UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Mecanica

DINAMICA SISTEMULUI DE PUNCTE MATERIALE (SISTEMUL MECANIC)

DINAMICA SISTEMULUI DE PUNCTE MATERIALE (SISTEMUL MECANIC)

- **Forțe exterioare și interioare.**
- **Proprietățile forțelor interioare.**
- **Ecuațiile diferențiale ale mișcării unui sistem de puncte materiale.**
- **Cantitatea de mișcare (impulsul) a unui sistem de puncte materiale. Teorema variației cantității de mișcare.**
- **Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale. Teorema despre mișcarea centrului de masă.**
- **Dinamica mișcării de translație a unui corp rigid. Ecuațiile diferențiale ale mișcării.**

NECESITATEA STUDIERII

Prelucrarea acestui material este necesară pentru studierea

- **dinamicii ciocnirilor**
- **dinamicii corpului de masă variabilă**
- **mecanicii mediului continuu**
- **pentru rezolvarea unor probleme de hidrodinamică**

Din materialul lecțiilor precedente vom folosi noțiunile de

- ***forță***
- ***vector principal al unui sistem de forțe***
- ***centrul de greutate al unui corp rigid***
- ***viteză și accelerație a unui punct***
- ***descriere dinamică a mișcării unui punct material prin metoda lui Newton.***

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

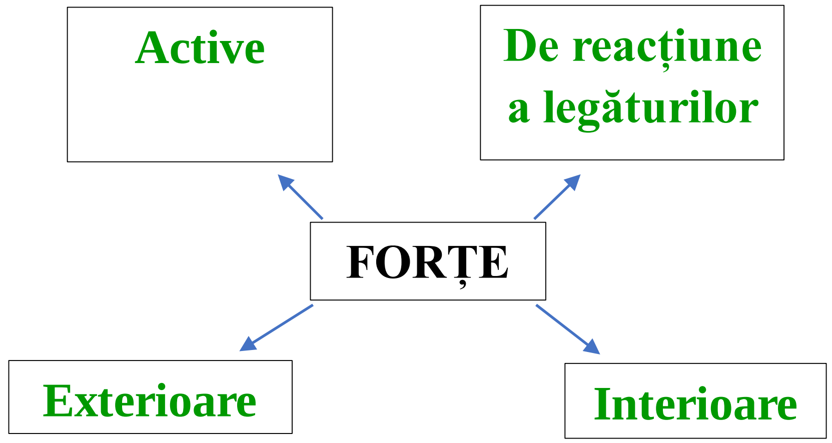
SISTEM DE PUNCTE MATERIALE
FORȚE EXTERIOARE ȘI INTERIOARE

Sistem de puncte materiale (sistem mecanic) - o totalitate de puncte materiale, mișcările cărora depind unele de altele.

Se numește ***masă M a unui sistem de puncte materiale suma maselor tuturor punctelor,*** ce intră în componența acestui sistem.

$$M = \sum_{k=1}^{N} m_k \qquad (1)$$

unde m_k este masa punctului material cu numărul k,
iar N – numărul tuturor punctelor sistemului.



Forțe exterioare - forțele de interacțiune dintre punctele materiale ale sistemului dat și punctele materiale ale altor sisteme.

Le vom nota prin $\vec{F}^e$

Forțe interioare - forțele de interacțiune dintre punctele materiale ale aceluiași sistem.

Le vom nota prin $\vec{F}^i$

PROPRIETĂȚILE FORȚELOR INTERIOARE A UNUI SISTEM DE PUNCTE MATERIALE

Conform legii a treia a lui Newton, forțele interioare figurează în perechi.

$$\vec{F}^{i}_{nk} = -\vec{F}^{i}_{kn} \qquad (2)$$

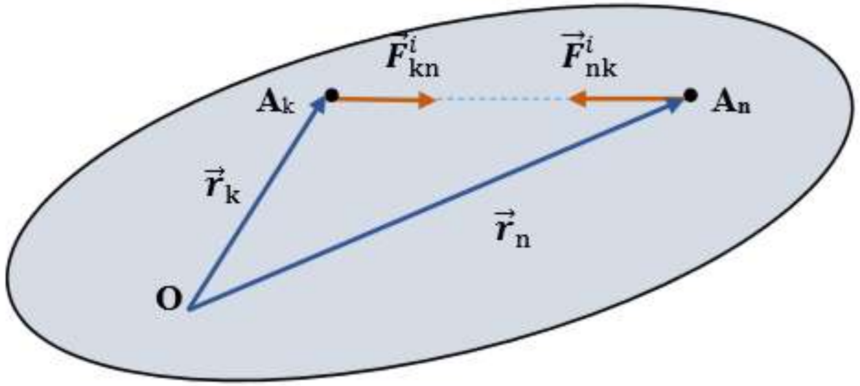


Fig.1

Din (2) rezultă două proprietăți ale forțelor interioare ale sistemului.

Proprietatea I: ***suma vectorială a tuturor forțelor interioare ale unui sistem de puncte materiale (vectorul principal al forțelor interioare) este egală cu zero.***

$$\vec{F}^{i} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}^{i}_{k} = 0. \qquad (3)$$

Proprietatea II: ***suma vectorială a momentelor tuturor forțelor interioare ale unui sistem de puncte materiale în raport cu un punct arbitrar (momentul principal al forțelor interioare) este egală cu zero.***

$$\vec{M}^{i}_{O} = \sum_{k=1}^{N} \left(\vec{r}_k \times \vec{F}^{i}_{k}\right) = 0. \qquad (4)$$

Observație.

