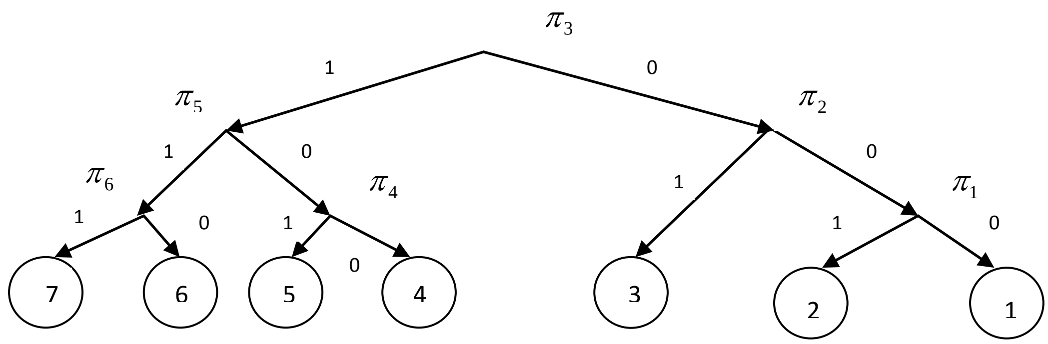


Рис.2.12. *Граф метода половинного разбиения*

Если здесь сигнала нет ($\pi_3 = 0$) , то проверяется выход ФЭ2. Если же на выходе ФЭ3 сигнал $\pi_3 = 1$, то проверяется выход ФЭ5 и т.д. Такой поиск оправдывается, если все элементы системы равнонадежны. Он достаточно удобен для поиска неисправности в электрических сетях.

2.3.3. Комбинационный метод диагностирования

Метод применяется в случаях, когда структура ОК представляется разветвленными схемами соединения блоков. Рассмотрим в виде примера ОК, функциональная схема которого изображена на рис.2.13.

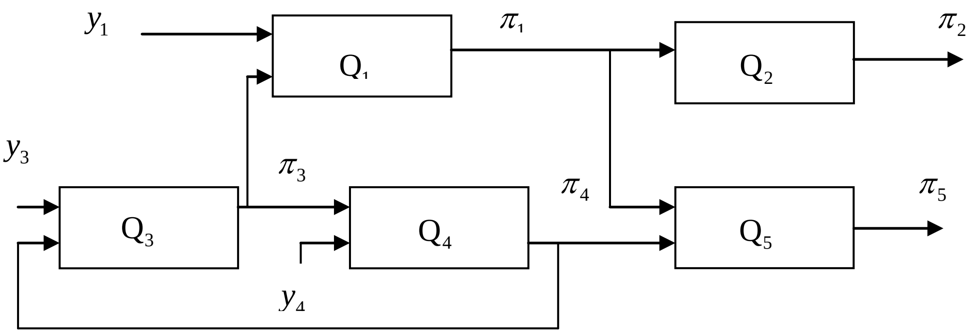


Рис.2.13. *Пример функциональной схемы ОК*

Объект имеет несколько входов ($y_{1,}y_3, y_4$) и выходов (π_2, π_5). Для определения работоспособного состояния можно контролировать не какой-то один, а все признаки при подаче определенного входного воздействия. Так, при подаче воздействия y_4 сигнал пройдет через все блоки Q_i. Следовательно, работоспособность характеризуется конъюнкцией $F_0 = y_4\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5$.

Однако для оценки работоспособности достаточно контролировать только признаки π_2 и π_5 (выходные сигналы ОК). При этом функция работоспособности имеет вид $F_0 = y_4\pi_2\pi_5$. Если каждое конкретное состояние объекта контроля характеризуется определенной, свойственной только этому состоянию комбинацией признаков, то имеет место комбинационный метод диагностирования.

Контрольные вопросы:

1. Какие бывают методы поиска отказов?
2. Опишите метод последовательного анализа.
3. Опишите метод половинного разбиения.
4. Опишите комбинационный метод.

2.4. Оптимизация диагностических тестов

Пусть в результате анализа логической диагностической модели ОК получена таблица состояния (ТФН).

Отсутствие одинаковых столбцов в таблице означает, что выбранный набор признаков π_i (элементарных проверок) обеспечивает различение всех состояний $e_0, e_1, ... e_n$.

Однако часто бывает, что первоначально выбранный набор признаков является избыточным. Это приводит к усложнению средств контроля, повышению стоимости и времени контроля. Поэтому в процессе исследования изделий как объектов контроля возникает задача нахождения минимальной или близкой к минимальной совокупности признаков состояний (элементарных проверок) из их первоначально заданного множества.

Первый этап минимизации числа признаков – просмотр их на информативность. Если в какой-то строке ТФН окажутся только единицы или нули, то это свидетельствует об отсутствии информативности. Такие строки следует вычеркнуть – удалить из дальнейшего рассмотрения.

Второй этап минимизации числа признаков – проверка ТФН на наличие в ней одинаковых строк. Наличие таких строк говорит о том, что на заданном множестве проверок состояния являются не различимыми. Поэтому из всех таких признаков следует оставить только один, который наиболее просто реализовать при контроле.

После заполнения таблицы состояний ее анализируют и выбирают минимальную проверяющую совокупность точек контроля для определения исправности системы и любого единичного отказа с точностью до блока.

Точное минимальное число признаков дает метод полного перебора.

Метод полного перебора – состоит в определении ***логических функций различия состояний***. Запись производится в конъюнктивно-дизъюнктивной форме, а потом преобразуется в дизъюнктивно-конъюнктивную ($\Pi\Sigma \rightarrow \Sigma\Pi$).

Получение минимального теста (набора диагностических признаков) для поиска отказов покажем на примере [2] электронного регулятора частоты вращения газотурбинного двигателя (ГТД), логическая схема которого изображена на рис. 2.14.

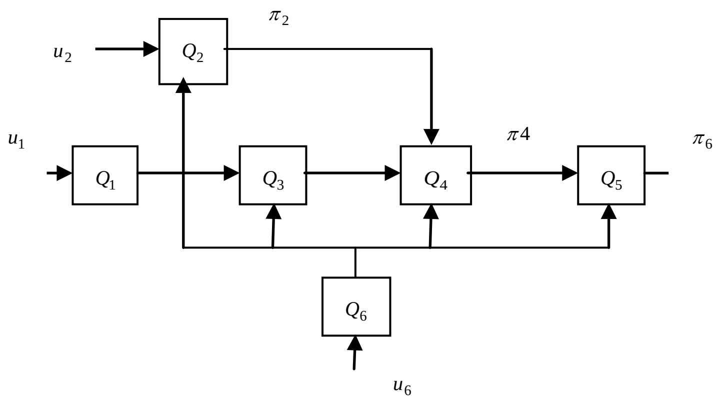


Рис.2.14. *Логическая схема электронного регулятора частоты вращения ГТД*

ТФН или таблица состояний имеет вид табл.2.3.

Для получения всех наборов диагностических признаков (тестов), позволяющих различать отказы, из таблицы состояний попарным сопоставлением выписывают проверки, значениями которых они различаются.

До сих пор мы работали с операцией логического умножения – «·» или «$\wedge$», «&» (конъюнкция).

Введем в рассмотрение операцию логического сложения – «$\vee$» или «$\oplus$» (дизъюнкция).

Табл.2.3. *Таблица состояний электронного регулятора частоты вращения ГТД*

π_i	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
π_1	1	0	1	1	1	1	1
π_2	1	1	0	1	1	1	0
π_3	1	0	1	0	1	1	0
π_4	1	0	0	0	0	1	0
π_5	1	0	0	0	0	0	0
π_6	1	1	1	1	1	1	0

Так для объекта контроля, заданного таблицей состояния, попарные состояния отличаются признаками:

$$\begin{array}{l|l}
e_0 : e_1 & \pi_1 \vee \pi_3 \vee \pi_4 \vee \pi_5 \\
e_0 : e_2 & \pi_2 \vee \pi_4 \vee \pi_5 \\
e_0 : e_3 & \pi_3 \vee \pi_4 \vee \pi_5 \\
e_0 : e_4 & \pi_4 \vee \pi_5 \\
e_0 : e_5 & \pi_5 \\
e_0 : e_6 & \pi_2 \vee \pi_3 \vee \pi_4 \vee \pi_5 \vee \pi_6
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
e_1 : e_2 & \pi_1 \vee \pi_2 \vee \pi_3 \\
e_1 : e_3 & \pi_1 \\
e_1 : e_4 & \pi_1 \vee \pi_3 \\
e_1 : e_5 & \pi_1 \vee \pi_3 \vee \pi_4 \\
e_1 : e_6 & \pi_1 \vee \pi_2 \vee \pi_6
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
e_2 : e_3 & \pi_2 \vee \pi_3 \\
e_2 : e_4 & \pi_2 \\
e_2 : e_5 & \pi_2 \vee \pi_4 \\
e_2 : e_6 & \pi_3 \vee \pi_6
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
e_3 : e_4 & \pi_3 \\
e_3 : e_5 & \pi_3 \vee \pi_4 \\
e_3 : e_6 & \pi_2 \vee \pi_6
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
e_4 : e_5 & \pi_4 \\
e_4 : e_6 & \pi_2 \vee \pi_3 \vee \pi_6
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
e_5 : e_6 & \pi_2 \vee \pi_3 \vee \pi_4 \vee \pi_6
\end{array}$$

Для того, чтобы все возможные состояния были различимыми, необходимо составить конъюнктивно-дизъюнктивную форму функции различия состояния:

$$F = \Pi\Sigma = (\pi_1 \vee \pi_3 \vee \pi_4 \vee \pi_5)(\pi_2 \vee \pi_4 \vee \pi_5)(\pi_3 \vee \pi_4 \vee \pi_5)(\pi_4 \vee \pi_5)\pi_5 \times$$
$$\times (\pi_2 \vee \pi_3 \vee \pi_4 \vee \pi_5 \vee \pi_6)(\pi_1 \vee \pi_2 \vee \pi_3)\pi_1(\pi_1 \vee \pi_3)(\pi_1 \vee \pi_3 \vee \pi_4) \times$$
$$\times (\pi_1 \vee \pi_2 \vee \pi_6)(\pi_2 \vee \pi_3)\pi_2(\pi_2 \vee \pi_4)(\pi_3 \vee \pi_6)\pi_3(\pi_3 \vee \pi_4)(\pi_2 \vee \pi_6)\pi_4(\pi_2 \vee \pi_3 \vee \pi_6) \times$$
$$\times (\pi_2 \vee \pi_3 \vee \pi_4 \vee \pi_6).$$

