Mecanica

LEGILE DINAMICII
DOUĂ PROBLEME DE BAZĂ ALE DINAMICII.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Introducere

Introducere. Legile dinamicii.

- **În dinamică se studiază mișcarea corpurilor în dependență de forțele ce acționează asupra lor.**
- **Dinamica se bazează pe legile lui Newton.**

Prima lege, legea inerției.

Există un sistem de referință în care un punct material se află în stare de repaus sau mișcare rectilinie uniformă, dacă asupra lui nu acționează forțe sau forțele care acționează se echilibrează reciproc.

Astfel de sistem de referință se numește inerțial.

A doua lege:

Într-un sistem inerțial de referință accelerația unui punct material este proporțională cu forța ce acționează asupra lui.

$$\vec{a} = \vec{F}/m$$

A treia lege.

Două puncte materiale interacționează cu forțe egale, orientate pe aceeași dreptă în sensuri opuse.

A patra lege:

Accelerația unui punct material asupra căruia acționează simultan mai multe forțe este egală cu suma geometrică a accelerațiilor pe care le-ar fi avut punctul sub acțiunea fiecărei forțe în parte.

Introducere. Tipuri de forțe

Forța – mărimea fizică vectorială ce caracterizează intensitatea interacțiunii dintre corpuri.
Forța, care acționând asupra corpului în repaos, poate induce mişcarea acestuia se numește forță activă

Tipuri de forțe:

- **constante**
- **variabile:**
  - **funcție de timp (*t*)**
  - **funcțe de poziție (*x*, *y*, *z*)**
  - **funcție de viteză (v_x, v_y, v_z)**
  - **funcție de timp, poziție și viteză.** $\vec{F} = \vec{F}(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z)$

Proprietatea corpurilor de a-și păstra starea de repaos sau mișcare se numește inertitate

Mărimea fizică ce caracterizează inertitatea corpului se numește masă.

Masa unui corp se determină prin comparare cu masa altui corp de referință, numit etalon de masă, care definește kilogramul în SI

Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării

Vom studia mişcarea unui punct material în raport cu un sistem inerțial de referință.

Fie asupra unui punct material acționează o forță care depinde de poziția $\vec{r}$, de viteza $\vec{v}$ punctului și de timpul *t*,

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t).$$

Din legea a doua a dinamicii rezultă *ecuația fundamentală a dinamicii punctului*:

$$m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}.$$ (Reprezentarea vectorială a mişcării)

Această ecuație vectorială, fiind proiectată pe axele de coordonate carteziene, este echivalentă cu trei ecuații scalare:

$$m\ddot{x}=F_x\,,\quad m\ddot{y}=F_y\,,\quad m\ddot{z}=F_z\,,$$

sau , dacă proiectăm pe axele triedrului natural, obținem ecuațiile

$$m\,\ddot{s}=F_\tau\,,\quad m\frac{v^2}{\rho}=F_n\,,\quad 0=F_b.$$

Problemele de bază ale dinamicii

În dinamică se rezolvă două probleme de bază.

În **prima problemă** a dinamicii este definită mişcarea şi se cere să se determine forța, sub acțiunea căreia are loc această mişcare.

Această problemă se rezolvă în felul următor:
se determină proiecțiile forței, apoi determinăm modulul forței şi direcția ei.
Proiecția forței pe axa *x*, de exemplu, se obține, derivînd funcția *x(t)* de două ori în raport cu timpul şi apoi înmulțind derivata a doua cu masa punctului.

A doua problemă a dinamicii constă în determinarea legilor mişcării punctului material, ştiind forțele ce acționează asupra punctului.

- Prima problemă se rezolvă prin derivarea ecuațiilor de mişcare a punctului după timp. Astfel, se obțin proiecțiile forței active pe axele sistemului de coordonate.

- A doua problemă a dinamicii se rezolvă, integrînd ecuațiile diferențiale ale mişcării.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Partea I.
Dinamica punctului material
în sisteme de referință inerțiale

Problema I a dinamicii. Exemplu

Exemplul 1. Oscilațiile libere ale pendulului fizic

Un punct material de masă m se mișcă în planul xy conform legilor x=a cos kt, y=b

Se cere forța sub acțiunea căreia are loc această mișcare.

Rezolvare

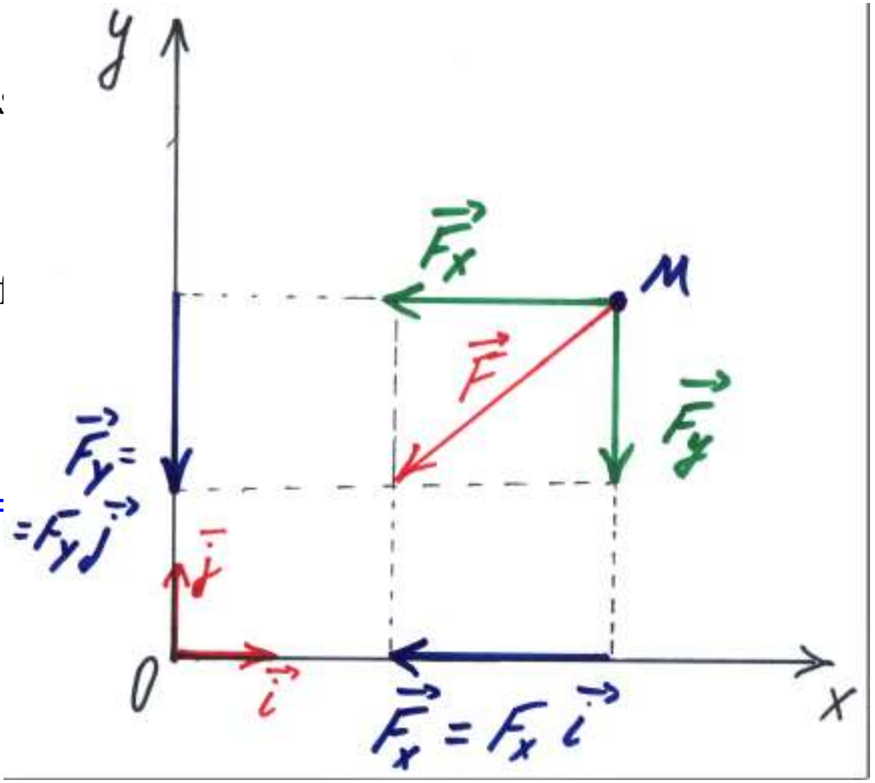
- Ecuațiile de mișcare sunt definite în sistemul de coordonate carteziene. Ecuațiile di Newton) în acest caz vor fi:

$$\boxed{m\ddot{x}=F_x\,,\quad m\ddot{y}=F_y\,,\quad m\ddot{z}=F_z}$$

- Calculăm explicit derivatele ecuațiilor de mișcare: $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$, apoi $\ddot{y}=\frac{d^2y}{dt^2}$: $\ddot{x}=$
- Rezultă proiecțiile forței pe axele *x* și *y* :

$$F_x = -m\,k^2x \quad \text{și} \quad F_y = -m\,k^2y\,.$$

- Forța $\vec{F} = F_x\cdot\vec{i} + F_y\cdot\vec{j} = -\,mk^2(x\vec{i}+y\vec{j}) = -\,mk^2\vec{r}.$

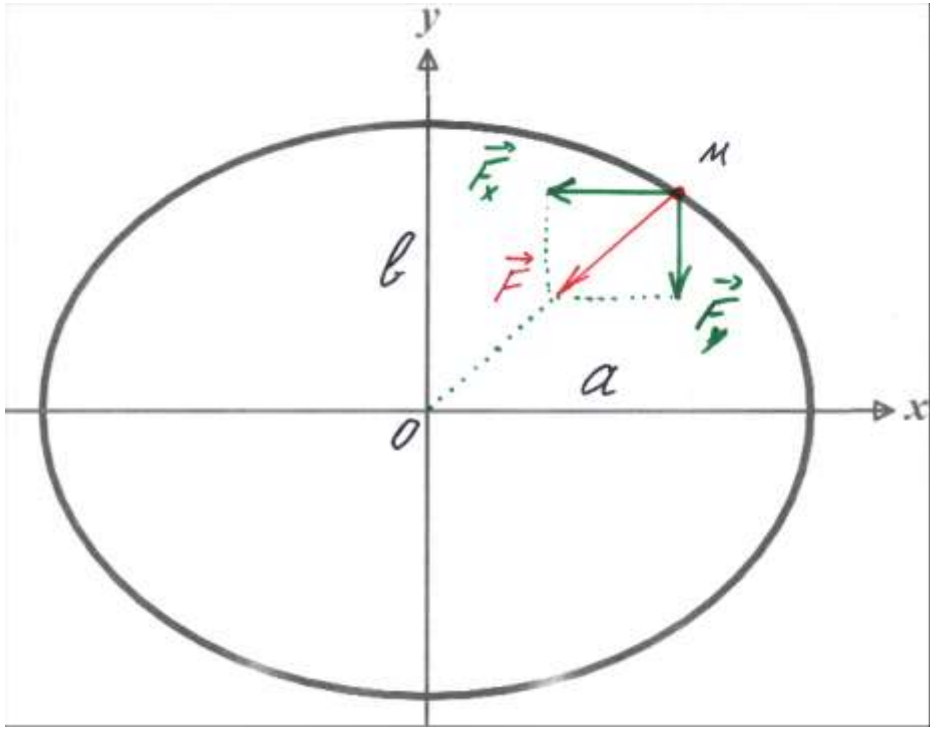


Deci, punctul material se mișcă conform legilor date sub acțiunea unei forțe proporționale cu distanța de la punct pînă la originea de coordonate *O* și orientate spre centrul *O*.