- Din aceste două proprietăți ale forțelor interioare ale unui sistem de puncte materiale nu rezultă că sistemul de forțe este echilibrat.
- Aceasta se explică prin faptul că forțele interioare sînt aplicate la puncte materiale diferite, care în caz general se pot deplasa unul în raport cu altul.
- Un exemplu evident, ce confirmă această observație, poate servi Sistemul Solar, planetele căruia și sateliții lor efectuează mișcări suficient de complicate doar sub acțiunea a forțelor interioare.

- Fie dat un sistem ce constă din *N* puncte materiale, care se mișcă în raport cu un sistem inerțial de referință *Oxyz*.
- Dacă sistemul este supus la legături, atunci aplicăm principiul eliberării de legături și înlocuim legăturile cu forțele de reacțiune respective. Notăm prin $\vec{F}_k^{e}$ și $\vec{F}_k^{i}$ rezultantele tuturor forțelor exterioare și interioare aplicate punctului cu indicile k.
- Atunci fiecare punct al sistemului poate fi considerat liber și fiecărui punct se poate aplica metoda lui Newton de descriere dinamică a mișcării, unui punct material, adică

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i,\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i, \ldots, m_N\ddot{\vec{r}}_N = \vec{F}_N^e + \vec{F}_N^i,$$

sau în formă mai concisă

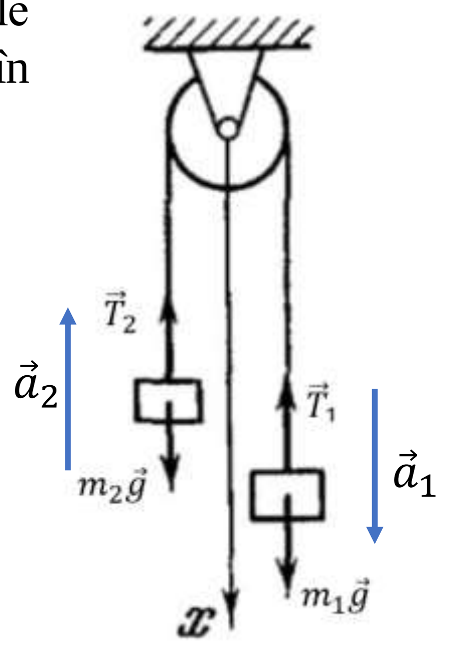
$$m_k\ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i, \quad (k = 1, 2, \ldots, N) \qquad (5)$$

În proiecții pe axele de coordonate carteziene fixe:

$$m_k\ddot{x}_k = F_{kx}^e + F_{kx}^i, \qquad m_k\ddot{y}_k = F_{ky}^e + F_{ky}^i, \qquad m_k\ddot{z}_k = F_{kz}^e + F_{kz}^i, \quad (k = 1, 2, \ldots, N) \qquad (6)$$

(5) și (6) sînt ***ecuațiile diferențiale ale mișcării unui sistem de puncte materiale în forma vectorială și în proiecții pe axele x, y și z.***

Două greutăți de masele m_1 și m_2 sînt legate între ele cu un cablu, trecut peste un scripete. Neglijînd forțele de frecare, precum și masele cablului și scripetelui, să se determine legea mișcării greutăților și tensiunea în cablu.



Rezolvare:

$\vec{a}_2 = -\vec{a}_1.$

- Eliberăm de legături (cablu) și înlocuim prin reacțiunile $\vec{T}_1$ și $\vec{T}_2.$
- Considerînd acum ambele corpuri libere, compunem ecuațiile diferențiale ale mișcării în proiecții pe axa *x*, conform expresiei $m_k\ddot{x}_k = F^e_{kx} + F^i_{kx},$
- Ținînd cont de *proprietatea I* a forțelor interioare a sistemului, $\vec{F}^i = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}^i_k = 0.$

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - T_1, \qquad m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - T_2.$$

Ținînd cont că $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$ și $T_1 = T_2 = T$ (deoarece se neglijează forțele de frecare, precum și masele cablului și a scripetelui), se obține

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - T, \qquad -m_2\ddot{x}_1 = m_2 g - T.$$

Rezolvînd aceste ecuații în raport cu accelerația $\ddot{x}_1$ și tensiunea *T* a cablului, vom afla

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \qquad T = 2\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} g.$$

CANTITATEA DE MIȘCARE (IMPULSUL) A UNUI SISTEM DE PUNCTE MATERIALE

Cantitate de mișcare a unui sistem de puncte materiale se numește vectorul $\overrightarrow{Q}$, egal cu suma cantităților de mișcare ale tuturor punctelor materiale ale sistemului

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k \qquad (7)$$

Vectorul cantității de mișcare poate fi dat prin proiecțiile sale pe axele de coordonate, ce rezultă din (7) și teorema despre proiecțiile unei sume vectoriale.

$$Q_x = \sum_{k=1}^{N} m_k v_{kx} \qquad Q_y = \sum_{k=1}^{N} m_k v_{ky} \qquad Q_z = \sum_{k=1}^{N} m_k v_{kz} \qquad (8)$$