После этого следует перейти от конъюнктивно-дизъюнктивной формы функции различия состояния к дизъюнктивно-конъюнктивной форме ($\Pi\Sigma \to \Sigma\Pi$). Для этого воспользуемся аксиомами булевой алгебры:

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	**- ассоциативность**
$a \vee b = b \vee a$	$a \cdot b = b \cdot a$	**- коммутативность**
$a \vee (a \cdot b) = a$	$a \cdot (a \vee b) = a$	**- закон поглощения**
$a \vee (b \cdot c) = (a \vee b)(a \vee c)$	$a \cdot (b \vee c) = (a \cdot b) \vee (a \cdot c)$	**- дистрибутивность**
$a \vee a = a$	$a \cdot a = a$	**- идемпотентность**

Воспользовавшись аксиомами булевой алгебры, получим

$$F = \pi_5 \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 = \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5$$

Итак, получен один тест из пяти диагностических признаков. Для данного примера, если при выполнении данного теста объект окажется неработоспособным, следовательно, неисправным будет шестой элемент.

Контрольные вопросы:

1. В чем состоит оптимизация диагностических тестов?
2. Что такое функция различия состояний?
3. Назовите аксиомы булевой алгебры.
4. Что такое минимальный диагностический тест?

2.5. Диагностирование бортовых цифровых вычислительных устройств

Основа построения комплекса бортового оборудования современного подвижного объекта - бортовые цифровые вычислительные машины (БЦВМ) или вычислительные устройства (контроллеры). На одном подвижном объекте может находиться несколько БЦВМ.

В результате отказа БЦВМ прекращает временно, частично или полностью выполнять свои функции. Как правило, причинами отказов БЦВМ бывают повреждения элементов схемы или связей между ними. Особенность цифровых устройств – значительная вероятность появления сбоев в их работе, когда какая-либо ячейка регистра, счетчика, логического элемента не срабатывает от соответствующего входного сигнала, или срабатывает от действия случайной помехи при отсутствии входного сигнала. После сбоя БЦВМ продолжает работу нормально. Однако если в системе отсутствуют средства контроля и защиты от сбоев, то результаты вычислений БЦВМ могут оказаться неприемлемыми.

Контроль работоспособности БЦВМ осуществляется автоматически во время подготовки комплекса оборудования к полету или во время полета. При этом используются встроенные средства контроля (ВСК) и специальные тест-программы решения контрольных задач.

Если обнаруживается отказ БЦВМ, то с помощью наземной контрольно-измерительной аппаратуры производится поиск отказавшего блока, узла (платы), элемента. Отдельные блоки БЦВМ имеют встроенную самодиагностику (отказа) со световой сигнализацией.

Для оценки работоспособности БЦВМ используются такие виды контроля:

- программно-логический
- тестовый
- схемный

Программно-логический контроль объединяет методы:

- метод двойного счета;
- метод усеченного (упрощенного) алгоритма;
- метод тройного хранения;
- логический контроль данных;
- метод контрольных тождеств;
- метод контроля длительности выполнения программы.

Метод двойного счета обеспечивает наиболее простое обнаружение случайных сбоев в работе БЦВМ. При этом методе одна и та же задача решается дважды и производится сравнение результатов. Недостаток – длительность решения этой части задачи увеличивается более чем в 2 раза.

Метод усеченного алгоритма заключается в контроле работоспособности БЦВМ путем сравнения результатов счета по основному и упрощенному алгоритмам. Наиболее надежный контроль решения задачи обнаружения отказов (сбоев) получается при одновременном использовании на борту трех одинаковых БЦВМ для решения одних и тех же задач. Недостаток - увеличение объема и массы бортового оборудования.

Метод тройного хранения используется для защиты от искажения особо важной информации в ОЗУ. При этом каждая ячейка памяти ОЗУ дублируется двумя ячейками, расположенными в разных частях ОЗУ. В случае сбоя специальная программа восстановления информации обеспечивает поразрядное сравнение содержимого трех ячеек и выбор правильности данных по мажоритарному принципу. Правильный результат записывается в ячейку, в которой предыдущая запись оказалась неверной.

Логический контроль данных заключается в сравнении вводимого или вычисленного параметра с границами его допустимых значений, в установлении непротиворечивости известного соотношения между значениями переменных. Например, возрастанию скорости должно соответствовать положительное ускорение.

Метод контрольных тождеств может быть использован для контроля правильности вводимой информации, правильности решения различных уравнений, например $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

При введении значения угла α БЦВМ производит решение этого уравнения, результатом которого должна быть 1.

Контроль длительности выполнения программы – обеспечивает обнаружение зацикливания отдельных участков программы. Для такого контроля используется счетчик времени и константы допусков на длительность выполнения отдельных участков программы, которые хранятся в ПЗУ.

Контрольные вопросы:

1. Какие виды контроля используются для диагностирования бортовых цифровых вычислительных устройств?
2. В чем суть метода двойного счета?
3. Опишите метод усеченного алгоритма.
4. В каком случае применяют тройное хранение данных?
5. Опишите логический контроль данных.
6. Приведите пример метода контрольных тождеств.
7. В чем суть метода контроля длительности выполнения программы?

2.6. Методы распознавания состояния объекта диагностики

Техническая диагностика – это наука о распознавании состояния технической системы с целью является повышение надежности и ресурса технической системы [4]. Основной задачей технической диагностики является распознавание состояния технической системы в условиях ограниченной информации. Теоретической основой для решения указанной задачи является общая теория распознавания образов.

Теория распознавания состоит из разделов, связанных с построением алгоритмов распознавания, правил принятия решений, а также с рассмотренными ранее вопросами построения диагностических моделей систем. В общем случае алгоритмы распознавания применяются для решения таких задач диагностики, как *задачи классификации*. *Состояние системы* описывается множеством определяющих его параметров – признаков. Тогда *распознавание состояния* системы определяется как отнесение состояния системы к одному из возможных *классов* (диагнозов), количество которых зависит от особенностей конкретной задачи. *Алгоритм распознавания* – это совокупность последовательных действий в процессе распознавания. Важным здесь является выбор параметров, описывающих состояние системы. Они должны быть достаточно информативными, чтобы для выбранного количества диагнозов можно было успешно выполнить процесс распознавания (классификации).

Существует два подхода к задаче распознавания: *вероятностный и детерминистический* [4]. *Вероятностный* подход рассматривает систему, которая может находиться в одном из n случайных состояний – в i-том состоянии D_i. Известно множество признаков, каждый признак с некоторой вероятностью характеризует состояние системы. Необходимо оценить достоверность принятого решения и степень риска принятия ошибочного решения. В случае *детерминистического* подхода система характеризуется некоторым υ - мерным вектором X, состояние системы представляется точкой в υ – мерном пространстве признаков. Предполагается, что диагноз о состоянии системы D_i соответствует некоторой области пространства признаков. Задача состоит в нахождении правила, по которому диагностируемая система будет отнесена к некоторой области диагноза, т.е. задача состоит в разделении пространства признаков на области диагнозов (классов). При этом подходе предполагается, что области классов состояния не пересекаются.

В общем случае указанные подходы не имеют принципиальных отличий. Более общими являются вероятностные методы, которые требуют большого объема априорной информации, детерминистические методы менее зависимы от избыточной информации и больше соответствуют логике человеческого мышления.

Рассмотрим некоторые из наиболее распространенных на практике методов распознавания образов [4].

2.6.1. Статистические методы распознавания

Главным преимуществом статистических методов распознавания является возможность одновременного учета признаков различной физической природы, так как они характеризуются безразмерными величинами – вероятностью их появления при различных состояниях диагностируемой системы.

К таким методам относятся: метод Байеса, метод последовательного анализа; методы статистических решений.

- **Метод Байеса**

Одним из наиболее распространенных является метод распознавания Байеса, который основывается на простой формуле Байеса [6,8]. Если есть состояние D_i и простой признак k_j, который встречается при этом состоянии, то вероятность одновременного появления указанных событий (наличие у объекта состояния D_i и признака k_j) определяется как:

$$P(D_i k_j)=P(D_i)P(k_j/D_i)=P(k_j)P(D_i/k_j),$$

откуда получим формулу Байеса для определения вероятности отнесения объекта к состоянию D_i по признаку k_j:

$$P(D_i/k_j)=P(D_i)\frac{P(k_j/D_i)}{P(k_j)},$$

где $P(D_i)$ – вероятность появления состояния D_i (безусловная, априорная вероятность диагноза); $P(k_j/D_i)$ - вероятность появления признака k_j у объектов, которые находятся в состоянии D_i (условная, апостериорная вероятность диагноза); $P(k_j)$ – вероятность появления признака k_j у всех объектов независимо от их состояния (диагноза).

Обобщенная формула Байеса [4] применяется в случае, когда обследование проводится по некоторому комплексу признаков *К,* который состоит из признаков $k_1, k_2, \ldots, k_v$. Каждый признак k_j имеет m_j разрядов ($k_{j1}, k_{j2}, \ldots, k_{js}, \ldots, k_{jm_j}$). В результате диагностики становится известной реализация признака $k_j^*=k_{js}$ всего комплекса признаков K^*. Индекс (*) обозначает некоторое значение (реализацию) признака. Формула Байеса для комплекса признаков имеет вид:

$$P(D_i/K^*)=P(D_i)P(K^*/D_i)/P(K^*),\ (i=1,\ldots,n), \qquad (2.10)$$

где $P(D_i/K^*)$ – вероятность появления состояния D_i после того, как стали известны результаты обследования по комплексу признаков K^*; $P(D_i)$ – априорная вероятность появления состояния D_i (по предыдущей статистике); $P(K^*/D_i)$ – вероятность наличия всего комплекса признаков K^* у диагностируемого объекта, который находится в состоянии D_i; $P(K^*)$ – априорная вероятность появления комплекса признаков K^*.