- **Forța a cărei reper trece tot timpul prin unul și același punct se numește forță centrală.**

Problema I a dinamicii. Exemplu

$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} = -mk^2(x\vec{i} + y\vec{j}) = -mk^2\vec{r}.$

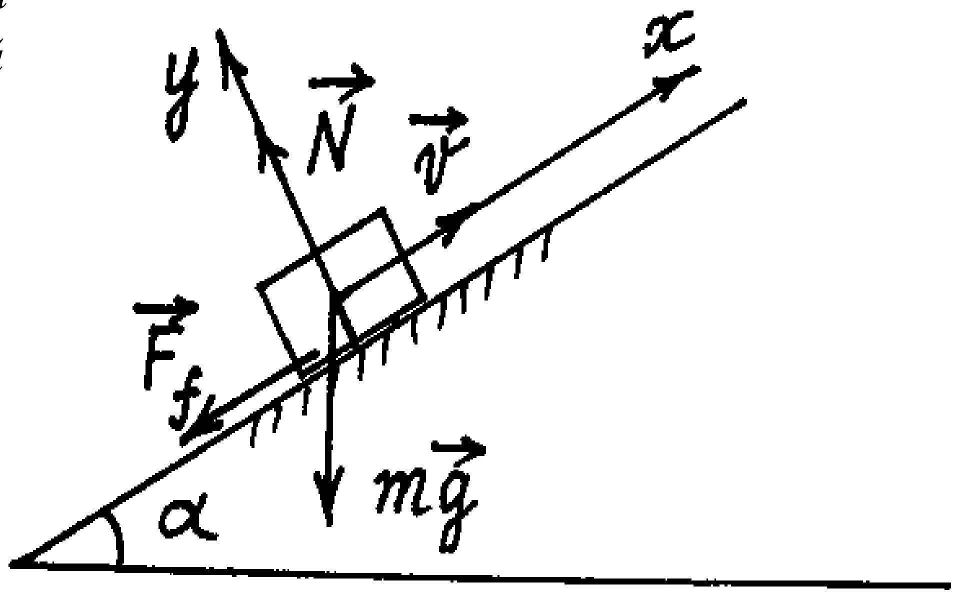


După ce am rezolvat această problemă putem face următoarea concluzie:

un punct material descrie elipsă, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *sub acțiunea unei forțe centrale de atracție care are modulul proporțional cu distanța de la punctul material pînă la centrul elipsei.*

Problema II a dinamicii. Exemplu. $\vec{F} = const$.

Exemplul 2. *Un corp greu se ridică pe un plan cu asperități, care formează cu orizontala un unghi α =30°. În momentul inițial corpul avea viteza egală cu v_0=15 m/s. Coeficientul de frecare dintre corp și planul înclinat f=0,1.* ***Ce distanță va parcurge corpul pînă la oprire și în cît timp va parcurge el această distanță?***



Rezolvare.

1. Orientăm axa *x* pe direcția vitezei inițiale
2. Asupra corpului acționează forța lui de greutate *m**g***, reacțiunea normală ***N*** a planului înclinat și forța de frecare $\boldsymbol{F_f}$ dintre corp și planul înclinat.

3. Legea fundamentală a dinamicii

$$m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{g}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{F_f}.$$

Proiectăm ecuația vectorială pe axele *x* și *y* și obținem

$$m\ddot{x} = -\ mg\sin 30° - F_f,$$

$$m\ddot{y} = -\ mg\cos 30° + N,$$

Problema II a dinamicii.
Exemplu. $\vec{F} = const$.

$m\ddot{x}$= - $mgsin30°$ - F_f,

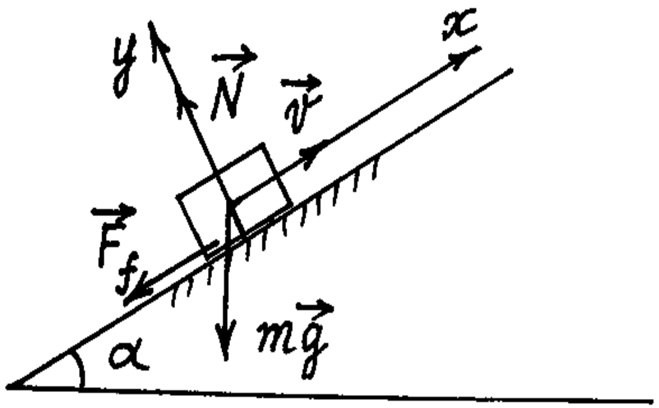
$m\ddot{y}$ = - $mgcos30°$ +N,

unde F_f=fN. Deoarece $\ddot{y}$ = 0, (corpul nu se mişcă pe direcţia y) rezultă

N= $mgcos30°$ şi F_f=$f\,mgcos30°$.

Revenim la prima ecuaţie şi obţinem că corpul efectuează mişcare rectilinie descrisă de o ecuaţie diferenţială

$$m\ddot{x} = -\, mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha,$$



sau după simplificare $\ddot{x} = -\, g\,(\sin\alpha + f\cos\alpha)$.

Înlocuind datele problemei obţinem $\ddot{x}$ = - a = - 5,75 m/s^2. (*accel. const*)

Pentru determinarea vitezei, utilizăm definiţia: $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = a$,

Rezultă $dv = adt$, $\int dv = a\int dt$, $v = at + C_1$.

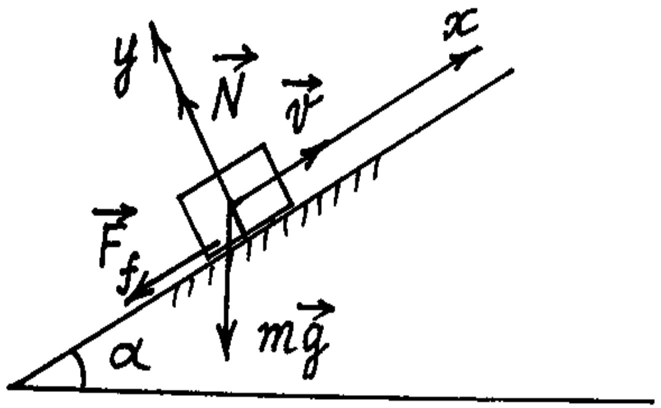
Substituim în această ecuaţie condiţiile iniţiale $t=0$, $v_0=15$ m/s, avem

$$15=0+C_1, \quad C_1=15.$$

Viteza corpului este funcţie de timp $v= -5{,}75t+15$.

Problema II a dinamicii.
Exemplu. $\vec{F} = const$.

Viteza corpului este   funcție de timp   ***v= – 5,75t+15.***



Acum determinăm cât timp corpul va fi în mișcare până la oprire.

Cînd v_1= **0**   ***t_1=15/5.75=2.61*** **s.**

Integrăm ecuația *dx=vdt* și vom afla legea mișcării corpului.

$$\int dx = \int (at + C_1)dt, \quad x = at^2/2 + C_1 t + C_2.$$

Determinăm constanta C_2, folosind condiția inițială *t=0*, x_0*=0*, reiese $C_2 = 0$.

Am obținut legea mișcării corpului

x(t)= - 5,75t²/2+15t.

Drumul parcurs până la oprire este egal cu

s = *x*(t_1) =- *5,75*· 2,61^2/*2+15*·*2,61=19,57* m

Răspuns:
Corpul a parcurs până la oprire distanța de *19,57* m în timp de *2,61* s.

Problema II a dinamicii. Exemplu. $\vec{F} = \vec{F}(t)$.

Fie **forța funcție de timp *F=f(t)*.**

Exemplul 3. *Un corp cu masa de 1 kg se mișcă sub acțiunea unei forțe variabile F=8(1- t/2) N, unde timpul t este exprimat în secunde. Peste cîte secunde corpul se va opri, dacă în momentul inițial el avea viteza* v_0*=20 m/s și sensul forței coincide cu sensul vitezei corpului? Ce distanță va parcurge corpul până la oprire?*

Rezolvare.

Ecuația diferențială a mișcării este

$$m\frac{dv}{dt}=F, \quad \text{sau} \qquad dv=8(1-t/2)dt,$$

integrăm, $v=8t-2t^2+C_1$.

Când $t=0$, $v_0=20$ m/s determinăm constanta C_1.

$$20=C_1,$$

viteza corpului este funcție de timp $v=8t-2t^2+20$.

Când corpul se va opri $v_1=0$, $2t^2-8t-20=0$. Soluția acestei ecuații este

$$t_1=2+\sqrt{14} \cong 5{,}74 \text{ s}.$$

Calculăm drumul parcurs până la oprire. Legea mișcării corpului se determină prin integrarea ecuației pentru viteză:

$$dx=(8t-2t^2+20)dt, \qquad x=4t^2-2t^3/3+20t+C_2.$$

Din condițiile inițiale $t=0$, $x_0=0$, rezultă $C_2=0$. Legea mișcării corpului este

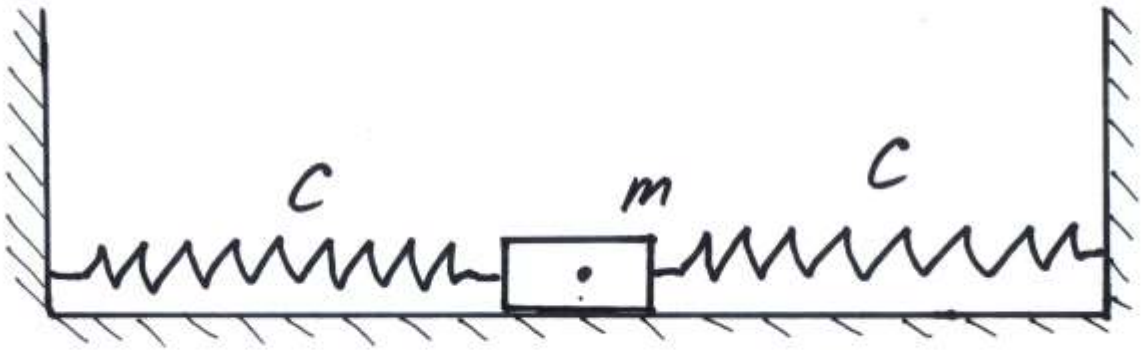
$$x=4t^2-2t^3/3+20t,$$

care pentru momentul t_1 dă valoarea drumului parcurs $s=x(t_1)=120{,}5$ m.