TEOREMĂ: Derivata în raport cu timpul a vectorului cantității de mișcare a unui sistem de puncte materiale este egală cu vectorul principal al tuturor forțelor exterioare, aplicate punctelor materiale ale sistemului.

$$\frac{d}{dt}\vec{Q} = \vec{F}^e$$

Pentru demonstrarea teoremei să transcriem ecuațiile diferențiale ale mișcării unui sistem de puncte materiale

$m_k\ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$, și să însumăm părțile stîngi și drepte după indicile k

$$\sum_{k=1}^{N} m_k\ddot{\vec{r}}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^i \qquad (9)$$

Termenii din partea dreaptă a acestei egalități sînt vectorii principali ai tuturor forțelor exterioare $\vec{F}^e$ și respectiv a tuturor forțelor interioare $\vec{F}^i$. Adică

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e = \vec{F}^e, \qquad \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^i = \vec{F}^i \qquad (10)$$

Termenul din partea stîngă a expresiei (9) poate fi transformat

$$\sum_{k=1}^{N} m_k\ddot{\vec{r}}_k = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} m_k\dot{\vec{r}}_k = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} m_k\vec{v}_k \qquad (11)$$

Atunci, ținînd cont de relațiile

$$\vec{F}^i = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^i = 0\,, \quad \vec{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k\,, \quad \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e = \vec{F}^e, \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^i = \vec{F}^i \quad \text{și} \quad \sum_{k=1}^{N} m_k \ddot{\vec{r}}_k = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\vec{r}}_k = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k$$

expresia $\sum_{k=1}^{N} m_k \ddot{\vec{r}}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^i$ va lua forma

$$\frac{d}{dt}\vec{Q} = \vec{F}^e \qquad (12)$$

ce și demonstrează teorema.

În proiecții pe axele de coordinate *x*, *y*, *z* egalitatea vectorială (12) este echivalentă cu trei egalități scalare

$$\frac{d}{dt}Q_x = F_x^e, \quad \frac{d}{dt}Q_y = F_y^e, \quad \frac{d}{dt}Q_z = F_z^e. \qquad (13)$$

Relațiile (12) și (13) reprezintă matematic

teorema variației cantității de mișcare a unui sistem de puncte materiale în formă diferențială și respectiv în proiecții pe axele de coordonate x, y, z.

Consecințe:

1. ***Forțele interioare ale unui sistem de puncte material direct nu pot schimba cantitatea de mișcare a sistemului*** (ele pot schimba indirect prin intermediul forțelor exterioare).

2. ***Dacă vectorul principal al tuturor forțelor exterioare, aplicate unui sistem de puncte materiale este egal cu zero, atunci are loc conservarea vectorului cantității de mișcare al sistemului.***

Într- adevăr, conform condiției $\vec{F}^e = 0$, și din $\frac{d}{dt}\vec{Q} = \vec{F}^e$ rezultă $\frac{d}{dt}\vec{Q} = 0$. Prin urmare

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0 = \text{const.}, \qquad (14)$$

$\vec{Q}_0$ este valoarea inițială a vectorului $\vec{Q}$.

3. ***Dacă proiecția vectorului principal al tuturor forțelor exterioare, aplicate unui sistem de puncte materiale, pe o axă fixă este egală cu zero, atunci are loc legea conservării proiecției cantității de mișcare a sistemului pe această axă.***

Fie proiecția vectorului principal al tuturor forțelor exterioare pe axa x este egală cu zero, adică $F^e_{kx} = 0$. Atunci din $\frac{d}{dt}Q_x = F^e_x$ rezultă $\frac{d}{dt}Q_x = 0$. Prin urmare

$$Q_x = Q_{0x} = \text{const.} \qquad (15)$$

Relațiile (14) și (15) se numesc ***legi ale conservării cantității de mișcare a sistemului de puncte materiale*** sau ***integrale prime.***

TEOREMA VARIAȚIEI CANTITĂȚII DE MIȘCARE

Să transformăm egalitatea $\frac{d}{dt}\vec{Q} = \vec{F}^e$. Pentru aceasta să înmulțim ambele părți cu dt și să integrăm în limitele de la t_0 pînă la t.

$$\int_{t_0}^{t} d\vec{Q} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^e dt \qquad \text{sau} \qquad \vec{Q}(t) - \vec{Q}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^e dt \qquad (16)$$

Să notăm cantitatea de mișcare a sistemului în momentele t și t_0 respectiv prin $\vec{Q}$ și $\vec{Q}_0$, iar prin $\vec{S}^e$- vectorul principal al impulsurilor tuturor forțelor exterioare, aplicate punctelor sistemului.

$$\vec{S}^e = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^e dt = \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e \, dt = \sum_{k=1}^{N} \int_{t_0}^{t} \vec{F}_k^e dt = \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_k^e$$

Atunci (16) va lua forma

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \vec{S}^e \qquad (17)$$

TEOREMA VARIAȚIEI CANTITĂȚII DE MIȘCARE

Relația (17) este expresia matematică ***a teoremei despre variația cantității de mișcare (teorema impulsurilor) a unui sistem de puncte materiale în formă integrală,*** care poate fi formulată în felul următor :
Variația cantității de mișcare a unui sistem de puncte materiale în intervalul de timp [t_0, t] este egală cu vectorul principal al impulsurilor tuturor forțelor exterioare, aplicate sistemului în același interval de timp.