Формула (2.10) остается справедливой для любого из n возможных состояний объекта, тогда, предполагая, что система может находиться только в одном из указанных состояний, получим

$$\sum_{s=1}^{n} P(D_s)=1.$$

На практике возможно наличие нескольких состояний $A_1, \ldots, A_r$, причем некоторые из них могут встречаться одновременно в комбинации друг с другом. В этом случае необходимо рассматривать отдельные состояния $D_i=A_i, \ldots, D_r=A_r$, а также их комбинации $D_{r+1}=A_1 \wedge A_2$, …и т.п.

Вероятность появления комплекса признаков K^* определяется выражением:

$$P(K^*)=\sum_{s=1}^{n} P(D_s)P(K^*/D_s).$$

Тогда обобщенную формулу Байеса можно записать в виде:

$$P(D_i/K^*)=\frac{P(D_i)P(K^*/D_i)}{\sum_{s=1}^{h}P(D_s)P(K^*/D_s))},$$

где $P(K^*/D_i)=P(k_1^*/D_i)P(k_2^*/D_i)...P(k_v^*/D_i)$ для независимых признаков.

Для определения вероятности диагнозов по методу Байеса необходимо составить диагностическую матрицу на основе предыдущего статистического материала. Такая таблица составляется из вероятностей разрядов признаков для различных состояний. Например, если признак имеет два разряда «да - нет», то в таблице указывается условная вероятность появления признака $P(k_j/D_i)$. Вероятность отсутствия признака определяется как $P(\overline{k_j}/D_i)=1-P(k_j/D_i)$.

Процесс обучения по методу Байеса состоит в формировании диагностической матрицы. Важно предусмотреть возможность уточнения таблицы в процессе диагностики. Для этого в памяти вычислителя наряду со значениями $P(k_{js}/D_i)$ сохраняются и такие параметры: N – общее количество объектов, которые использовались для составления диагностической матрицы; N_i – количество объектов с диагнозом D_i; N_{ij} - количество объектов с диагнозом D_i, которые были обследованы по признаку k_j. Если поступает новый объект с диагнозом D_μ, то необходимо выполнить коррекцию существующих вероятностей диагнозов следующим образом:

$$P(D_i)=\begin{cases}\frac{N_i}{N+1}=P(D_i)\frac{N}{N+1}; i=1,2,...,n; i\neq\mu\\ \frac{N_\mu}{N+1}=P(D_\mu)\frac{N}{N+1}+\frac{1}{N+1}; i=\mu\end{cases}$$

Правило принятия решений – это правило, в соответствии с которым принимается решение о диагнозе. В методе Байеса объект с комплексом значений признаков K^* относится к диагнозу с наибольшей апостериорной вероятностью

$K^*\in D_i$ если

$$P(D_i/K^*)>P(D_j/K^*) \quad (j=1,2,...,n; i\neq j). \tag{2.11}$$

Правило (2.11) обычно уточняется введением порогового значения для вероятности диагноза: $P(D_i/K^*)\geq P_i$, где P_i – заранее выбранный уровень распознавания для диагноза D_i. При этом вероятность самого близкого конкурирующего диагноза будет не более $1\text{-}P_i$.

Метод Байеса имеет такие недостатки и ограничения:

- ошибки при распознавании редкостных диагнозов;
- необходимость запоминания всего обучающего множества признаков для оценки плотности вероятности при распознавании;
- необходимость предварительного назначения количества наблюдений.

- **Метод последовательного анализа**

Метод был предложен Вальдом и применяется для многоклассовой диагностики [4]. В этом методе в отличие от метода Байеса предварительно не устанавливается количество наблюдений, их используется столько, сколько необходимо для принятия решения о состоянии объекта с определенным уровнем риска.

При использовании метода Байеса для распознавания состояний D_1 и D_2 для независимых признаков необходимо составить выражение:

$$\frac{P(D_2/K^*)}{P(D_1/K^*)}=\frac{P(D_2)}{P(D_1)}\cdot\frac{P(k_1^*/D_2)...P(k_v^*/D_2)}{P(k_1^*/D_1)...P(k_v^*/D_1)}.$$

Если в указанном соотношении $\frac{P(D_2/K^*)}{P(D_1/K^*)}>1$, или $\frac{P(k_1^*/D_2)}{P(k_1^*/D_1)}\cdots\frac{P(k_v^*/D_2)}{P(k_v^*/D_1)}>\frac{P(D_1)}{P(D_2)}$,

то принимается решение $K^*\in D_2$.

В методе последовательного анализа отношение условных вероятностей признаков составляются не с начала распознавания, а последовательно после некоторого числа наблюдений. Поэтому для постановки диагноза в общем случае требуется меньшее число наблюдений.

Если υ-1 наблюдений не позволили принять решение при независимых признаках k_i^*, тогда выполняется неравенство:

$$B<\frac{P(k_1^*/D_2)}{P(k_1^*/D_1)}\cdots\frac{P(k_r^*/D_2)}{P(k_r^*/D_1)}<A; r=1,2,...,v-1, \qquad (2.12)$$

где A, B - соответственно верхняя и нижняя граница принятия решений.

Если после υ-го наблюдения выполняется неравенство:

$$\frac{P(k_1^*/D_2)}{P(k_1^*/D_1)}\cdots\frac{P(k_v^*/D_2)}{P(k_v^*/D_1)}>A, \qquad (2.13)$$

тогда принимается решение об отнесении объекта к диагнозу D_2: $K^*\in D_2$.

А если после υ-го наблюдения выполняется неравенство:

$$\frac{P(k_1^*/D_2)}{P(k_1^*/D_1)}\cdots\frac{P(k_v^*/D_2)}{P(k_v^*/D_1)}<B, \qquad (2.14)$$

тогда объект относится к диагнозу D_1.

Для уменьшения объема наблюдений, необходимо использовать наиболее информативные признаки.

- **Методы статистических решений**

При проведении диагностики необходимо определить такое значение x_0 параметра x объекта диагностики, по которому принимается решение об отнесении объекта к состоянию D_1 (при $x > x_0$) или к состоянию D_2 (при $x < x_0$).

В этом случае правило принятия решения имеет вид:

$$\text{при } x < x_0 \ x\in D_1; \quad \text{при } x > x_0 \ x\in D_2. \qquad (2.15)$$

На практике часто распределение плотностей вероятности диагностического параметра x для состояний D_1 и D_2 пересекаются, поэтому невозможно выбрать значение x_0, при котором правило (2.16) не приводило бы к ошибочным решениям. В этом случае необходимо определить такое оптимальное значение x_0, чтобы минимизировать количество ошибочных решений.

Обозначим H_{ij} (i=1;2; j=1;2) возможные решения по правилу (2.15), где индекс i обозначает индекс принятого диагноза, а индекс j – индекс действительного состояния. Пусть D_1 – исправное состояние, D_2 – дефектное состояние. Тогда H_{11} и H_{22} – правильные решения, H_{12} – соответствует пропуску дефекта, H_{21} – соответствует ложной тревоге.

Вероятность ложной тревоги определяется выражением:

$$P(H_{21}) = P(D_1)P(x > x_0 / D_1) = P_1 \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x / D_1)dx,$$

где P_1=$P(D_1)$ – априорная вероятность диагноза D_1; $P(x > x_0 / D_1)$ - вероятность того, что $x > x_0$ при условии нахождения объекта в состоянии D_1; $f(x / D_1)$ - плотность распределения вероятности диагностического параметра x для исправного состояния D_1.

Аналогично запишем вероятность пропуска дефекта:

$$P(H_{12}) = P(D_2)P(x < x_0 / D_2) = P_2 \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x / D_2)dx,$$

где P_2=$P(D_2)$ – априорная вероятность диагноза D_2; $\mathrm{P(x > x_0 / D_2)}$ - вероятность того, что $x > x_0$ при условии нахождения объекта в состоянии D_2; $\mathrm{f(x / D_2)}$ - плотность распределения вероятности диагностического параметра x для дефектного состояния D_2.

Вероятность принятия ошибочного решения состоит из вероятности ложной тревоги и вероятности пропуска дефекта. Для каждого из правильных и ошибочных диагнозов поставим в соответствие цену принятия решения C_{ij}. В результате получим выражения для определения величины среднего риска принятия решения в общем виде:

$$R = C_{11}P_1 \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x / D_1)dx + C_{21}P_1 \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x / D_1)dx + C_{12}P_2 \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x / D_2)dx + C_{22}P_2 \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x / D_2)dx. \quad (2.16)$$

Величина параметра x, по которому выполняется распознавание, является случайной величиной, поэтому выражение (2.16) описывает среднее значение (математическое ожидание) риска.

Для оценки вероятностей нахождения объекта диагностики в одном из состояний D_1 или D_2 используются такие методы:

1. Метод минимального риска

Граничное значение x_0 в правиле (2.15) определяется из условия минимума среднего риска. Для этого необходимо взять производную среднего риска (2.16) по x_0 и приравнять ее к нулю, получим условие экстремума:

$$\frac{dR}{dx_0} = C_{11}P_1 f(x_0 / D_1) - C_{21}P_1 f(x_0 / D_1) + C_{12}P_2 f(x_0 / D_2) - C_{22}P_2 f(x_0 / D_2) = 0,$$

откуда находим:

$$\frac{f(x_0 / D_1)}{f(x_0 / D_2)} = \frac{(C_{12} - C_{22})P_2}{(C_{21} - C_{11})P_1}. \quad (2.17)$$

Это условие часто определяет два значения x_0, одно из которых соответствует минимуму риска, а другое – максимуму риска. Выражение (2.17) является необходимым, но не достаточным условием минимума риска. Для существования минимума R в точке $x = x_0$ вторая производная должна быть положительной $\frac{d^2R}{dx^2_0} > 0$. В этом случае получаем следующее условие относительно производных плотностей распределения вероятностей:

$$\frac{f'(x_0 / D_1)}{f'(x_0 / D_2)} < \frac{(C_{12} - C_{22})P_2}{(C_{21} - C_{11})P_1}. \quad (2.18)$$

Если плотности распределения вероятностей $f(x/D_1)$ и $f(x/D_2)$ являются одномодальными (есть одно максимальное значение), тогда при $\overline{x_1} < x_0 < \overline{x_2}$, где $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ - математические ожидания указанных плотностей распределения вероятностей, условие (2.18) выполняется. В случае полимодальных (два и более максимальных значений) плотности распределения вероятностей условие (2.18) необходимо проверять в каждой точке экстремума. Значение x_0 является граничным значением диагностического параметра, которое по условию (2.15) обеспечивает минимум среднего риска.