Problema II a dinamicii. Exemplu. $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$.

Fie **forța funcție de coordonata** corpului, deci de poziția lui.

Exemplul 4. Un corp cu masa de 10 kg situat pe un plan orizontal absolut neted este strîns între două arcuri care au aceeași rigiditate c=19,6 N/cm. La un moment corpul a fost deplasat cu 4 cm de la poziția de echilibru în dreapta și i s-a dat drumul fără viteză inițială. Să se afle ecuația mișcării și viteza maximă a corpului



Rezolvare.

1. Luăm originea de coordonate în poziția de echilibru a corpului și orientăm axa *Ox* orizontal spre dreapta, paralel cu arcul din dreapta.
2. Forțele active, care pun în mișcare corpul, sunt forțele de elasticitate, ambele sunt orientate în același sens.
3. Ecuația diferențială a mișcării este

$$m\ddot{x} = -2cx; \quad \text{sau} \quad \ddot{x} + (2c/m)x = 0.$$

Notăm cu $k = \sqrt{2c/m} = 19{,}8\ \mathrm{s}^{-1}$. Soluția generală a acestei ecuații conține două constante de integrare A și α.

$$x = A\sin(kt + \alpha)$$

4. Calculăm derivata $\dot{x} = Ak\cos(kt + \alpha)$.

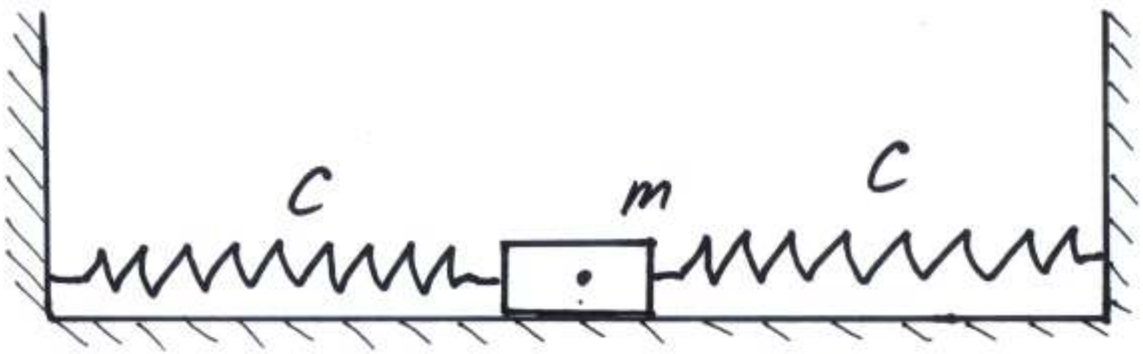
Separăm din soluția generală soluția care satisface condițiile inițiale $t=0$ $x_0=4$, $\dot{x}_0=0$.

$$4 = A\sin\alpha \qquad 0 = Ak\cos\alpha,$$

obținem $\alpha = \pi/2$ rad, iar $A=4$.

Problema II a dinamicii.
Exemplu. $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$.

$x = A\sin(kt + \alpha)$, $\alpha = \pi/2$ rad, $A = 4$, $k = \sqrt{2c/m} = 19{,}8$



Legea mișcării corpului

$x(t) = 4\sin(19{,}8t + \pi/2)$ cm,

sau **$x(t) = 4\cos 19{,}8t$ cm.**

Viteza corpului $v = \dot{x} = -\,4\cdot 19{,}8\sin 19{,}8t$

va fi maximă cînd $\sin 19{,}8t$ va fi egal cu -1.

$v_{max} = 4\cdot 19{,}8 = 79{,}2$ cm/s.

Mișcarea punctului într-un mediu rezistent. Exemplu

Exemplul 5. Acum vom cerceta mișcarea unui corp aruncat sub un unghi α față de orizontală. Asupra corpului acționează două forțe: forța de greutate $m\vec{g}$ și ***forța*** *de rezistență a aerului, pe care o considerăm* ***funcție liniară de viteza*** *corpului $\vec{R}$= - $km\vec{v}$.*

1. Ecuația fundamentală a dinamicii corpului:

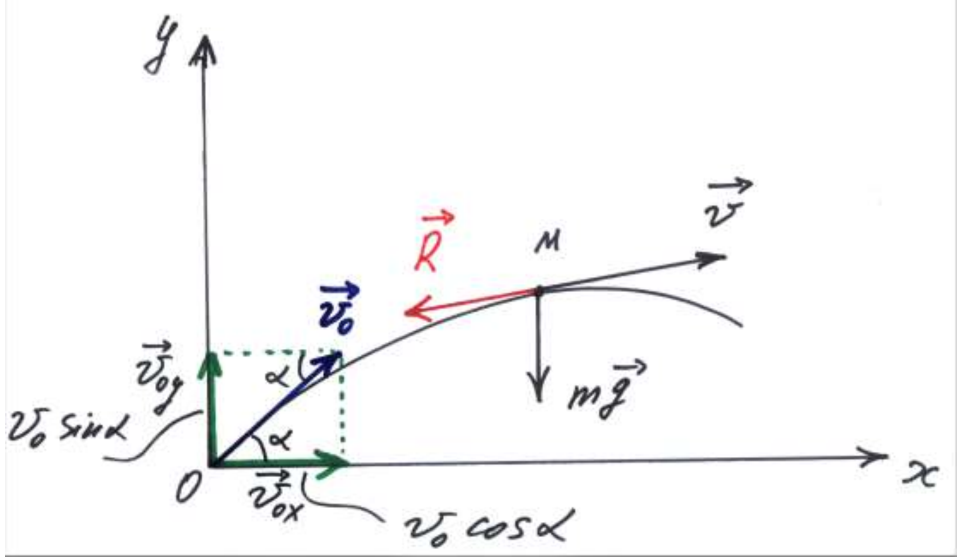
$$m\vec{a} = m\vec{g} - km\vec{v}.$$

Ecuațiile diferențiale ale mișcării în proiecții pe axele x și y vor fi:

$$m\ddot{x} = -km\dot{x}, \quad m\ddot{y} = -mg - km\dot{y}.$$

unde, din definiție cunoaștem că $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$.

Asftel, în proiecție pe x: $d\dot{x}/\dot{x} = -kdt$.



2. Integrăm și obținem $ln\dot{x}$ = - $kt + C_1$.

Constanta C_1 se determină din condițiile inițiale, știind că în momentul $t = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$. $\ln v_{0x} = -k * 0 + C_1. \Rightarrow C_1 = \ln(v_0 \cos\alpha)$.

3. Revenim la ecuația din (2) și după înlocuirea constantei C_1 obținem:

$$ln\dot{x} = -kt + ln(v_0 \cos\alpha).$$

Mișcarea punctului într-un mediu rezistent. Exemplu

$ln\dot{x}$=- kt+ $ln(v_0 \cos\alpha)$.

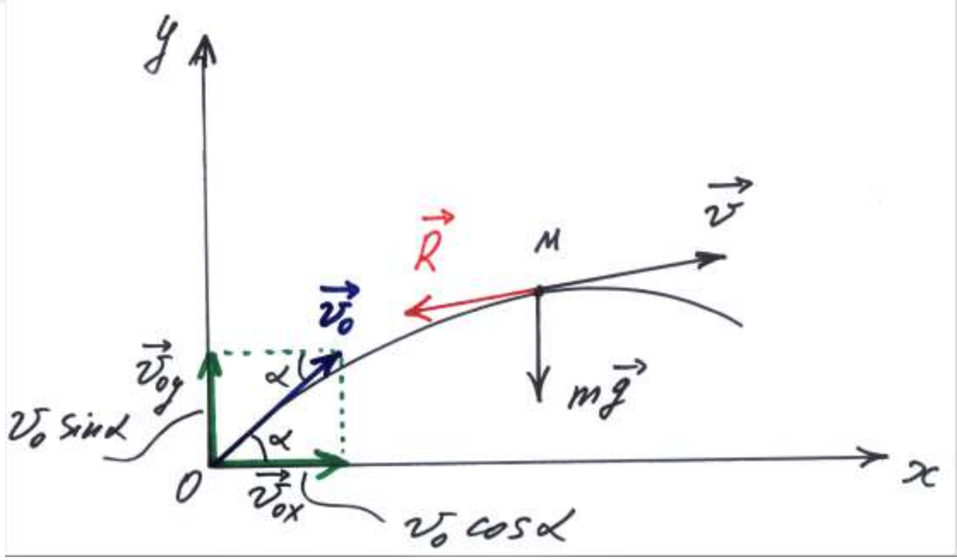
După potențiere avem $\dot{x}=v_0 \cos\alpha\, e^{-kt}$ sau $dx = v_0 \cos\alpha\, e^{-kt} dt$

Integrăm încă o dată și obținem

$$x = -\frac{v_0 \cos\alpha}{k} e^{-kt} + C_2\ .$$

Înlocuim în această formulă condițiile inițiale $t=0,\ x_0 = 0$ și determinăm constanta C_2.