Relația vectorială (17) este echivalentă cu trei relații scalare în proiecții pe axele de coordonate *x*, *y*, *z*

$$Q_x - Q_{0x} = S_x^e, \quad Q_y - Q_{0y} = S_y^e, \quad Q_z - Q_{0z} = S_z^e \qquad (18)$$

unde S_x^e, S_y^e, S_z^e sînt proiecțiile vectorului principal al impusurilor tuturor forțelor exterioare pe axele *x*, *y*, *z*.
Q_x, Q_y, Q_z și Q_{0x}, Q_{0y}, Q_{0z} sînt valorile proiecțiilor cantității de mișcare ale sistemului de puncte materiale în momentele de timp *t* și t_0.

Relațiile (18) reprezintă matematic teorema variației cantității de mișcare în formă integrală în proiecții pe axele de coordonate *x*, *y*, *z*.

CENTRUL DE MASĂ AL UNUI SISTEM DE PUNCTE MATERIALE

Se numește centru de masă sau centru de inerție al unui sistem de puncte materiale un punct geometric, vectorul de poziție $\vec{r}_C$ al căruia se determină prin egalitatea

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k\ , \qquad (19)$$

sau punctul cu coordonatele carteziene

$$x_C = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k x_k,\quad y_C = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k y_k,\quad z_C = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k z_k. \qquad (20)$$

$\vec{r}_k$ și x_k, y_k, z_k sînt corespunzător vectorul de poziție și coordonatele punctului material de masa m_k.

- Este evident, că centrul de masă a unui rigid, aflat într-un cîmp omogen al forțelor de greutate, coincide cu centrul lui de greutate.
- Într-adevăr, înmulțind cu modulul accelerației forței de greutate g numărătorul și numitorul părții drepte a relației

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k$$

obținem

CENTRUL DE MASĂ AL UNUI SISTEM DE PUNCTE MATERIALE

$$\vec{r}_C = \frac{1}{mg}\sum_{k=1}^{N} m_k g \vec{r}_k = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{N} p_k \vec{r}_k$$

ce coincide cu expresia pentru vectorul de poziție al centrului de greutate al unui rigid, unde P este greutatea corpului, iar p_k=$m_k g$ - greutatea punctului material cu indicile k.

La determinarea centrului de masă a unui sistem pot fi folosite metodele de determinare a centrului de greutate stabilite în statică.

Să aducem expresia $\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k$ la forma

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k = m\vec{r}_C$$

Acum presupunem că sistemul de puncte materiale se mișcă, adică $\vec{r}_k = \vec{r}_k(t), \vec{r}_C = \vec{r}_C(t)$.
Atunci, derivînd după timp această relație, obținem

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k = \frac{d}{dt} m\vec{r}_C$$

CENTRUL DE MASĂ AL UNUI SISTEM DE PUNCTE MATERIALE

sau

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k = m\vec{v}_C$$

Prin urmare

$$\vec{Q} = m\vec{v}_C \qquad (21)$$

unde $\vec{v}_C$ este viteza centrului de masă.

Egalitatea (21) poate fi percepută în felul următor: ***cantitatea de mişcare a unui sistem de puncte materiale este egală cu cantitatea de mişcare a centrului de masă, dacă în el se va concentra masa întregului sistem.***

Vectorul cantității de mişcare $\vec{Q}$ poate fi dat prin proiecțiile pe axele *x*, *y*, *z*, proiectînd relația vectorială (21) pe aceste axe

$$Q_x = mv_{Cx}, \quad Q_y = mv_{Cy}, \quad Q_z = mv_{Cz}. \qquad (22)$$

Să substituim în teorema variației cantității de mişcare a unui sistem de puncte materiale în formă diferențială, $\frac{d}{dt}\vec{Q} = \vec{F}^e$, expresia cantității de mişcare a sistemului de puncte materiale în forma (21).

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_C) = \vec{F}^e$$

TEOREMA DESPRE MIȘCAREA CENTRULUI DE MASĂ

sau, ținînd cont că masa sistemului *m* este constantă și $\vec{a}_C = \frac{d}{dt}\vec{v}_C$, obținem

$$m\vec{a}_C = \vec{F}^e \qquad (23)$$

Expresia (23) reprezintă expresia matematică a teoremei despre mișcarea centrului de masă, ce poate fi formulată în felul următor: ***centrul de masă al unui sistem de puncte materiale se mișcă la fel ca și punctul material în care este concentrată masa întregului sistem și căruia îi sînt aplicate toate forțele exterioare, care acționează asupra punctelor sistemului.***

Egalitatea vectorială (23) poate fi scrisă în proiecții pe axele de coordonate carteziene inerțiale *x*, *y*, *z*, adică

$$ma_{Cx} = F_x^e, \quad ma_{Cy} = F_y^e, \quad ma_{Cz} = F_z^e, \qquad (24)$$

Consecințe:

1. ***Forțele interioare ale unui sistem de puncte materiale nemijlocit nu pot schimba caracterul mișcării centrului de masă al sistemului.***

2. ***Dacă vectorul principal al tuturor forțelor exterioare, aplicate punctelor materiale ale sistemului, este egal cu zero, atunci centrul de masă al sistemului se află în repaus sau se mișcă uniform și rectiliniu.***

Într-adevăr, dacă $\vec{F}^e = 0$, atunci din $m\vec{a}_C = \vec{F}^e$ avem $m\vec{a}_C = 0$ sau $\vec{a}_C = \frac{d}{dt}\vec{v}_C = 0.$

din care rezultă

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{0C} = const, \qquad (25)$$

unde $\vec{v}_{0C}$ este viteza inițială a centrului de masă.