Пусть плотности $f(x/D_1)$ та $f(x/D_2)$ являются одномодальными. Тогда, в соответствии с правилом (2.15) и исходя из соотношения (2.17), решение о состоянии объекта по параметру x принимается так:

$$x \in D_1, \text{ если } \quad \frac{f(x/D_1)}{f(x/D_2)} > \frac{(C_{12}-C_{22})P_2}{(C_{21}-C_{11})P_1}; \tag{2.19}$$

$$x \in D_2, \text{ если } \quad \frac{f(x/D_1)}{f(x/D_2)} < \frac{(C_{12}-C_{22})P_2}{(C_{21}-C_{11})P_1}. \tag{2.20}$$

В приведенных выражениях величина $\lambda = \dfrac{(C_{12}-C_{22})P_2}{(C_{21}-C_{11})P_1}$ представляет собой пороговое значение соотношения правдоподобия (соотношения плотностей распределения вероятностей); C_{21} – цена ложной тревоги; C_{21} – цена пропуска дефекта; $C_{11}<0$ и $C_{22}<0$ - цены правильных решений о состоянии объекта диагностики.

2. Метод минимального числа ошибочных решений

Пусть вероятность ошибочного решения для правила принятия решений (2.15) определяется суммой:

$$\mathrm{P_{ош}} = \mathrm{P_1}\int_{x_0}^{\infty} \mathrm{f(x/D_1)dx} + \mathrm{P_2}\int_{-\infty}^{x_0} \mathrm{f(x/D_2)dx}.$$

Условие существования экстремума вероятности $P_{ош}$ получим в виде:

$$\frac{\mathrm{dP_{ош}}}{\mathrm{dx_0}} = -\mathrm{P_1 f(x_0/D_1)} + \mathrm{P_2 f(x_0/D_2)} = 0.$$

Условие существования минимума $\dfrac{\mathrm{d^2P_{ош}}}{\mathrm{dx^2{}_0}} > 0$ для одномодальных распределений при условии $\overline{x_1} < x_0 < \overline{x_2}$ выполняется. Минимум вероятности ошибочного решения получим из равенства $f(x_0/D_1)/f(x_0/D_2) = P_2/P_1$, а решения о состоянии объекта принимается в соответствии с правилом:

$$x \in D_1, \text{ если } \quad \frac{f(x/D_1)}{f(x/D_2)} > \frac{P_2}{P_1}; \tag{2.21}$$

$$x \in D_2, \text{ если } \quad \frac{f(x/D_1)}{f(x/D_2)} < \frac{P_2}{P_1}, \tag{2.22}$$

где $P_1=P(D_1)$, $P_2=P(D_2)$ – соответственно априорные вероятности диагнозов D_1 и D_2.

Соотношения (2.21) и (2.22) представляют собой отдельный случай условий минимального риска, когда цены решений одинаковы. Так как последствия ошибочных решений могут существенно отличаться для ложной тревоги и пропуска дефекта, использование данного метода является оправданным только для случая дефектов с ограниченными последствиями. В этом случае можно считать цены ошибочных решений примерно одинаковыми.

3. Метод минимакса

Этот метод используется при отсутствии предварительных статистических сведений о вероятности диагнозов D_1 и D_2. Рассматривается самый неблагоприятный случай, когда наименее приемлемые значения вероятностей P_1 и P_2 приводят к максимальному значению риска. В данном методе величину x_0 выбирают таким образом, чтобы при наименее приемлемых значениях вероятности дефектного состояния P_1 обеспечить минимальные потери от ошибочного решения.

4. Метод максимального правдоподобия

Данный метод можно рассматривать как отдельный случай матода минимального риска. Правила принятия решений записываются в виде:

$$x \in D_1, \text{ если } \frac{f(x/D_1)}{f(x/D_2)} > 1;$$

$$x \in D_2, \text{ если } \frac{f(x/D_1)}{f(x/D_2)} < 1.$$

Граничные значения определяются из условия:

$$f(x_0/D_1) = f(x_0/D_2). \tag{2.23}$$

Сравнив условия (2.17) и (2.23), можно получить:

$$\frac{(C_{12}-C_{22})P_2}{(C_{21}-C_{11})P_1} = 1.$$

При решении практических задач цены правильных решений отрицательны: $C_{11}<0$, $C_{22}<0$, поэтому часто они не вводятся в рассмотрение, тогда из последнего выражения получим

$$\frac{C_{12}P_2}{C_{21}P_1} = 1. \tag{2.24}$$

Как правило, для большинства задач надежности вероятность неисправного (дефектного) состояния является малой величиной, но цена пропуска дефекта значительно выше цены ложной тревоги $C_{12}>C_{21}$. Тогда условие (2.24) дает решения, которые не требуют знания точных значений цен ошибок.

Если состояния объекта диагностики описываются вектором диагностических параметров $x=[x_1, x_2, \dots ,x_n]$, то в выражениях правил принятия решений рассмотренных выше методов одномерные плотности распределения вероятностей $f(x/D_1)$ и $f(x/D_2)$ будут многомерными, граничные точки соответственно будут граничными линиями, одномерные области интегрирования будут многомерными. В этом случае распознавание состояния объектов рассмотренными методами значительно усложняется.

2.6.2. Методы разделения в пространстве признаков

Некоторые методы распознавания основываются на гипотезе «компактности», в соответствии с которой точки, отображающие одно и то же состояние объекта, группируются в одной и той же области пространства признаков. Для распознавания состояний объектов в пространстве признаков используются следующие методы.

- **Линейные методы разделения**

Как указывалось ранее, каждый объект (система) характеризуется вектором признаков в многомерном пространстве признаков: x=[x_1, x_2, … ,x_n]. Составляющие вектора x могут быть дискретными или непрерывными величинами. В многомерном пространстве признаков объект представляется точкой (концом вектора). Если некоторая точка x (вектор) в пространстве признаков характеризует объект, который пребывает в состоянии D_i ($x \in D_i$), это означает, что она также относится к области состояния D_i в пространстве признаков. *Областью состояния* D_i в этом случае называется множество точек пространства признаков, которое характеризуется состоянием D_i.

Дискриминантными функциями для диагнозов D_i называются скалярные функции $f_i(x)$ ($i=1,2,...,n;\ j\neq i$), которые удовлетворяют условию $f_i(x)> f_j(x)$, при $x \in D_i$. Таким образом, функция $f_i(x)$ для точек диагноза D_i принимает наибольшее значение по сравнению с другими дискриминантными функциями.

При распознавании двух состояний с использованием функции, которая разделяет пространство признаков на состояния, используется разность соответствующих дискриминантных функций:

$$f(x)=f_1(x)- f_2(x)$$

С помощью разделяющих функций можно получить следующее правило принятия решений:

$$f(x)>0 \ \text{ при } x \in D_1;$$

$$f(x)<0 \ \text{ при } x \in D_2.$$

Для повышения надежности распознавания вводят пороги чувствительности, в этом случае правило принятия решений имеет вид:

$$x \in D_1, \text{ если } f(x)\geq\varepsilon;$$

$$x \in D_2, \text{ если } f(x)\leq-\varepsilon .$$

Условие $-\varepsilon<f(x)<\varepsilon$ означает отказ от распознавания. В указанном соотношении порог ε – достаточно малая положительная величина. При отказе от распознавания для принятия решения о состоянии объекта необходима дополнительная информация.

Методи распознавания с помощью линейных разделяющих функций называются линейными методами разделения, а диагнозы, для которых возможно такое распознавание, называются линейно-разделимыми.

- **Разделение в диагностическом пространстве**

Во многих случаях для эффективного распознавания необходимо использовать более сложные разделяющие функции.

В общем виде разделяющие функции можно представить как

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i \varphi_i(x),$$

где $\varphi_i(x)$ - заранее подобранные скалярные функции векторного аргумента.

Рассмотрим диагностическое пространство размерностью *v*, координаты точек которого $z_i = \varphi_i(x)$, ($i=1,2,\ldots, v$). Объект в данном диагностическом пространстве будет описываться вектором $z = [z_1, z_2, ..., z_v]$. Основная идея метода состоит в преобразовании пространства признаков в такое пространство, в котором возможно линейное разделение классов.

- **Метод потенциальных функций и метод потенциалов**

Метод потенциальных функций [3] является развитием идеи преобразования пространства признаков. По сравнению с другими методами он наиболее разработан и математически обоснован. Метод потенциалов отличается только построением алгоритма распознавания.

Суть методов состоит в том, что в качестве дискриминантных функций $f_i(x)$ для диагноза D_i в пространстве признаков подбираются такие функции, которые имеют наибольшие значения для точек данной области и уменьшаются по мере отдаления нее.

- **Метод стохастической аппроксимации**

Метод разработан для использования в задачах распознавания и в некоторых других смежных приложениях, позволяет оптимизировать процесс разделения в пространстве признаков [24,25].

В данном методе определение коэффициентов λ_i для построения разделяющей функции происходит с использованием алгоритма последовательных приближений.

Рассмотренные методы разделения в пространстве признаков имеют следующие недостатки:

- необходимо заранее знать вид разделяющих функций;
- отсутствует возможность учета новых знаний о корреляции между признаками;
- пространство признаков должно хорошо разделяться на классы;
- пространство признаков должно быть ортонормированным.