$$0 = -\frac{v_0 \cos\alpha}{k} + C_2. \qquad C_2 = \frac{v_0 \cos\alpha}{k}.$$



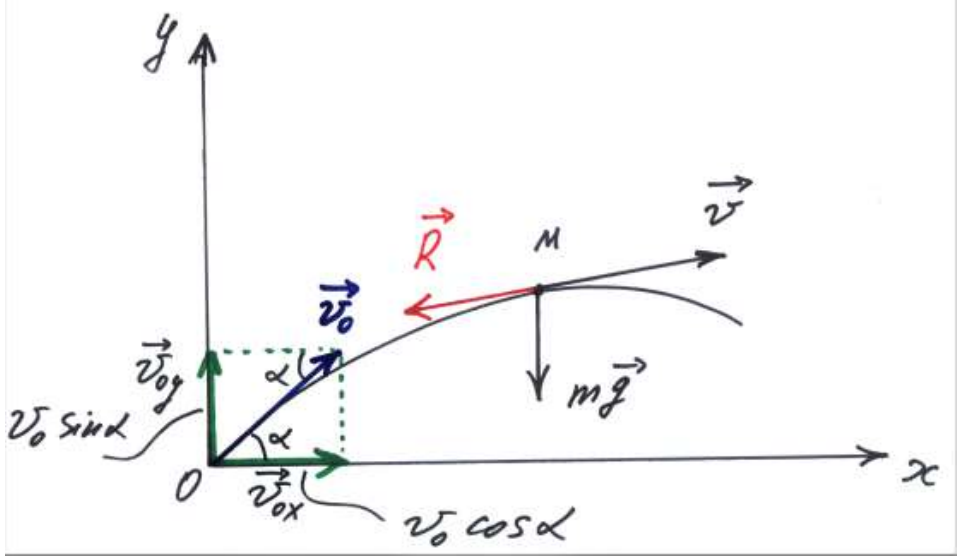
Legea mișcării corpului în direcție orizontală este

$$\boldsymbol{x(t)= \frac{v_0 \cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt}).}$$

Mișcarea punctului într-un mediu rezistent. Exemplu

Vom cerceta mișcarea punctului material pe verticală

$m\ddot{y} = - mg - km\dot{y}.$



1. Integrăm a doua ecuație diferențială pe care o scriem în forma

$$\ddot{y} + k\dot{y} = - g.$$

2. Soluția generală a ecuației diferențiale neomogene de ordinul doi este egală cu **soluția generală** a ecuației omogene y_1 **plus soluția particulară** a ecuației neomogene y_2:

$$y = y_1 + y_2$$

3. Vom căuta soluția particulară în forma $y_2 = At$, unde A este o constantă.
Calculăm derivata $\dot{y}_2 = A$. Substituim în ecuația diferențială și aflăm

$$A = - \frac{g}{k}.$$

4. **Soluția generală** a ecuației omogene standard, egală cu $y_1 = C_3 e^{\lambda_1 t} + C_4 e^{\lambda_2 t}$,
unde $\lambda_{1,2}$ sunt soluțiile ecuației caracteristice $\lambda^2 + k\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = - k$.

Astfel, soluția totală va avea forma: $y = y_1 + y_2 = C_3 + C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k} t$,

5. Pentru determinarea constantelor C_3, C_4 vom calcula derivata:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = - k\, C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}.$$

Mişcarea punctului într-un mediu rezistent. Exemplu

$\boxed{y = C_3 + C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k} t}$ $\boxed{\dot{y} = -k C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}}$

Substituind în y și $\dot{y}$ condițiile inițiale $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha$, obținem

$$0 = C_3 + C_4, \quad v_0 \sin\alpha = -kC_4 - \frac{g}{k},$$

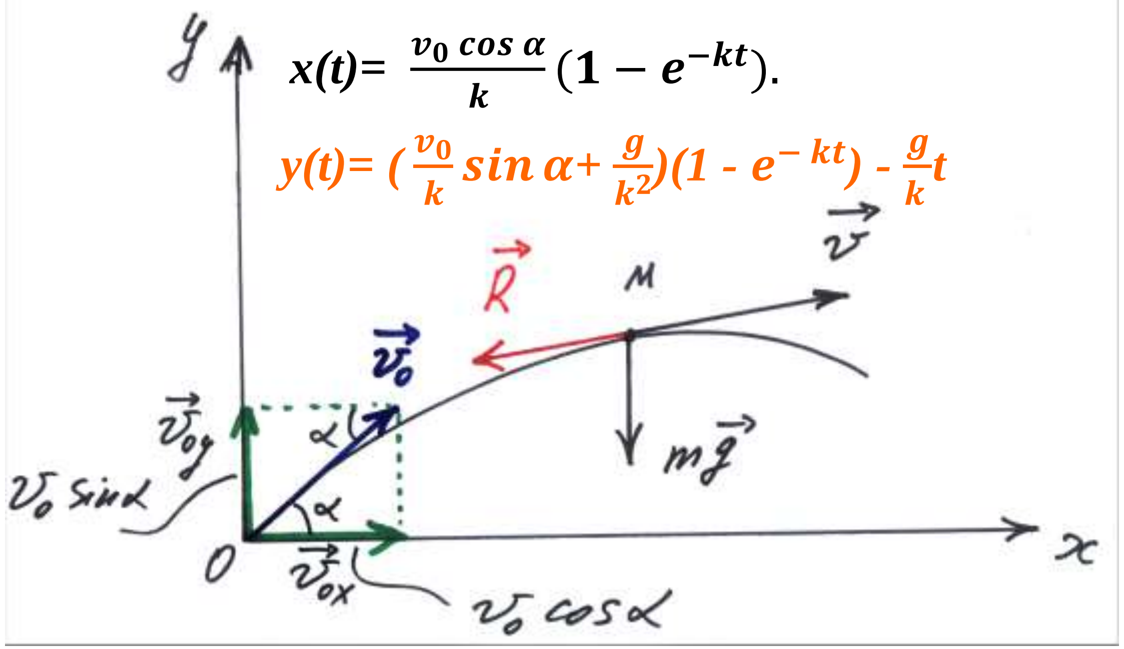
de aici $$C_3 = -C_4 = \frac{v_0}{k} \sin\alpha + \frac{g}{k^2}.$$

Legea mișcării corpului în direcție verticală este

$$y(t) = \left(\frac{v_0}{k} \sin\alpha + \frac{g}{k^2}\right)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t.$$

$$x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt}).$$

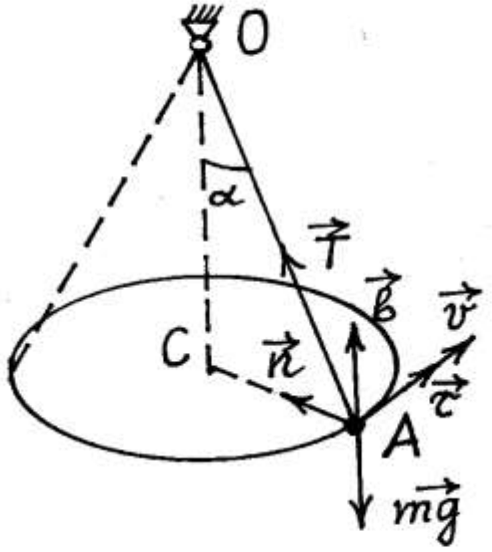
$$y(t) = \left(\frac{v_0}{k} \sin\alpha + \frac{g}{k^2}\right)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t$$



Mișcarea unui corp descrisă în coordonate naturale. Exemplu

Exemplul 6.

O bilă A de masă m este suspendată de un fir imponderabil inextensibil de lungime l un capăt al căruia este fixat în punctul O, reprezintă un pendul conic, adică bila descrie o circumferință în planul orizontal. Firul formează cu verticala unghiul α. Bila se consideră punct material. Să se determine viteza bilei și tensiunea din fir.



Rezolvare.

1. Asupra bilei acționeză forța activă forța de greutate.

Eliberăm bila de legătură, înlăturând firul și înlocuind acțiunea lui cu reacțiunea firului ***T***.

Ecuația fundamentală a dinamicii se scrie astfel

$$m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{g}+\boldsymbol{T}.$$

2. Proiectăm ecuația vectorială pe axele sistemului de coordonate naturale

$$ma_\tau = 0, \quad ma_n = T\sin\alpha, \quad ma_b = T\cos\alpha - mg.$$

3. Deoarece $a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$, rezultă că $v=const.$

4. Accelerația normală $a_n = \frac{v^2}{r}$, unde $r=l\sin\alpha$ este raza circumferinței descrise de punctul *A*.

5. Accelerația binormală este întotdeauna egală cu zero de aceea tensiunea din fir

$$T=\frac{mg}{\cos\alpha}.$$

Determinăm viteza bilei din formula

$$m\frac{v^2}{r} = T\sin\alpha, \qquad v^2 = \frac{Tr\sin\alpha}{m} = \frac{mgl(\sin\alpha)^2}{m\cos\alpha} = \frac{gl(\sin\alpha)^2}{\cos\alpha}. \qquad \boxed{v=\sqrt{\frac{gl}{\cos\alpha}}\cdot\sin\alpha.}$$

Mişcarea unui corp descrisă în coordonate naturale. Exemplu

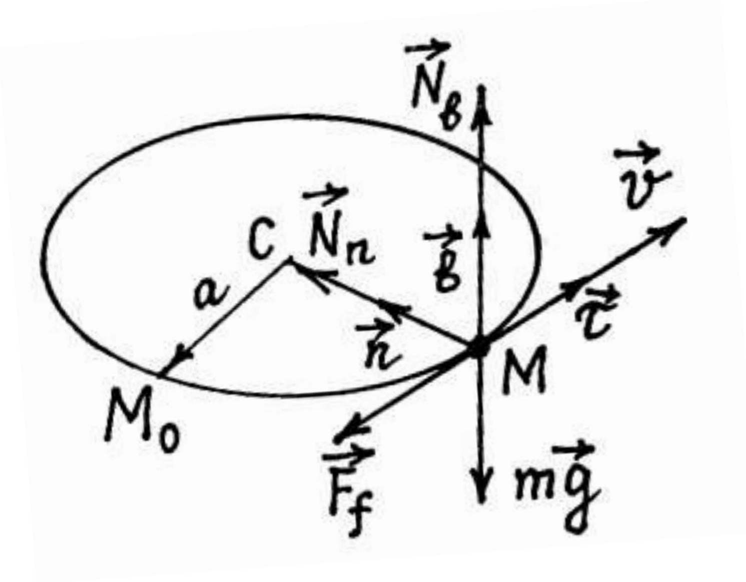
Exemplul 7.