3. ***Dacă proiecția vectorului principal al tuturor forțelor exterioare, aplicate punctelor materiale ale sistemului, pe o axă oarecare este egală cu zero, atunci proiecția vitezei centrului de masă al sistemului pe această axă este o mărime constantă.***

Într-adevăr dacă , de exemplu, $F_x^e = 0$, atunci din relația $ma_{Cx} = F_x^e$ vom avea $a_{Cx} = \frac{d}{dt}v_{Cx} = 0,$

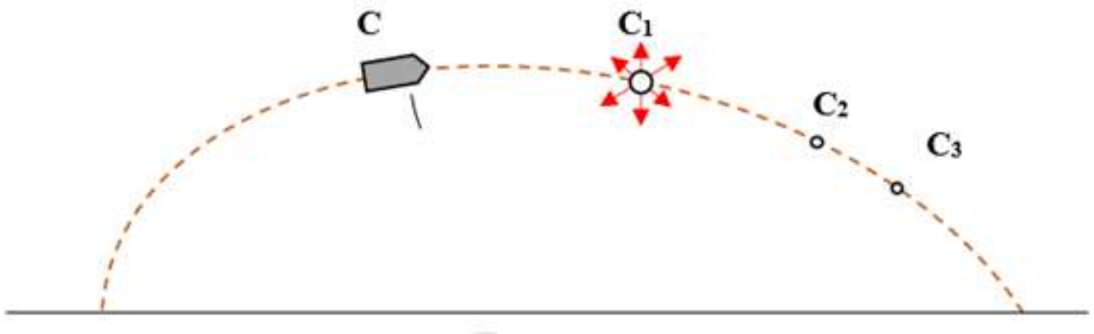
de unde rezultă

$$v_{Cx} = const. \qquad (26)$$

4. ***Cuplul de forțe, aplicat unui rigid, nu poate schimba mișcarea centrului de masă (el poate provoca numai o mișcare de rotație a corpului).***

Exemplul 1. Din dinamica punctului material se cunoaște că dacă se neglijează rezistența aerului, atunci un proiectil descrie o parabolă.

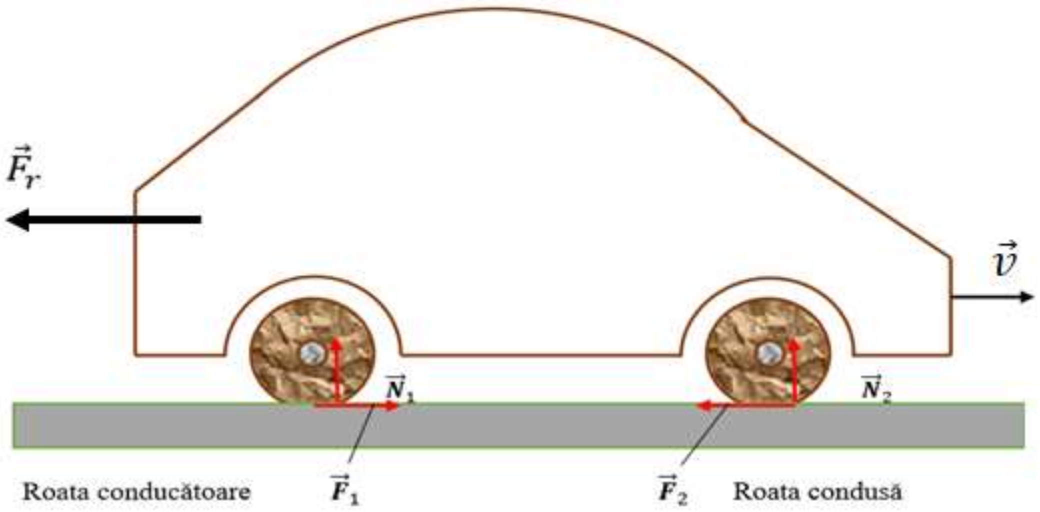
Presupunînd că proiectilul C face explozie în punctul C_1, schijele sale se mișcă pe asemenea traiectorii și cu astfel de viteze încît centrul de masă C al sistemului format din schije va continua să se miște după arcul de parabolă cu aceiași viteză cu care s-ar fi mișcat proiectilul, dacă nu ar fi făcut explozie. Aceasta se explică prin faptul că în timpul exploziei nu intervin forțe noi exterioare și deci are loc consecința întîi.



1. ***Forțele interioare ale unui sistem de puncte materiale nemijlocit nu pot schimba caracterul mișcării centrului de masă al sistemului.***

Exemplul 2.