2.6.3. Метрические методы распознавания

Геометрически близкое расположение точек x_i и x_j, которые характеризуют объект в многомерном пространстве признаков, можно использовать для классификации состояний по критерию минимума расстояния с помощью задания определенной метрики.

Метрические методы базируются на количественной оценке близости с помощью функции расстояния (метрики) $d(x_i,x_j)$ между векторами диагностических признаков. Согласно алгоритму распознавания состояний необходимо определить меру близости исследуемого образа с некоторым эталонным образом.

- **Распознавание на основе эталонных комплексов диагностических признаков**

На практике используются разнообразные меры близости, но которые должны удовлетворять следующим свойствам:

$$d_{ij} \geq 0; \quad d_{ij} = d_{ji}; \quad d_{ij} \leq d_{ik} + d_{ki},$$

где d – функции расстояния между векторами диагностических признаков.

Если необходимо распознать исправное состояние D_1 или неисправное состояние D_2 по комплексу признаков X при известных эталонных комплексах признаков $X^e{}_{Di}$, то используются *меры расстояния* между совокупностями признаков:

$$x \in D_i \Rightarrow d_i = \min,$$

где d_i – *мера расстояния* между комплексами X и $X^e{}_{Di}$,

или используются *меры близости*:

$$x \in D_i \Rightarrow \sigma_i = \max,$$

где σ_i – *мера близости* между комплексами признаков; (*i=1, 2, …)*.

В качестве мер расстояния используются обычные и взвешенные эвклидовы расстояния, расстояние по Хеммингу и др. Рассмотрим меры расстояния.

Обычное эвклидово расстояние

$$d_i(x, x^e{}_{D_i}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x^j - x^{ej}{}_{D_i})^2}$$

целесообразно использовать, когда составляющие комплексов признаков являются физически однородными величинами и одинаково важными для распознавания.

Взвешенное эвклидово расстояние

$$d_i(x, x^e{}_{D_i}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mu^j (x^j - x^{ej}{}_{D_i})^2}$$

используется в случае, когда каждой составляющей комплекса признаков можно приписать неотрицательный вес μ^j, пропорциональный степени ее важности для диагностирования. Удобным является предположение, что $0 \le \mu \le 1$.

Расстояние по Хеммингу

$$d_i(x, x^e{}_{D_i}) = \sum_{j=1}^{n} \left| (x^j - x^{ej}{}_{D_i}) \right|.$$

Квадрат расстояния

$$d_i(x, x^e{}_{D_i}) = \sum_{j=1}^{n} (x^j - x^{ej}{}_{D_i})^2 .$$

Обобщенное расстояние

$$d_i(x, x^e{}_{D_i}) = \left[\sum_{j=1}^{n} \left| x^j - x^{ej}{}_{D_i} \right|^{\nu} \right]^{\mu/\nu}.$$

Для классификации состояний часто используются *меры подобия* R_{ij} n – мерных векторов [24]. В этом случае распознавание обследуемого образа U_i производится путем оценки меры подобия к каждому из эталонов V_i. Объект относится к тому классу, мера подобия к которому является максимальной:

$$U_i \in V_i, \text{ если } R_{ij} = max\, R_{ik},\ k=1,2,\ldots,m.$$

Использование для распознавания состояния объекта какой-либо из приведенных классификационных функций требует сравнения их с сформированными в период обучения пороговыми значениями мер близости для каждого из состояний, которые распознаются.

Преимуществом данного метода является отсутствие необходимости сохранения в памяти всех объектов обучающих множеств образов.

- **Метод ближайших соседей**

В многомерном пространстве признаков выделяется *гипершар* с центром в точке конца вектора диагностических признаков объекта. Его радиус выбирается наименьшим из возможных, но при этом в него должны попасть l точек, которые являются концами векторов диагностических признаков объектов обучающего множества (l – число ближайших соседей).

Варианты принятия решений следующие:

1. Если $l_1 > l_{1зад}$, принимается решение γ_1 (D_1);
   если $l_1 < l_{1зад}$, принимается решение γ_2 (D_2),

где l_1 – число объектов класса D_1 в выделенном гипершаре; $l_{1зад}$ – заданное пороговое значение.

Как правило, число ближайших соседей l выбирается из неравенства:

$$3 < l < 0.2(N_1+N_2),$$

где N_1, N_2 – соответственно количество объектов обучающего множества классов D_1 и D_2.

Изменение порога позволяет установить необходимое соотношение между ошибками в принятии решения: ложной тревогой и пропуском дефекта.

2. Если $l_1 > l_2$, принимается решение γ_1 (D_1);

   если $l_1 < l_2$, принимается решение γ_2 (D_2), где l_2 – число объектов класса D_2 выделенном гипершаре.

Обобщение для многоклассовой диагностики имеет вид:

$$j^* = \arg\max_j l_j,$$

где j^* - номер класса, в пользу которого принимается решение; l_j – количество объектов класса D_j в гипершаре.

Недостатком данного метода является необходимость сохранения в памяти диагностического устройства всех объектов обучающего множества.

Рассмотренные метрические методы распознавания имеют такие общие недостатки:

- высокая зависимость результатов распознавания от функции расстояния (метрики);
- низкая эффективность использования в задачах с большой размерностью пространства признаков и классов.

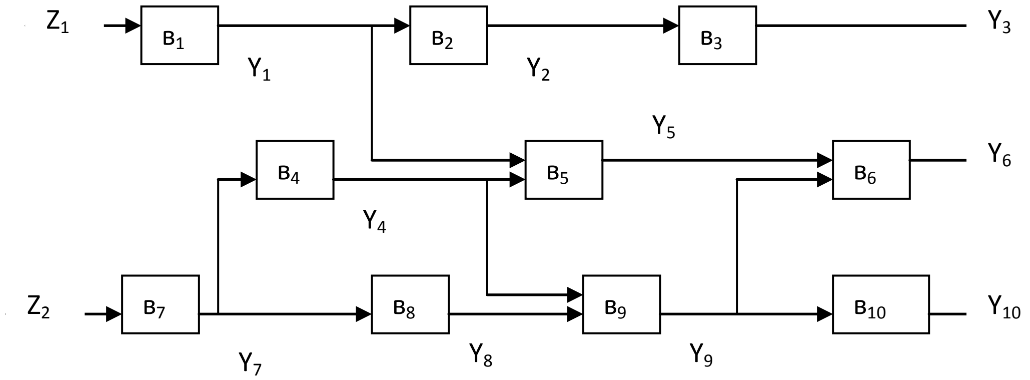
Контрольные вопросы

1. Какие методы относятся к статистический методам распознавания?
2. Дайте краткую характеристику метода Байеса.
3. Каковы преимущества метода последовательного анализа Вальда?
4. В чем суть методов статистических решений?
5. Какие методы используются для оценки вероятностей нахождения объекта диагностики в одном из состояний?
6. Назовите методы разделения в диагностическом пространстве.
7. Что такое разделяющая функция?
8. Какие есть метрические методы распознавания, на чем они основаны?
9. Назовите наиболее часто используемые меры расстояния.
10. В чем суть метода ближайших соседей?

Задачи для самостоятельной работы

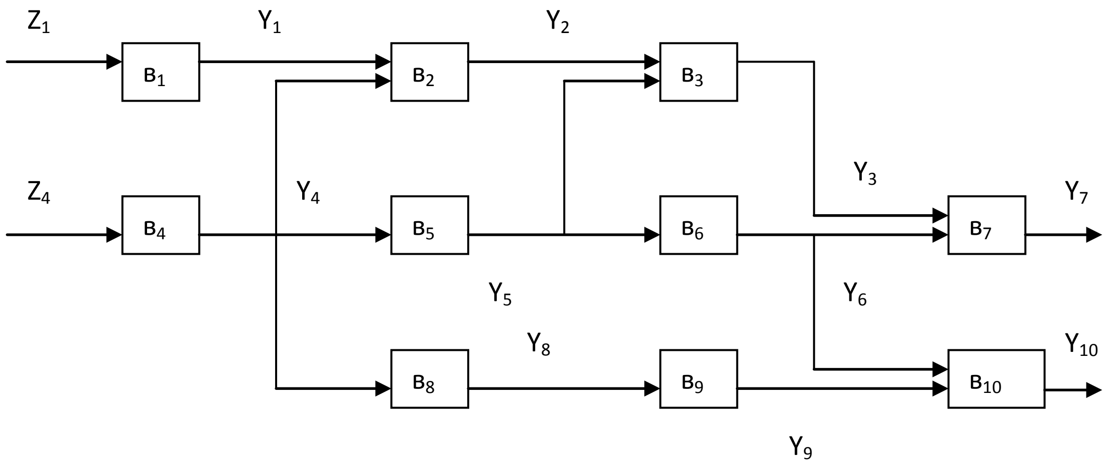
№ 2.1

Составить минимальный тест для проверки работоспособности:



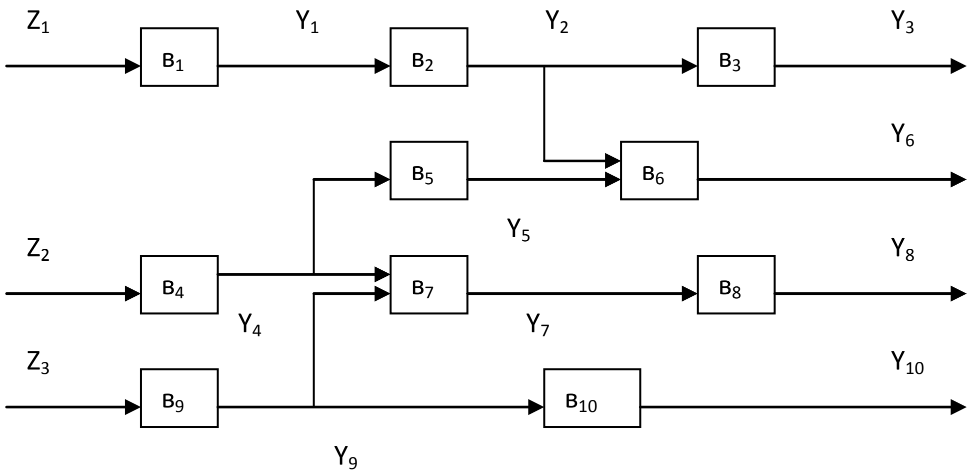
№2.2

Составить минимальный тест для проверки работоспособности:



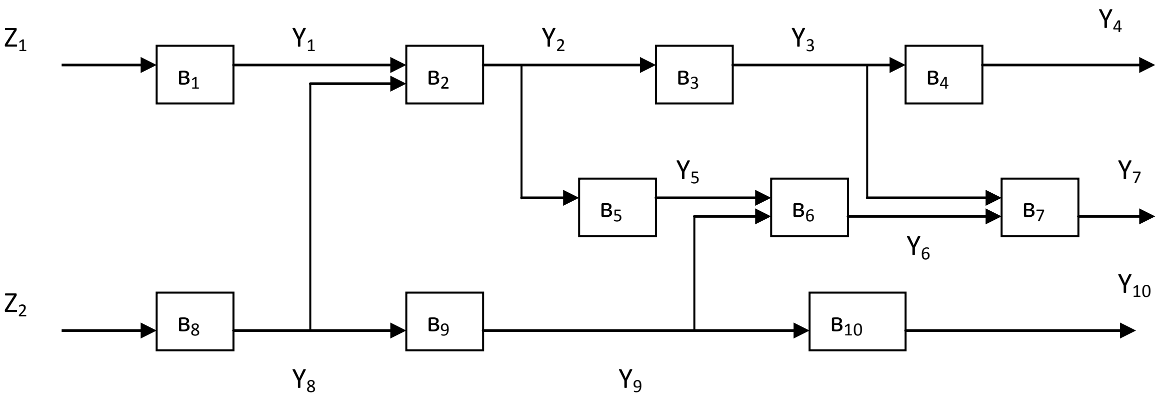
№ 2.3

Составить минимальный тест для проверки работоспособности:



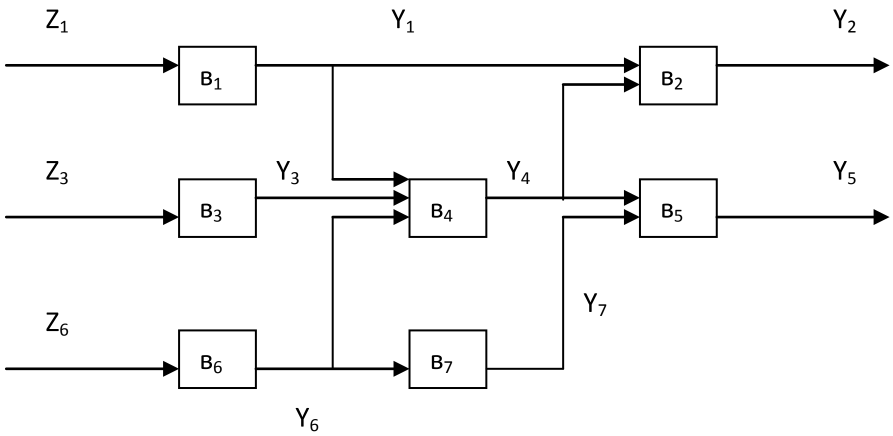
№ 2.4

Составить минимальный тест для проверки работоспособности:



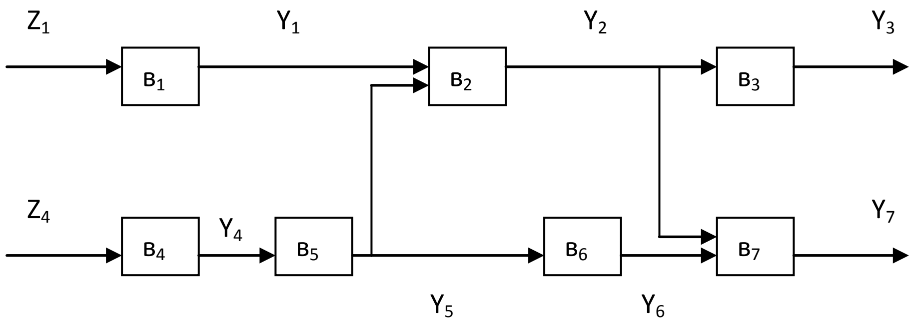
№ 2.5

Определить минимальный тест для локализации неисправности:



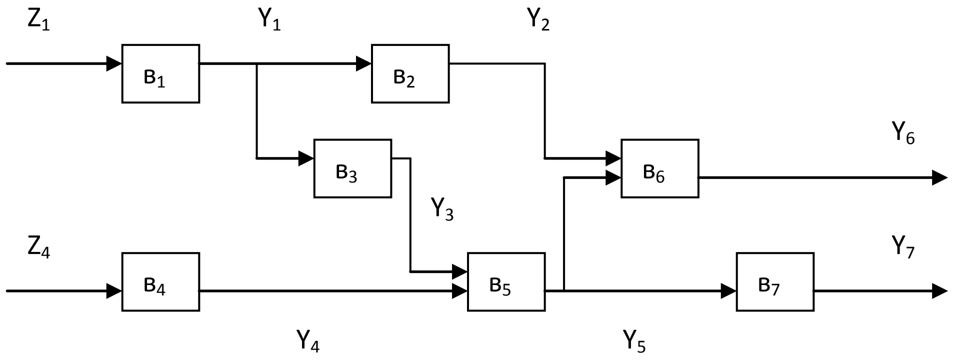
№ 2.6

Определить минимальный тест для локализации неисправности:



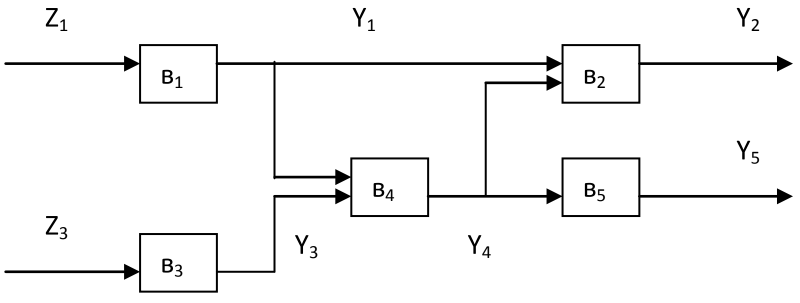
№ 2.7

Определить минимальный тест для локализации неисправности:



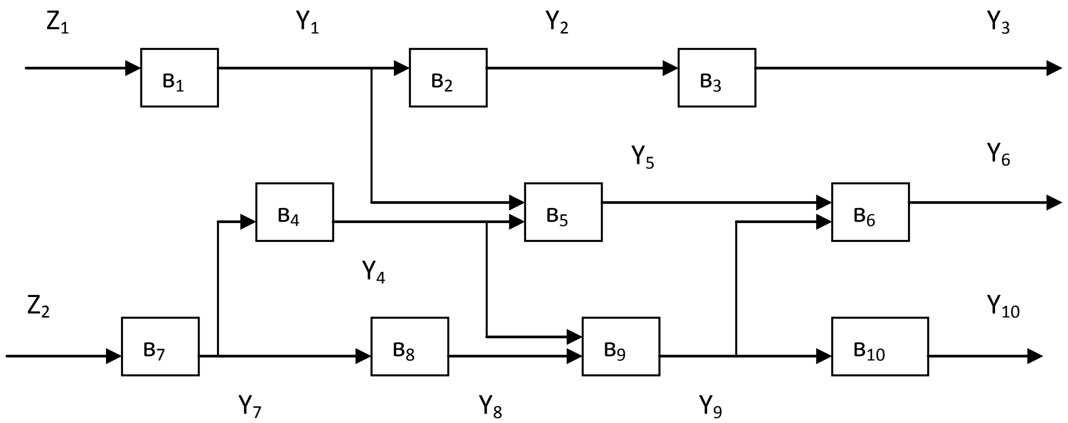
№ 2.8

Определить минимальный тест для локализации неисправности:



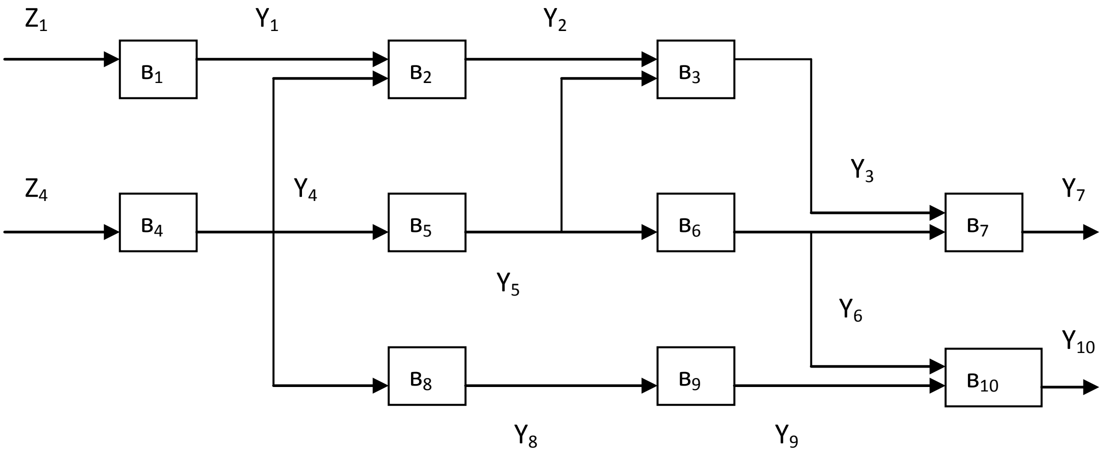
№ 2.9

Определить минимальный тест для локализации неисправности:



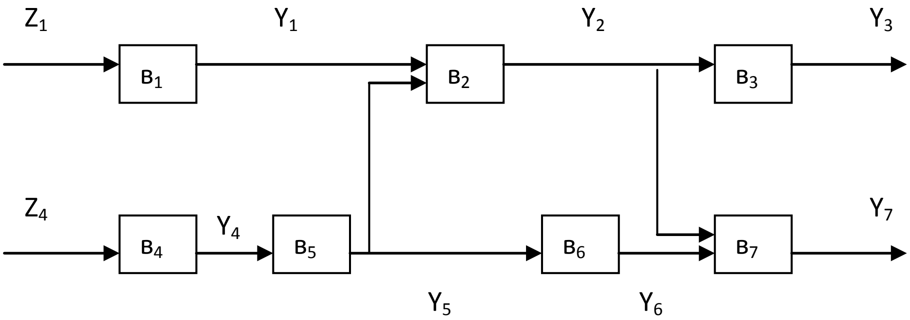
№ 2.10

Определить минимальный тест для локализации неисправности:



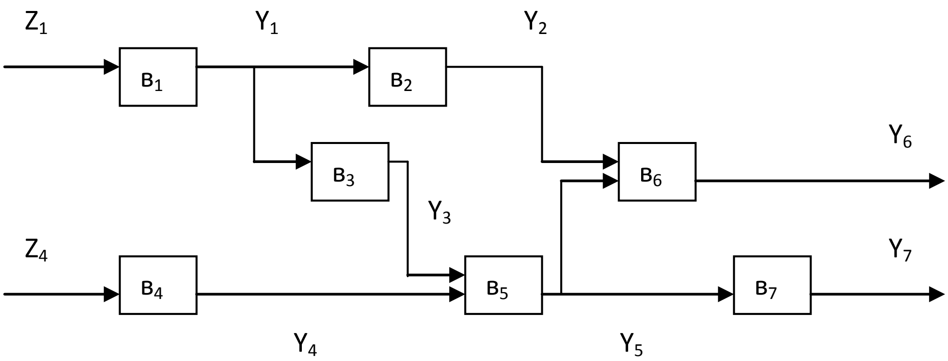
№ 2.11

Определить минимальный тест для локализации неисправности:



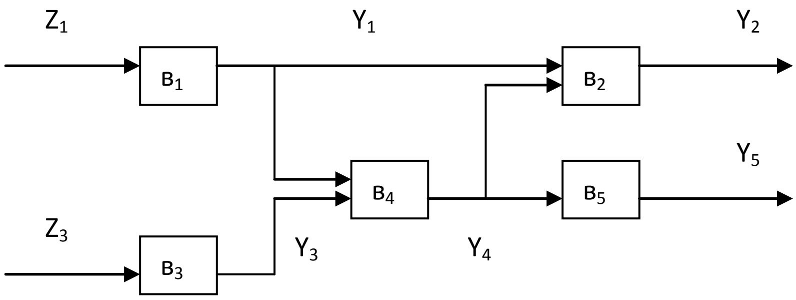
№ 2.12

Определить минимальный тест для локализации неисправности:



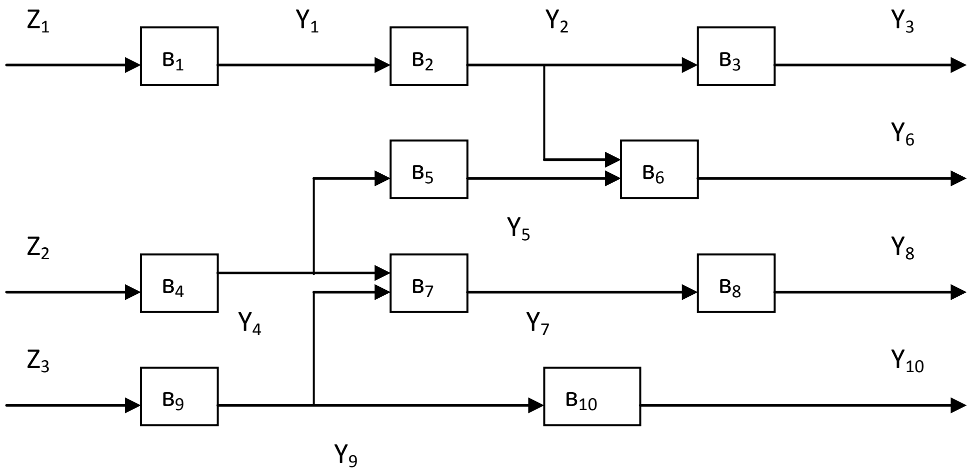
№ 2.13

Определить минимальный тест для локализации неисправности:



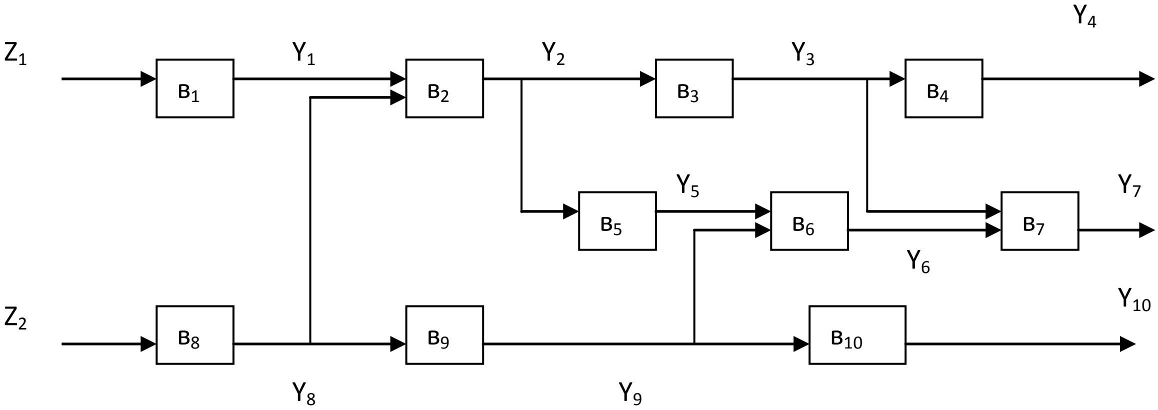
№ 2.14

Определить минимальный тест для локализации неисправности:



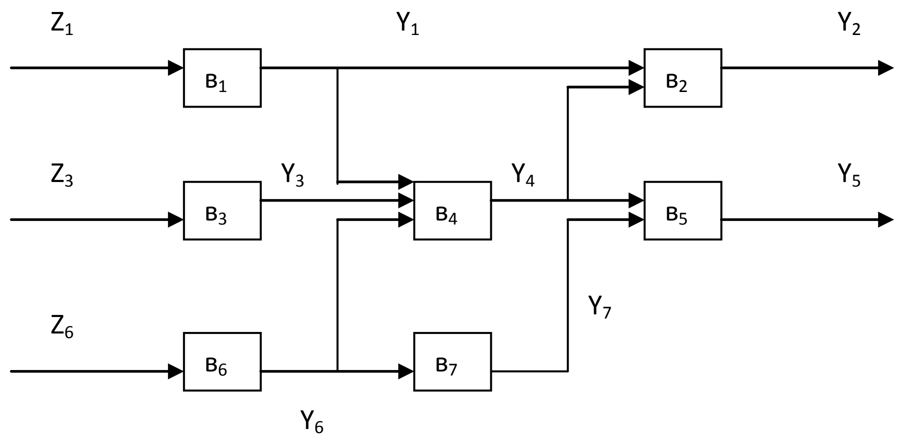
№ 2.15

Определить минимальный тест для локализации неисправности:



№ 2.16

Определить минимальный тест для локализации неисправности:



Приложение 1

Наименование	Интенсивность отказов $\lambda, 10^{-6}$ 1/час		
	максимальная	средняя	минимальная
	30,11	18,38	7,35
Аккумуляторы	19,30	7,20	0,35
Акселерометры	7,50	2,80	0,35
Антенны	3,25	0,36	0,20
Вибраторы	7,60	0,875	0,20
Волноводы:			
- гибкие	4,54	2,64	1,133
- жесткие	7,92	1,10	0,59
Выводы	0,08	0,045	0,02
Выключатели:			
- быстродействующие	2,10	0,40	0,09
- автоматические	0,40	0,138	0,045
- типа "Тумблер"	0,123	0,06	0,015
Выпрямители	0,75	0,60	0,20
Генераторы:			
- опорные	2,50	0,94	0,045
- постоянного тока	6,27	0,90	0,30
- переменного тока	2,94	0,70	0,033
Гироскопы:			
- высокоскоростные	11,45	7,50	3,95
- компасные	-	3,82	-
- высокой точности	25,0	10,0	2,50
Двигатели:			
-асинхронные	11,20	8,60	4,49
- синхронные	6,25	0,36	0,16
- шаговые	0,71	0,37	0,22
Диоды:			
- германиевые	0,678	0,157	0,002
- кремниевые	0,452	0,20	0,021
- селеновые	0,60	0,20	0,11
Зажимы	0,0009	0,0005	0,0003
Изоляторы	0,08	0,05	0,03
Кабели	2,20	0,475	0,002
Катушки:			
- обмоток моторов	0,045	0,03	0,01
- индуктивностей	0,031	0,02	0,011

- индуктивности соленоидные	0,091	0,04	0,02
Компасы магнитные	-	8,66	-
Коробки соединительные	0,58	0,40	0,28
Крепежные детали монтажные	0,55	0,012	0,003
Конденсаторы:			
- бумажные	0,04	0,0125	0,01
- танталовые	0,83	0,60	0,27
- керамические	0,133	0,0625	0,04
Линии задержки:			
- постоянного тока	0,25	0,10	0,08
- переменного тока	4,62	3,0	0,22
Магниты	7,11	5,65	2,02
Муфты:			
- управления переключающиеся	3,20	4,69	0,065
- фрикционный предохранитель	0,94	0,30	0,07
- электромагнитные	0,93	0,60	0,24
Передачи			
- зубчатые цилиндрические	4,30	2,175	0,082
- зубчатые секторы	1,80	0,9125	0,051
- зубчатые винтовые	0,098	0,20	0,11
- зубчатые редукторные	0,36	0,20	0,11
Переключатели:			
- кнопочные	0,11	0,70	0,043
- быстродействующие	5,38	4,00	0,476
- микроминиатюрные	0,50	0,25	0,09
Подшипники			
- качения	1,0	0,50	0,02
- скольжения	0,42	0,22	0,008
- высокоскоростные	9,53	1,80	0,07
Потенциометры:			
- композиционные	0,30	0,10	0,04
- проволочные	2,0	1,20	0,72
- угольные	4,44	0,25	0,10
Предохранители проволочные	0,83	0,50	0,38
Преобразователи напряжения	52,20	15,0	7,0
Приводы:			
- сервомеханизмов	33,60	12,50	0,86
- широкого назначения	18,50	6,90	0,60
Резисторы:			