Un inel mic M, îmbrăcat pe o circumferință de sârmă de rază a și situată în plan orizontal, are viteza inițială egală cu v_0. Coeficientul de frecare dintre inel și sârmă este egal cu f. Să se determine drumul parcurs de inel până la oprire.

Rezolvare.

Vom considera inelul punct material și vom alcătui ecuațiile diferențiale ale mișcării în proiecții pe axele triedrului natural:

$$m\frac{dv}{dt} = -F_f, \quad m\frac{v^2}{a} = N_n, \quad 0 = N_b - mg.$$



Deoarece forța de frecare $F_f = fN = f\sqrt{{N_b}^2 + {N_n}^2}$ și $N_b = mg$, $N_n = m\frac{v^2}{a}$, avem

$$m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = -f\frac{m}{a}\sqrt{v^4 + (ag)^2}$$

Separăm variabilele

$$\frac{d(v^2)}{\sqrt{v^4+(ag)^2}} = -\frac{2f}{a}ds$$

și integrăm

$$\int_{v_0^2}^{0}\frac{dz}{\sqrt{z^2+b^2}} = -\frac{2f}{a}s.$$

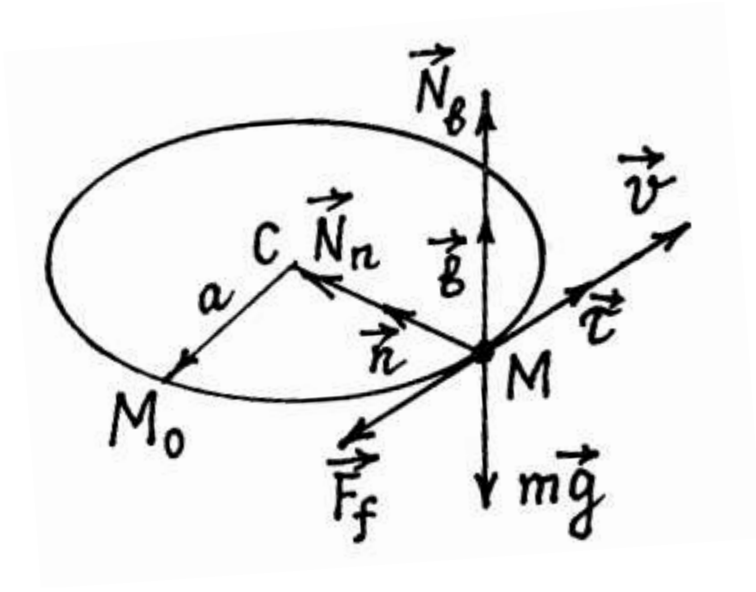
Aici am notat $v^2 = z$ și $ag = b$. Obținem:

$$\boxed{s=\frac{a}{2f}\ln\left(\frac{v_0^2}{ag}+\sqrt{{\frac{v_0}{a^2g^2}}^4+1}\right).}$$

Mișcarea unui corp descrisă în coordonate naturale. Exemplu

$$\boxed{s=\frac{a}{2f}\ln\left(\frac{v_0^2}{ag}+\sqrt{\frac{v_0}{a^2g^2}^4+1}\ \right).}$$

Dacă ***f* =0,1, *a* = 1 m,** $v_0 = 1m/s$ **și** ***g* =10 m/**s^2 **atunci** ***drumul parcurs de inel până la oprire s = 0,5 m.***



Mișcarea punctului supus la legături.

Mișcarea unui punct material supus unor restricții să se deplaseze pe o linie strict determinată sau pe o suprafață fixă se numește mișcarea punctului material supus la legături.

La studierea acestei mișcări se aplică principiul eliberării, care constă în următoarele:

acțiunea legăturilor asupra punctului material trebuie să fie înlocuită prin reacțiunile acestor legături și să se considere punctul material ca fiind liber, însă aflându-se sub acțiunea atât a forțelor active, cât și a reacțiunilor legăturilor.

Dacă notăm cu $\boldsymbol{F}$ rezultanta tuturor forțelor active aplicate unui punct material, iar cu $\boldsymbol{R}$ – rezultanta tuturor reacțiunilor, atunci ecuația fundamentală a dinamicii se scrie astfel

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}$$

Proiectând această ecuație pe axele sistemului de coordonate *Oxyz*, obținem

$$m\ddot{x} = F_x + R_x, \quad m\ddot{y} = F_y + R_y, \quad m\ddot{z} = F_z + R_z. \ (1)$$

Aceste ecuații ne permit să rezolvăm atât prima cât și a doua problemă de bază a dinamicii.

Prima problemă a dinamicii punctului supus la legături se reduce la determinarea reacțiunilor legăturilor, cunoscând legile mișcării punctului și forțele active ce acționează asupra lui.

În problema a doua de bază a dinamicii punctului supus la legături sunt date forțele active și se cere să se determine legea mișcării și reacțiunile.

Mişcarea punctului supus la legături.

Mişcarea unui punct material pe o suprafață netedă fixă.

Vom folosi ecuațiile (1) .

$$m\ddot{x}=F_x+R_x\,,\quad m\ddot{y}=F_y+R_y\,,\quad m\ddot{z}=F_z+R_z.\ (1)$$

- Aceste trei ecuații conțin șase necunoscute:
  - trei coordinate ale punctului *x,y,z* și trei proiecții necunoscute R_x, R_y, R_z ale reacțiunii.

- Dar coordonatele punctului de asemenea trebuie să satisfacă ecuația suprafeței pe care el se mișcă.

  Aceasta va fi a patra ecuație

$$f(x,y,z)=0 \qquad (2)$$

- Dispunem doar de patru ecuații pentru determinare a șase necunoscute.
- Pentru a obține încă două ecuații care lipsesc vom folosi faptul că **legătura este ideală.**

Fiindcă suprafața pe care se mișcă punctul este **ideal netedă**, reacțiunea are direcția normalei la suprafață.

Gradientul

$$grad\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\boldsymbol{k}$$

reprezintă un vector care la fel are direcția normalei la suprafață.

Mişcarea punctului supus la legături.

Mişcarea unui punct material pe o suprafață netedă fixă.

$$m\ddot{x}=F_x+R_x\,,\quad m\ddot{y}=F_y+R_y\,,\quad m\ddot{z}=F_z+R_z.\ (1)$$

$$grad\, f=\frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\boldsymbol{k}$$

Condiția de coliniaritate a reacțiunii $\boldsymbol{R}$ și a $grad\, f$ ne dă cele două ecuații care lipsesc:

$$f(x,y,z)=0\ (2)$$

$$\boldsymbol{R}=\lambda\cdot grad\, f \quad \text{și} \quad \frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{R_z}{\frac{\partial f}{\partial z}}=\lambda$$

Atunci, ecuațiile (1) pot fi scrise în forma:

$$m\ddot{x}=F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\,,\quad m\ddot{y}=F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\,,\quad m\ddot{z}=F_z+\lambda\,\frac{\partial f}{\partial z}. \qquad (3)$$

Adăugând la aceste ecuații ecuația de legătură (2), obținem un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute x,y,z și λ. După determinarea acestor necunoscute se pot găsi proiecțiile reacțiunii.

Ecuațiile (3) se numesc ecuațiile lui Lagrange de prima speță.

Mişcarea punctului supus la legături. Exemplu. Pendulul matematic

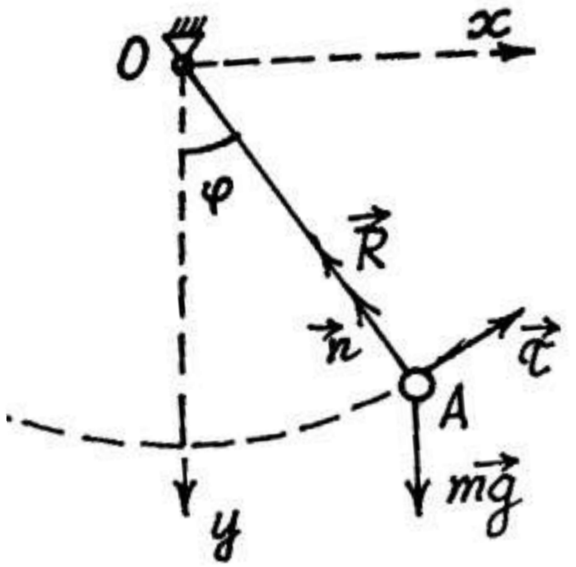
Exemplul 8.

Pendulul matematic este un punct material de masă m ce se mişcă sub acțiunea forței de greutate pe o circumferință netedă, situată într-un plan vertical.