- Studiem mişcarea unui automobil pe un drum rectiliniu.
- Forțele interioare nu pot mişca automobilul, deoarece numai forțele exterioare pot mişca centrul lui de masă.
- Forțe exterioare care acționează asupra automobilului sînt forța de greutate, forța de rezistență a aerului și forța de reacțiune a drumului.
- Forța de rezistență a aerului poate doar frîna mişcarea, iar forța de greutate este verticală şi nu poate mişca automobilul pe drumul orizontal.
- Rămîne să cercetăm forța de reacțiune a drumului. Aceste forțe de reacțiune se pot descompune pe direcțiile verticală și paralelă drumului, numite respectiv componenta normală și forța de frecare.
- Componenta normală nu poate efectua mişcarea orizontală a automobilului.
- Unica forță motrică care poate pune în mişcare automobilul este forța de frecare dintre roata conducătoare și drum, adică forța $\vec{F}_1$.
- Vectorul principal al acestor forțe mortice a roților conducătoare reprezintă ***forța motrică a automobilului.***
- Forțele de frecare aplicate roților conduse dimpotrivă numai frînează mişcarea.



Datorită forțelor de frecare se explică și mișcarea unui om, de exemplu, pe o podea orizontală.

Asupra unui om ce stă pe o podea orizontală acționează două forțe exterioare:

- forța de greutate
- forța de reacțiune a podelei.

Ambele sînt orientate perpendicular pe podea și, deci sînt insuficiente pentru mișcarea în direcție orizontală.

La începutul mișcării la deplasarea unui picor înainte pe contul eforturilor musculare, piciorul al doilea tinde să se deplaseze înapoi, deoarece centrul de masă trebuie să rămînă în repaus. Prin urmare între talpa piciorului al doilea și podea apare forța de frecare, orientate înainte. Această forță de frecare este ***forță motrică pentru om***.

Dacă podeaua va fi absolut netedă, atunci numai cu eforturile musculare omul nu va putea să se deplaseze.

Exemplul 3. *Mişcarea corpurilor Sistemului Solar în raport cu sistemul de coordonate fix.*

Să cercetăm mişcarea corpurilor Sistemului Solar în raport cu sistemul de coordonate "fix".

Centrul de masă a Sistemului Solar este situat în vecinătatea centrului Soarelui.

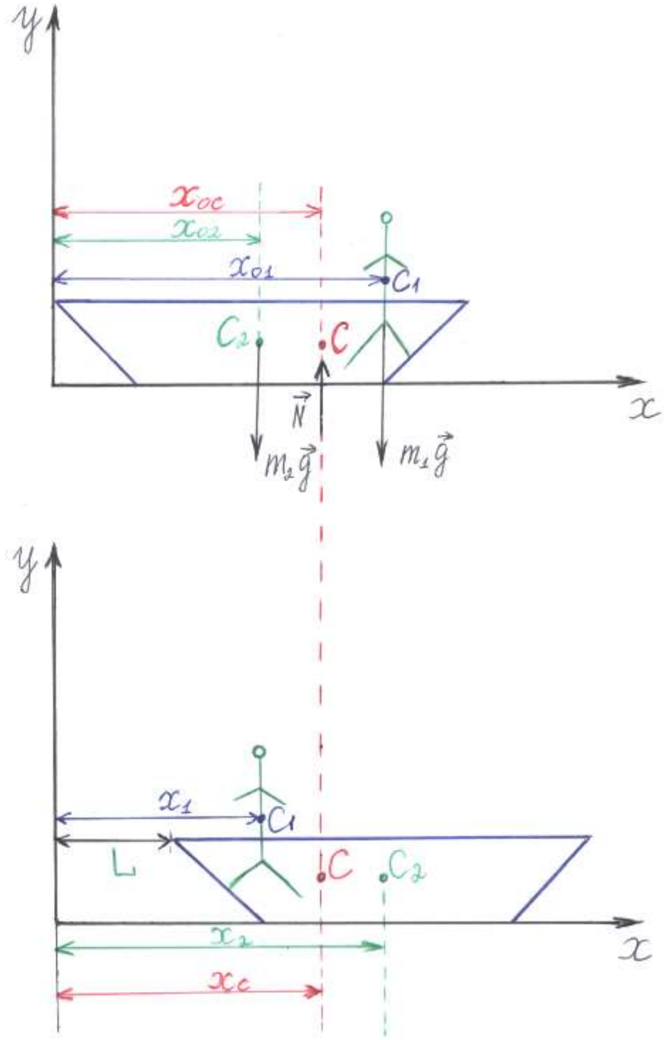
- Atracţia stelelor îndepărtate poate fi neglijată, astfel încât Sistemul Solar poate fi considerat sistem izolat (acţionat doar de forţele interioare).
- Din teorema despre mişcarea centrului de masă, rezultă că centrul de masă a Sistemului Solar îşi va păstra starea mecanică (de repaos sau mişcare rectilinie şi uniformă)
- Observaţiile demonstrează că el într-adevăr se deplasează cu viteza constantă de **20 km/s** în spaţiu în direcţia stelei Vega.

Deci, mişcarea corpurilor Sistemului Solar reprezintă o mişcare compusă:

- ✓ **de transport a centrului maselor,**
- ✓ **relativă în raport cu sistemul de referinţă mobil (legat cu centrul maselor)**
- ✓ **absolută în raport cu stelele îndepărtate (cu care vom lega sistemul fix)**

Astfel, **traiectoriile** corpurilor din Sistemul Solar vor fi diferite pentru diferiţi observatori: **elipse** (în sistemul de referinţă mobil), **liniare** (mişcarea de transport în direcţia stelei Vega) şi **spirale eliptice** în raport cu stelele îndepărtate.