- угольные	0,898	0,045	0,005
- композиционные сменные	0,533	0,053	0,007
- постоянные	0,07	0,03	0,01
Реле:			
- электромагнитные	0,50	0,30	0,11
- герметичные закрытые	0,19	0,04	0,02
- времени электронные	1,80	1,20	0,24
- времени электромеханические	2,57	1,50	0,79
	0,61	0,35	0,09
	0,96	0,60	0,24
Стабилизаторы напряжения:			
- угольные	13,16	9,65	6,09
- на магнитных усилителях			
	0,55	0,30	0,25
Транзисторы:			
- германиевые	1,90	0,30	0,04
- кремниевые	1,44	0,50	0,27
Трансформаторы:			
- входные	2,08	1,09	0,12
- выходные	0,20	0,09	0,04
- импульсные	0,235	0,17	0,03
Фильтры:			
- электрические	3,0	0,345	0,14
- механические	0,80	0,30	0,045
Электродвигатели:			
- электрические	0,58	0,30	0,401
- шаговые	0,71	0,37	0,22

ЛИТЕРАТУРА

1. Аврутов В.В., Аврутова І.В., Попов В.М. Випробування приладів і систем. Види випробувань та сучасне обладнання. Навчальний посібник - Київ, НТУУ «КПІ», 2009. – 64 с. : [Электронный ресурс]: электронная библиотека кафедры ПСОН – режим доступа: www.kafpson.kpi.ua/Arhiv/vyprob_sec.pdf
2. Автоматический контроль и диагностика систем управления силовыми установками летательных аппаратов/ Васильев В.И., Гусев Ю.А., Иванов А.И. и др. – М.: Машиностроение, 1989. – 240 с.
3. Айзерман М.А. Метод потенциальных функций в теории обучения машин/ М.А. Айзерман, Э.М. Браверманн, Л.И. Розоноэр. – М.: Наука, 1970. – 384 с.
4. Биргер И.А. Техническая диагностика/ И.А. Биргер. – М.: Машиностроение, 1978. – 240с.
5. Василенко Н.В., Макаров В.А. Модели оценки надежности программного обеспечения. – Вестник Новгородского государственного университета, №28, 2004. – с. 126-132.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей/ Е.С. Вентцель. – М.: Физматгиз, 1962. – 564 с.
7. Глазунов Л.П. и др. Основы теории надежности автоматических систем управления. - Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 208 с.
8. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей/ Б.К. Гнеденко. – М.: Наука, 1969. – 399 с.
9. Гобчанский О.П. Повышение радиационной стойкости индустриальных средств автоматики в составе бортовой аппаратуры/ Гобчанский О.П., Попов В.Д., Николаев Ю.// Современные технологии автоматизации. – 2001. - № 4. – с. 36-40.
10. Диагностирование и прогнозирование технического состояния авиационного оборудования/ Под ред. И.М. Синдеева. М: Транспорт, 1984 -191 с.
11. Дмитриев С.П., Колесов Н.В., Осипов А.В. Информационная надежность, контроль и диагностика навигационных систем. - СПб. - ЦНИИ «Электроприбор», 2003. - 207 с.
12. Дружинин Г.В. Надежность автоматизированных систем. - М.: Энергия, 1977. – 536 с.
13. Иванов Ю.П., Никитин В.Г., Чернов В.Ю. Контроль и диагностика информационно-вычислительных комплексов. - СПбГУАП, СПб, 2004 – 98 с.
14. Ивахненко А.Г. Принятие решений на основе самоорганизации/ А.Г. Ивахненко, Ю.П. Зайченко, В.Д. Димитров. – М.: Советское радио, 1976. – 277 с.
15. Качество продукции, испытания, сертификация. Терминология: Справочное пособие. – Вып. 4. – М.: Издательство стандартов, 1989. – 144 с.
16. Колобов А.Б. Надежность технических систем. – Ивановский государственный энергетический университет: [Электронный ресурс]: электронная библиотека ИГЭУ – Электронная статья – режим доступа: http://elib.ispu.ru/library/lessons/Kolobov
17. Котляров В.П. Основы тестирования программного обеспечения. Учебное пособие. – М.: Интернет-университет информационных технологий; Бином; Лаборатория знаний, 2009 – 285 с.
18. Кудрицкий В.Д., Синица М.А., Чинаев П.И. Автоматизация контроля радиоэлек-

тронной аппаратуры. – М.,1977. – 256 с.

19. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн.1. – М.: Сов. Радио. – 1969. – 752 с.
20. Половко А.М. Основы теории надежности. – М.: Наука, 1964. – 448 с.
21. Романюк С.Г. Оценка надежности программного обеспечения. – «Открытые системы», № 4, 1994. - [Электронный ресурс]: – Электронная статья – режим доступа: http://www.osp.ru/os/1994/04/178540/
22. Сборник задач по теории надежности. Под ред. Половко А.М и И.М. Маликова. - М.: Советское радио, 1972. – 408 с.
23. Техническая эксплуатация авиационного оборудования: учебник для вузов/ Под ред. В.Г. Воробьева - М.: Транспорт, 1990. – 296 с.
24. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах: Т.3./ Я.З. Цыпкин – М.: Наука, 1973. – 523 с.
25. Цыпкин Я. З. Основы теории обучающих систем/ Я.З. Цыпкин. – М.: Наука, 1970. – 521с.
26. Hartzell A.L., Silva M.G., Shea H.S. *MEMS Reliability*. – Springer, 2011. – 291 p.p.

Предметный указатель

А
алгоритм диагностирования 121
Б
безотказность 15
В
валидация 95
верификация 95
вероятность безотказной работы 19
вероятность отказа 19
виды неисправности 10
- повреждения 10
- отказы 10
- сбои 10
- разрушения 10

виды технического состояния 7
- исправность 8
- неисправность 8
- работоспособность 8
- неработоспособность 8
- правильное функционирование 8
- неправильное функционирование 8
- предельное состояние 8

Г
гарантийный срок службы 17
Д
дефект 10
дисперсия случайной величины наработки 28
долговечность 16
Ж
живучесть 16
З
задачи контроля 9
законы распределения 46
- экспоненциальное распределение 46
- распределение Релея 46
- распределение Вейбулла 46
- классическое нормальное распределение 46
- логарифмически нормальное распределение 46
- гамма–распределение 46

защищенность 93
И
идентификация 9
интенсивность отказов 19
К
контроль технического состояния 8

кратность резервирования 60
критерий предельного состояния 8
критерий согласия 44

Л

логическая функция различия состояний 125

М

мажоритарные системы 79
меры расстояния 139
- взвешенное эвклидово расстояние 139
- квадрат расстояния 139
- обычное эвклидово расстояние 139
- обобщенное расстояние 140
- расстояние по Хеммингу 139

методы диагностирования объектов 122
- метод последовательного анализа 122
- половинного разбиения 122
- комбинационный метод 122

методы программно-логического контроля 128
- метод двойного счета 128
- метод усеченного (упрощенного) алгоритма 128
- метод тройного хранения 128
- логический контроль данных 129
- метод контрольных тождеств 129
- метод контроля длительности выполнения программы 129

модель объекта контроля 110, 112
метод распознавания 130
- Байеса 131
- ближайших соседей 140
- линейного разделения 137
- метрический 138
- на основе эталонных комплексов диагностических признаков 138
- последовательного анализа 132
- потенциальных функций, потенциалов 138
- разделения в диагностическом пространстве 137
- стохастической аппроксимации 138

методы статистических решений 133
- максимального правдоподобия 136
- минимакса 136
- минимального риска 134
- минимального числа ошибочных решений 135

модели надежности программного обеспечения 98

Н

надежность 14
- аппаратурная 14
- информационная 14
- программная 14,93

надежность основной системы 55
надежность системы с резервированием 58
назначенный ресурс 16

наработка 15

О

объект диагностирования 9
объект контроля 9
отказ 8
- аппаратурный 10
-- внезапный 11
-- конструкционный 11
-- легкий 11
-- износовый 12
-- очевидный 12
-- постепенный 11
-- перемежающийся 11
-- полный 12
-- приработочный 12
-- производственный 11
-- скрытый 12
-- средний 12
-- тяжелый 12
-- устойчивый (окончательный) 11
-- частичный 12
-- эксплуатационный 11
- информационный 10
- программный 11
- отказ оператора 11
ошибка 10

П

показатели надежности восстанавливаемых объектов 33
- вероятность восстановления 33
- частота восстановления 33
- интенсивность восстановления 33
- среднее время восстановления 33
- параметр потока отказов 33
- коэффициент готовности 33
- коэффициент оперативной готовности 33

показатели надежности невосстанавливаемых объектов 19
- вероятность безотказной работы и вероятность отказа 19
- частота отказов или плотность распределения отказов 19
- интенсивность отказов 19
- средняя наработка до отказа 19

показатели надежности программного обеспечения 96
прогнозирование технического состояния 9

Р

резервирование 58
- с восстановлением 80
- с дробной кратностью 79
- нагруженное 60

- ненагруженное 65
- облегченное 71
- скользящее 76

ремонтопригодность 16

С

СКО случайной величины наработки 28
сохраняемость 16
средняя наработка до отказа 19
срок службы 16
структура системы 54

Т

таблица функций неисправностей (таблица состояния) 114
тестирование программного обеспечения 95
технический ресурс 16
техническое состояние 7

У

уравнение связи основных показателей надежности 22

Ф

функция
- дискриминантная 137
- разделяющая 137

Ч

частота отказов 19