Acesta poate fi realizat de exemplu, suspendând punctul material de un fir imponderabil și inextensibil de lungime l, cealaltă extremitate a căruia este fixă.

Inițial firul a fost abătut de la poziția verticală cu un unghi φ_0 și i s-a comunicat viteză unghiulară $\dot{\varphi}_0$.

Să se determine legea mişcării pendulului și tensiunea în fir.



Rezolvare.

1. Asupra punctului material acționează forța de greutate proprie ***mg*** și reacțiunea firului ***R***.

2. Poziția bilei în sistemul cartezian de coordonate *xy* se determină cu coordonatele *x și y*. Ecuațiile diferențiale a mişcării pendulului matematic sunt

$$m\ddot{x}=R_x,\ \ m\ddot{y}= mg + R_y. \qquad (1)$$

3. Coordonatele punctului material trebuie să satisfacă ecuația legăturii

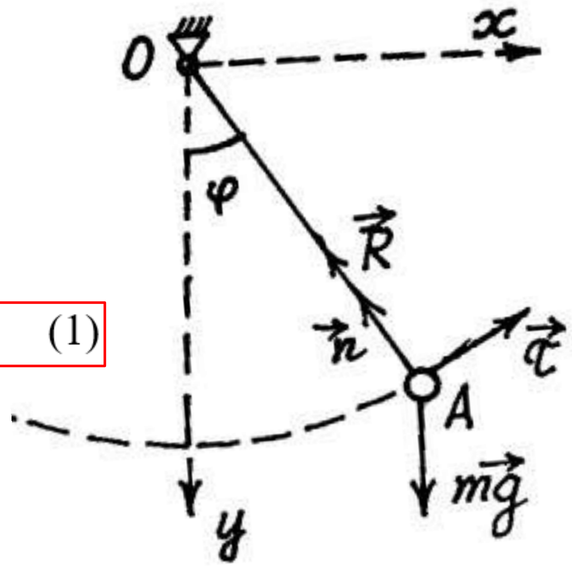
$$f(x,y)=l^2 - x^2 - y^2 = 0. \qquad (2)$$

! Legătura în cazul dat este circumferința cu ecuația $x^2 + y^2 = l^2$.

l – raza circumferinței

Mişcarea punctului supus la legături. Exemplu. Pendulul matematic

4. Vom descompune reacțiunea firului în două componente: $\boldsymbol{R} = R_x \boldsymbol{i} + R_y \boldsymbol{j}$, unde proiecțiile se exprimă prin $\boxed{\dfrac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \dfrac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \dfrac{R_z}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \lambda}$



unde $\frac{\partial f}{\partial x}$ = -2*x*, $\frac{\partial f}{\partial y}$ = - 2*y* se obțin prin derivarea după timp a ecuației legăturii (2).

Atunci $\boldsymbol{R} = R_x \boldsymbol{i} + R_y \boldsymbol{j} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \boldsymbol{i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \boldsymbol{j} = -2x\lambda \boldsymbol{i} - 2y\lambda \boldsymbol{j}$ $\boxed{m\ddot{x} = R_x, \ m\ddot{y} = mg + R_y. \quad (1)}$

5. Revenim la ecuația (1). Se obțin ecuațiile lui Lagrange de prima speță

$$m\ddot{x} = -2\lambda x, \quad m\ddot{y} = mg - 2\lambda y$$

la care se adaugă ecuația de legătură $l^2 - x^2 - y^2 = 0$.

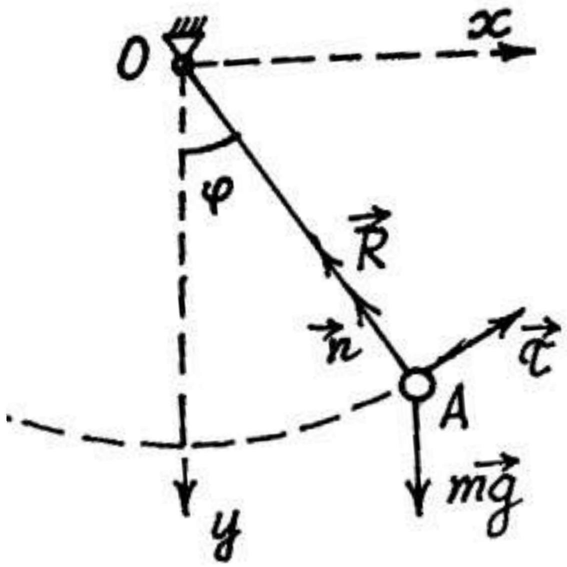
De aici exprimăm *y* prin *x* și avem $y = \sqrt{l^2 - x^2} = l\sqrt{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2}$. În rezultat, se obține sistemul:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2\lambda x \\ m\ddot{y} = mg - 2\lambda y \\ y = \sqrt{l^2 - x^2} = l\sqrt{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2} \end{cases}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Mişcarea punctului supus la legături. Exemplu. Pendulul matematic

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2\,\lambda x \\ m\ddot{y} = mg - 2\,\lambda y \\ y = \sqrt{l^2 - x^2} = l\sqrt{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2} \end{cases}$$



! Deoarece sistemul de ecuații este complicat de rezolvat precis, pentru a afla în prima aproximație integrăm sistemul, presupunând abaterile pendulului mici, astfel că vom neglija termenii de ordinul $\left(\frac{x}{l}\right)^2$ din ultima expresie:

$$y = l\sqrt{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2} = l\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^{1/2} \approx l\left(1 - \frac{x^2}{2l^2}\right) \approx l$$

Fiindcă $y = l = const$, $\ddot{y} = 0$ și din prima ecuație a sistemului obținem $\boxed{\lambda = \frac{mg}{2l}}$

Atunci, revenim la expresia pentru reacțiune:

$\boldsymbol{R} = R_x\boldsymbol{i} + R_y\boldsymbol{j} = -2x\lambda\boldsymbol{i} - 2y\lambda\boldsymbol{j}$, unde

$$R_x = -\frac{mg}{2l}\cdot 2x,\quad R_y = -\frac{mg}{2l}\cdot 2y, \qquad \boxed{R = \frac{mg}{l}\sqrt{x^2 + y^2} = mg.}$$

Mişcarea punctului supus la legături. Exemplu. Pendulul matematic

Ecuația diferențială care descrie mișcarea pendulului $\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$ are soluția

$\boldsymbol{x = A\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \beta)}$ care conține două constante de integrare A și β.

Diferențiem și obținem $\dot{x} = A\sqrt{\frac{g}{l}}\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \beta)$.

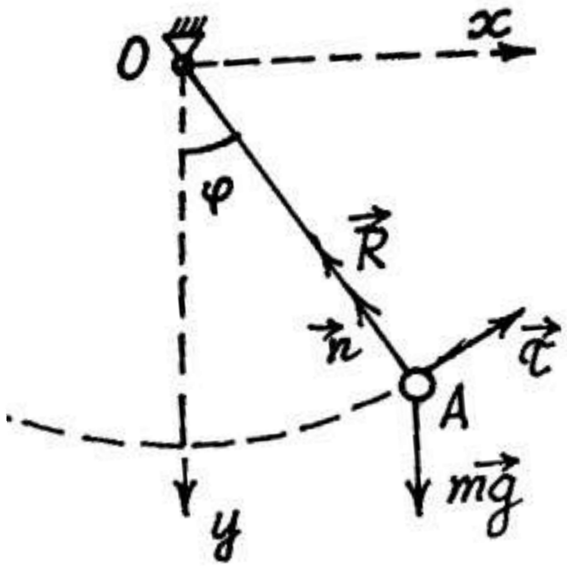
Folosim condițiile inițiale $t = 0$ $x_0 = l\sin\varphi_0$, $v_{0x} = l\dot{\varphi}_0\cos\varphi_0$ obținem ecuații pentru determinare constantelor A și β.

$$l\sin\varphi_0 = A\sin\beta,$$

$$l\dot{\varphi}_0\cos\varphi_0 = A\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\beta. \quad \boxed{A = l\sqrt{(\sin\varphi_0)^2 + \frac{l}{g}(\dot{\varphi}_0\cos\varphi_0)^2},}$$

iar

$$\boxed{\beta = \mathrm{arctg}(\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{1}{\dot{\varphi}_0}tg\varphi_0).}$$



Mişcarea punctului supus la legături. Exemplu. Pendulul matematic

Ecuația diferențială care descrie mișcarea pendulului $\ddot{x} + \frac{g}{l} x = 0$ are soluția

$\boldsymbol{x = A \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + \beta)}$ care conține două constante de integrare A și β.

Diferențiem și obținem $\dot{x} = A\sqrt{\frac{g}{l}} \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + \beta)$.

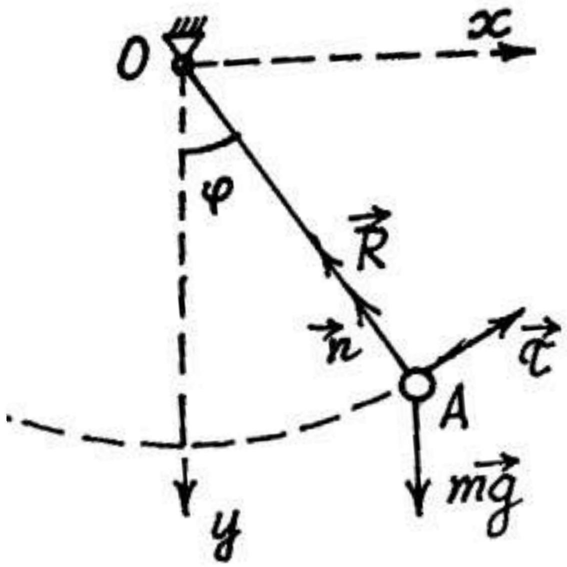
Folosim condițiile inițiale $t = 0$ $x_0 = l\sin\varphi_0$, $v_{0x} = l\dot{\varphi}_0 \cos\varphi_0$ obținem ecuații pentru determinare constantelor A și β.

$$l\sin\varphi_0 = A\sin\beta\,,$$

$$l\dot{\varphi}_0\cos\varphi_0 = A\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\beta. \quad \boxed{A = l\sqrt{(\sin\varphi_0)^2 + \frac{l}{g}(\dot{\varphi}_0\cos\varphi_0)^2}\,,}$$

iar

$$\boxed{\beta = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{1}{\dot{\varphi}_0}\, tg\varphi_0\right).}$$



Exemplu. Pendulul matematic în coordonate naturale

$$m\ddot{s} = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b.$$

Problema pendulului matematic e comod de rezolvat folosind coordonatele naturale.