Exemplul 4.



Un pescar vine cu o barcă din larg și se oprește lîngă mal. După oprire, pescarul se deplasează în barcă spre mal. Cu cît se va depărta barca de la mal? Se cunoaște că masa bărcii este de 150 kg, iar lungimea ei de 2.5 m. Masa pescarului este 70 kg.

Se dă:

m_1 = 70 kg

m_2 = 180 kg

l = 2.5 m

L - ?

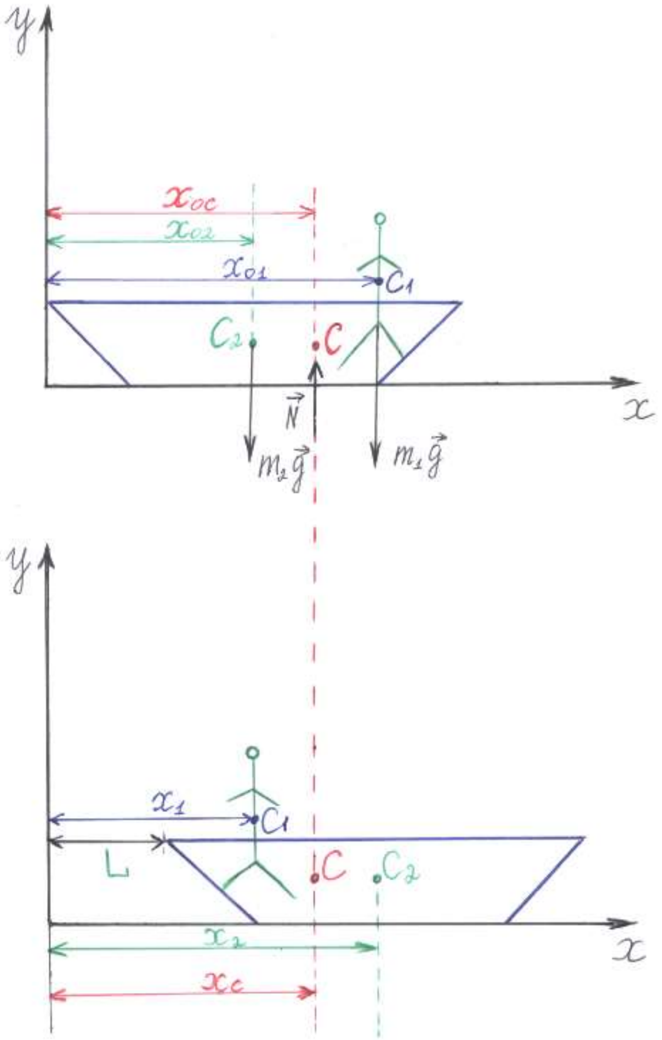
Rezolvare:

- Dacă, după oprire, pescarul se va deplasa în barcă spre mal, atunci barca se va îndepărta de mal.
- Aceasta se explică prin faptul că centrul de masă C al sistemului barcă – pescar se afla inițial în repaus (în momentul cînd barca s-a oprit lîngă mal).

Din cauza că forțele exterioare $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$ și reacțiunea apei $\vec{N}$ sînt verticale rezultă că proiecția vectorului principal al forțelor, aplicate sistemului barcă - pescar, este egală cu zero ($F_x^e = 0$). Astfel are loc consecința (26) ($v_{Cx} = const.$), adică

$$v_{Cx} = \frac{d}{dt} x_C = 0,$$

Exemplul 4.



de unde rezultă

$$x_C = x_{0C},$$

adică poziția centrului de masă în raport cu malul rămîne fixă.

- Să calculăm cu cît s-a deplasat barca de la mal. Din poziția inițială a sistemului (prima parte a figurii) găsim

$$x_{0C} = \frac{x_{01}\cdot m_1 + x_{02}\cdot m_2}{m_1 + m_2},$$

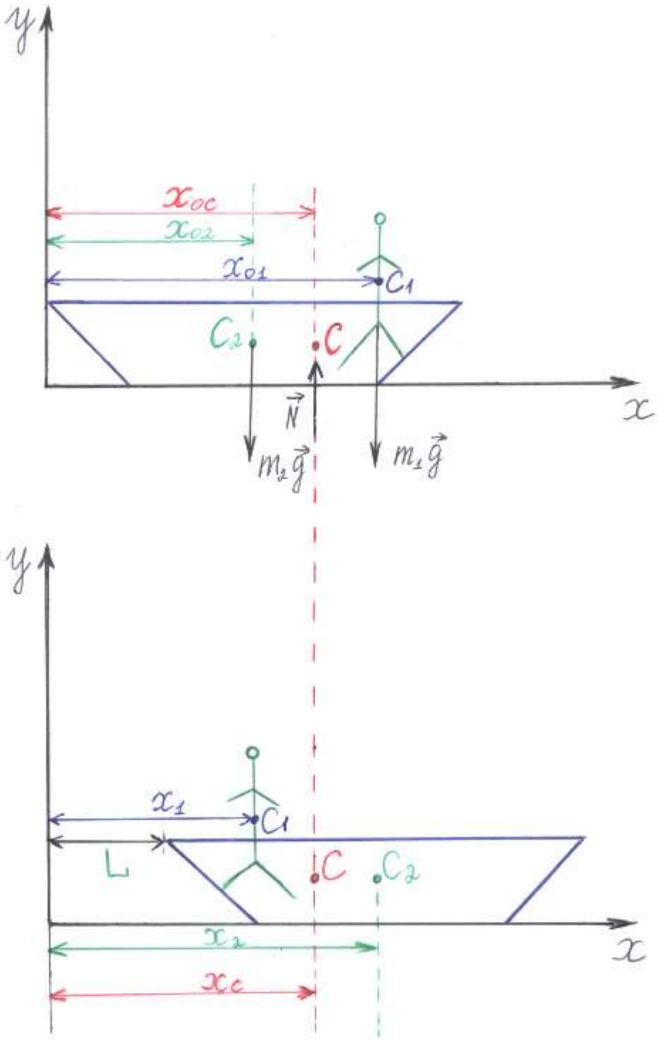
- Din poziția cînd pescarul s-a deplasat cu *S* (*S*=*l*) în raport cu barca, iar barca s-a deplasat cu *L* față de mal (poziția a doua a figurii) găsim

$$x_C = \frac{x_1\cdot m_1 + x_2\cdot m_2}{m_1 + m_2} = \frac{[(L + x_{01} - S)\cdot m_1 + (x_{02} + L)\cdot m_2]}{m_1 + m_2}.$$

Ținînd cont de relația

$$x_C = x_{0C},$$

Obținem:



$$x_{01} \cdot m_1 + x_{02} \cdot m_2 = (L + x_{01} - S) \cdot m_1 + (x_{02} + L) \cdot m_2],$$

de unde găsim

$$L = \frac{m_1 S}{m_1 + m_2}, \qquad L = \frac{70 \cdot 2.5}{70+180} = 0.7 \text{ (m)}.$$

Răspuns: $L = 0.7$ m.

ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE MIȘCĂRII

- Din cinematica mișcării de translație a unui corp rigid se cunoaște, că în această mișcare rigidul are *trei grade de libertate*.
- Din punct de vedere cinematic mișcarea lui se consideră complet definită, dacă este definită mișcarea unui punct arbitrar al corpului, adică

$$x_O = x_O(t), \quad y_O = y_O(t), \quad z_O = z_O(t), \qquad (27)$$

unde O este punct arbitrar al corpului, numit pol, iar relațiile (27) se numesc ***ecuațiile mișcării de translație a corpului rigid.***

- În dinamica mișcării de translație a unui rigid în calitate de pol se va lua centrul de masa *C*.
- A descrie dinamic mișcarea de translație a unui corp rigid înseamnă a găsi relațiile matematice dintre caracteristicile inerțiale, cracteristicile cinematice și caracteristicile dinamice ale rigidului.

ECUAŢIILE DIFERENŢIALE ALE MIŞCĂRII

- Asemenea caracteristici pentru un corp rigid în mişcarea de translaţie sînt respectiv
- ✓ masa rigidului m
- ✓ ecuaţiile mişcării $x_C = x_C(t)$, $y_C = y_C(t)$, $z_C = z_C(t)$,
- ✓ şi forţele aplicate punctelor rigidului $\vec{F}_k$ sau a proiecţiilor lor pe axele fixe de coordonate.

Ţinînd cont că corpul rigid este un caz particular al sistemului de puncte materiale, devine evident, că asemenea relaţii de legătură dintre aceste caracteristici le putem obţine, aplicînd teorema despre mişcarea centrului de masă al corpului rigid, adică

$$m\vec{a}_C = \vec{F}^e \qquad (28)$$

unde $\vec{F}^e = \sum \vec{F}_k^e$ este vectorul principal al tuturor forţelor exterioare.

Proiectînd relaţia (28) pe axele de coordonate, x, y, z, obţinem

$$m\frac{d^2x_C}{dt^2} = \sum F_{kx}^e, \quad m\frac{d^2y_C}{dt^2} = \sum F_{ky}^e, \quad m\frac{d^2z_C}{dt^2} = \sum F_{kz}^e. \qquad (29)$$

Ecuaţiile (29) se numesc ***ecuaţiile diferenţiale ale mişcării de translaţie a unui corp rigid în proiecţii pe axele carteziene de coordonate.***

Aceste ecuaţii se aplică la rezolvarea celor două probleme ale dinamici corpului rigid în mişcarea de translaţie.

Bibliografie

1. Butenin N. V. I. L. Lunţ, D. R. Merkin Curs de mecanică teoretică. Vol. 1, 2. Chişinău 1993.
2. Caraganciu V. M. Colpajiu, M. Ţopa Mecanica teoretică. Chişinău 1994
3. I. V. Meşcerskii. Culegere de probleme la MT, Chişinău, 1991.
4. Caraganciu V. MT, Compendiu şi probleme, 2008
5. С. М. Тарг Краткий курс теоретической механики. Наука, Москва, 1967
6. V. Szolga. Mecanica teoretică. Vol. 1. Statica, Divers-press, Bucureşti, 1994