Ecuațiile mișcării sunt

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = P_\tau + R_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = P_n + R_n, \quad 0 = P_b + R_b,$$

unde $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$.

Întrucât $v_\tau = l\dot{\varphi}$, $P_\tau = -\, mgsin\varphi$, $P_n = -\, mgcos\varphi$ ecuațiile de mișcare a pendulului au aspectul

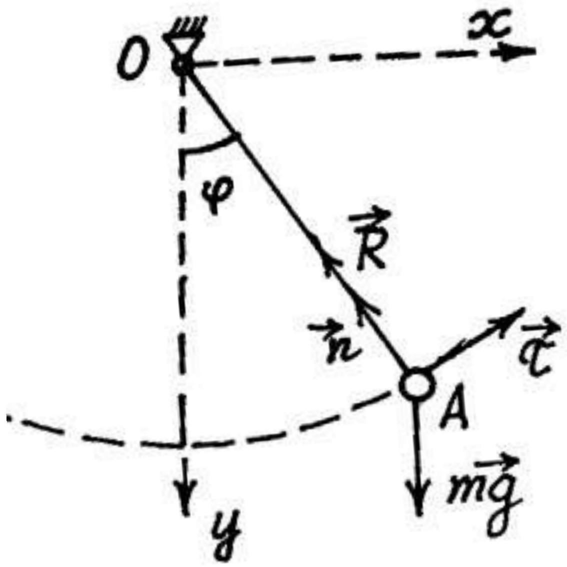
$$ml\ddot{\varphi} = -\, mgsin\varphi \qquad (4)$$

$$ml\dot{\varphi}^2 = -\, mgcos\varphi + R_n, \quad R_b = P_b = 0. \qquad (5)$$

Ecuația (4) poate fi scrisă astfel

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}sin\varphi = 0. \qquad (6)$$

Ecuația (6) servește pentru determinarea legii mișcării pendulului matematic, iar ecuația (5) - pentru determinare reacțiunii firului.



UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Exemplu. Pendulul matematic în coordonate naturale

$$\boxed{m\,\ddot{s} = F_\tau\,, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n\,, \quad 0 = F_b.}$$

Vom determina reacțiunea R_n în funcție de unghiul φ, iar pentru aceasta trebuie să exprimăm mărimea $\dot{\varphi}^2$ prin unghiul φ.

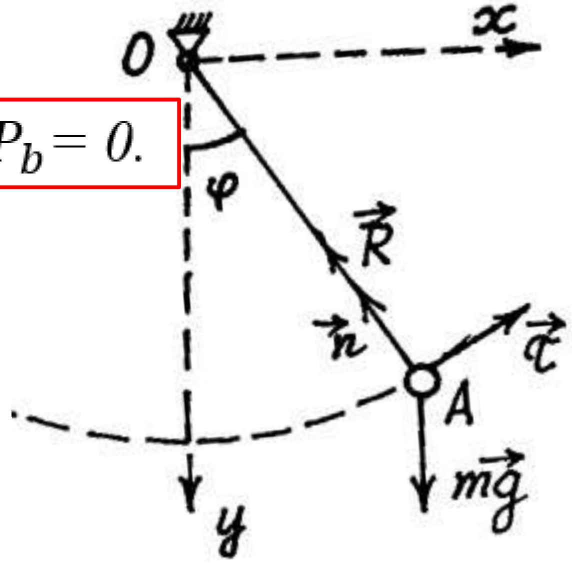
$$\boxed{ml\dot{\varphi}^2 = -\,mg\cos\varphi + R_n, \quad R_b = P_b = 0.}$$

Deoarece $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\,\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi}$ obținem

$$\boxed{\frac{1}{2}\,l\,d\dot{\varphi}^2 = -\,g\sin\varphi\, d\varphi.}$$

Integrăm $\frac{1}{2}\,l\int_{\dot{\varphi}_0}^{\dot{\varphi}} d\,(\dot{\varphi})^2 = -\,g\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin\varphi\, d\varphi$ și avem

$$l\dot{\varphi}^2 = 2g(\cos\varphi - \cos\varphi_0) + l\dot{\varphi}_0^2\,,$$



iar reacțiunea firului

$$R_n = m\,l\dot{\varphi}_0^2 + mg(\,3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0).$$

Dacă unghiul $\varphi_0 = 90°$ și $\dot{\varphi}_0 = 0$, iar $\varphi = 0°$, atunci $\boxed{R_n = 3mg.}$

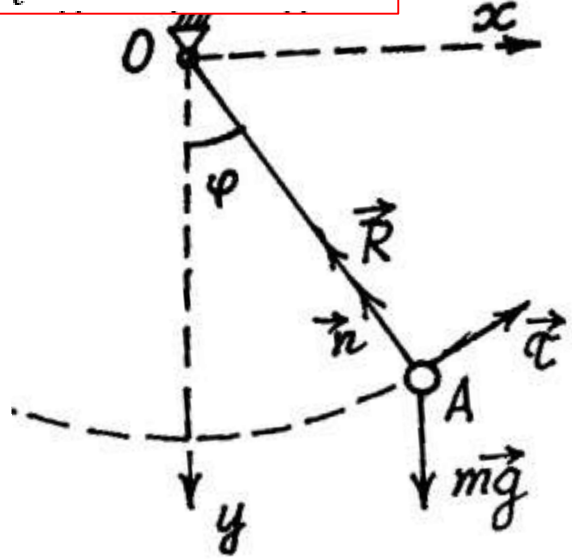
Exemplu. Pendulul matematic în coordonate naturale

$$m\ddot{s} = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b.$$

Să trecem la determinarea legii mișcării pendulului. Scriem ecuația (6) sub forma

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \quad (6)$$

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin\varphi = 0.$$



Vom cerceta cazul abaterilor mici, când se poate considera $\sin\varphi \approx \varphi$. În acest caz ecuația diferențială a mișcării va fi

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$$

Prin urmare, unghiul φ variază după legea armonică

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{\dot{\varphi}_0}{k}\sin kt.$$

Perioada oscilațiilor mici ale pendulului

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

Deci pentru valori mici ale unghiului de abatere perioada nu depinde de abaterea inițială φ_0 .

Partea II.
Dinamica punctului material
în sisteme de referință neinerțiale

Dinamica mişcării relative. Repausul relativ. Forța de greutate.

Legea a doua a lui Newton este justă numai în sisteme de referință inerțiale.

➢ Un sistem de referință se numește inerțial dacă în acest sistem este just principiul inerției (legea întîi a lui Newton).

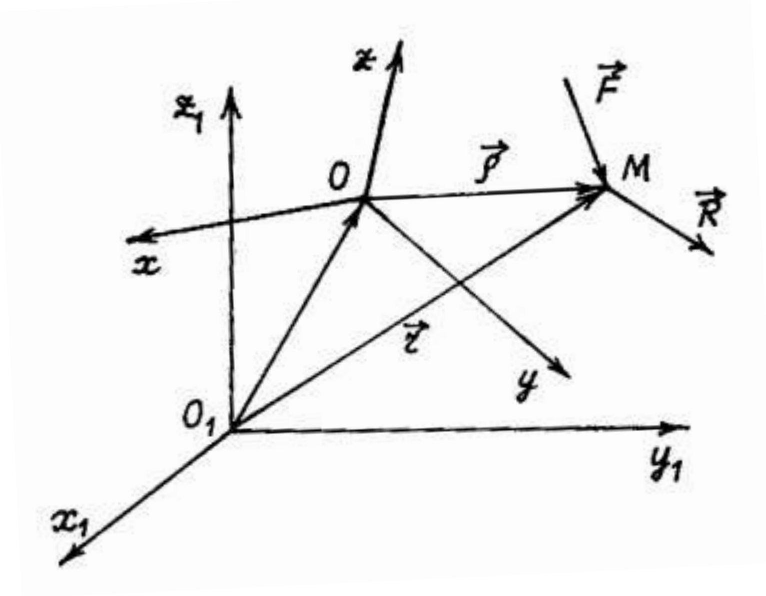
În multe cazuri problemele dinamicii se reduc la cercetarea mișcării într-un sistem neinerțial.

Mai pronunțat se manifestă neinerțialitatea sistemelor de referință legate de obiectele tehnice ce se mișcă accelerat, de exemplu, ascensorul ce se ridică accelerat, nava cosmică ce efectuează decolare de pe Pământ. Dacă sistemul de referință e legat de nava, automobilul sau avionul care se mișcă pe traiectorii curbilinii atunci neinerțialitatea va fi atât de considerabilă, încât ecuația fundamentală a dinamicii devine injustă.

De aceea este important să studiem mișcarea punctului material în sisteme de referință neinerțiale.

Ideea principală ce este pusă la baza deducerii ecuațiilor dinamice respective este legată de relația cinematică:
cunoscând mișcarea relativă a punctului și mișcarea sistemului de coordonate mobil să se determine viteza absolută și accelerația absolută ale punctului.

Dinamica mişcării relative.



Admitem că sunt cunoscute forțele care acționează asupra punctului material și legea mișcării sistemului de coordonate mobil în raport cu un sistem inerțial pe care ulterior îl vom considera sistem fix.

Mişcarea unui sistem de coordonate mobil se poate defini cu ajutorul a trei coordonate ale originii x_0(t),y_0(t),z_0(t) şi trei unghiuri ale lui Euler : $\psi(t)$, $\theta(t)$,$\varphi(t)$.

În sistemul fix este justă ecuația fundamentală a dinamicii (fig.)

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R} \qquad (7)$$

Aici $\boldsymbol{F}$ este rezultanta tuturor forțelor active, $\boldsymbol{R}$ – rezultanta reacțiunilor legăturilor, m – masa punctului material, $\boldsymbol{a}$ - accelerația lui.

Aplicăm teorema lui Coriolis

$$\boldsymbol{a} =\boldsymbol{a_t}+\boldsymbol{a_r}+\boldsymbol{a_c}. \qquad (8)$$

Înlocuim $\boldsymbol{a}$ din (8) în (7), vom obține

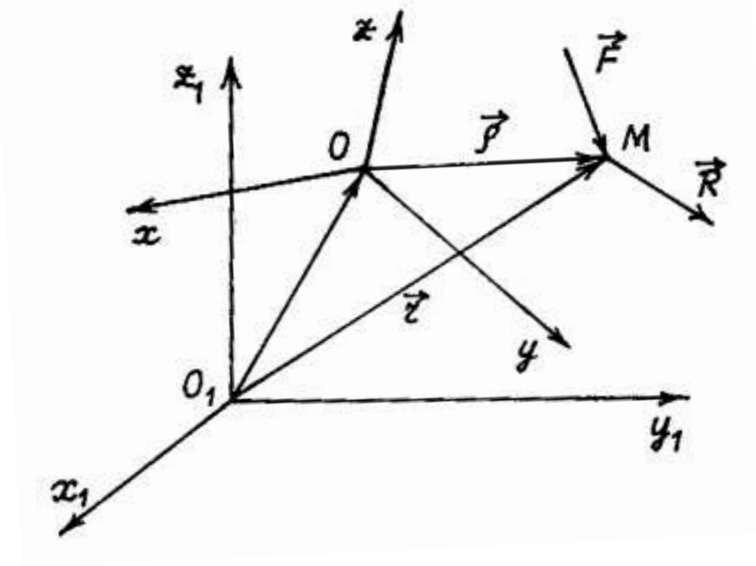
$$m\boldsymbol{a_t}+m\boldsymbol{a_r}+m\,\boldsymbol{a_c}= \boldsymbol{F}+\boldsymbol{R}$$

Transferăm o parte din termeni în partea dreaptă, ajungem la ecuația vectorială

$$m\boldsymbol{a_r}= \boldsymbol{F}+\boldsymbol{R} + (-\,m\boldsymbol{a_t})+ (-\,m\,\boldsymbol{a_c}). \qquad (9)$$

Dinamica mișcării relative.

$$m\boldsymbol{a_r} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} + (-m\boldsymbol{a_t}) + (-m\,\boldsymbol{a_c}). \qquad (9)$$



- ! Produsul dintre masa punctului material și accelerația relativă a lui nu este egală cu suma rezultantei tuturor forțelor active ce acționează asupra lui și a rezultantei reacțiunilor legăturilor.

Ultimii doi vectori din partea dreaptă a ecuației (9) trebuie să fie introduși de către observatorul, ce se află în sistemul de referință neinerțial pentru ca în acest sistem de referință ecuația fundamentală a dinamicii să păstreze forma legii a doua a lui Newton.

Vectorul $\boldsymbol{\Phi_t} = -m\boldsymbol{a_t}$ se numește forță de inerție de transport,

iar $\boldsymbol{\Phi_c} = -m\boldsymbol{a_c} = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r)$ – forța de inerție Coriolis,

unde $\boldsymbol{\omega}$ *este viteza unghiulară a sistemului mobil.*

Ecuația diferențială a mișcării relative capătă forma obișnuită a ecuației fundamentale a dinamicii (legii a doua a lui Newton)

$$m\boldsymbol{a_r} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\Phi_t} + \boldsymbol{\Phi_c}. \qquad (10)$$

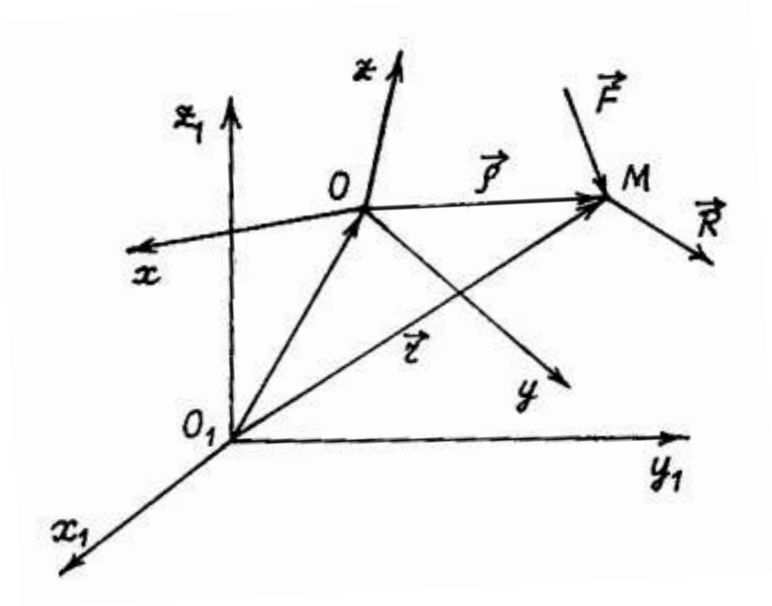
Dinamica mişcării relative.

$$m\boldsymbol{a_r} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\Phi_t} + \boldsymbol{\Phi_c}. \qquad (10)$$

Pentru a alcătui ecuația diferențială a mișcării unui punct material într-un sistem de referință neinerțial sub forma legii a doua a lui Newton, este necesar la forțele active și reacțiunile legăturilor ce acționează asupra lui să adăugăm forțele de inerție de transport și de inerție Coriolis.

Spre deosebire de forța obișnuită, de exemplu de forța de gravitație, modulul, direcția și sensul căreia nu depinde de alegerea sistemului de referință neinerțial, forțele de inerție de transport și a lui Coriolis se determină de către alegerea sistemului de coordonate neinerțial.

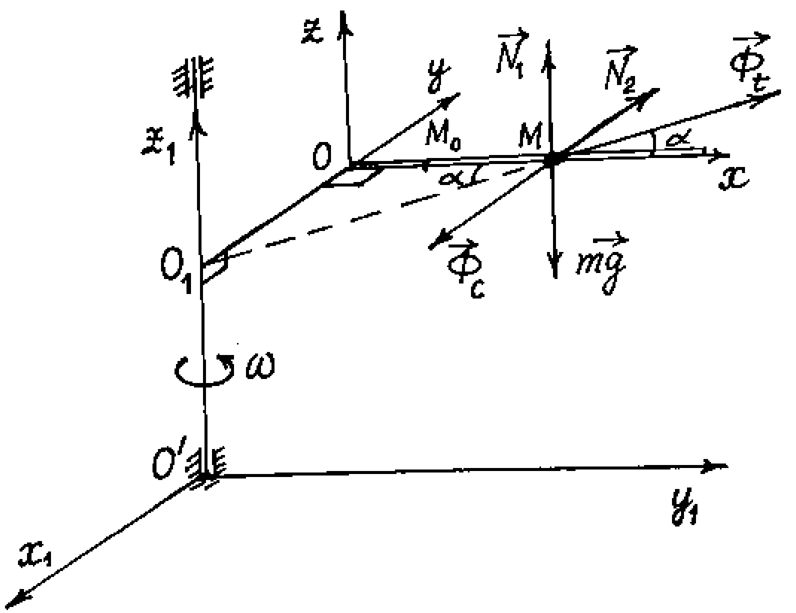
Dacă sistemul mobil efectuează mișcare de translație ($\omega = 0$) atunci forțele de inerție Coriolis lipsesc, iar forțele de inerție de transport nu depind de poziția ocupată de punct în sistemul de referință mobil.



Dinamica mișcării relative. Exemplu

Exemplul 9.

Tubul OA este fixat de un arbore vertical la distanța O_1O= 0,4 m, are lungimea de 1 m și se rotește în planul orizontal în jurul axei verticale care trece prin punctul O_1 cu viteza unghiulară ω=2 rad/s. În interiorul tubului se află o bilă cu masa m=0,1 kg. Inițial bila se afla la distanța OM_O=0,2 m de la capătul O și era fixată de tub. La un moment dat bila a fost eliberată și sub acțiunea forței de inerție de transport a început mișcarea prin tub. ***Să se determine legea mișcării relative a bilei față de tub, timpul deplasării bilei prin tub, viteza relativă a bilei la ieșirea ei din tub și reacțiunea tubului în momentul când bila a ajuns la capătul lui.***



Rezolvare.

Alegem sistemele de coordonate unul fix și altul mobil.

Într-un moment al mișcării bilei ea ocupă o poziție arbitrară *M* determinată de coordonata *x=OM.*

Ecuația fundamentală a mișcării relative este

$$m\boldsymbol{a_r} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N_2} + \boldsymbol{\Phi_t} + \boldsymbol{\Phi_c}.$$

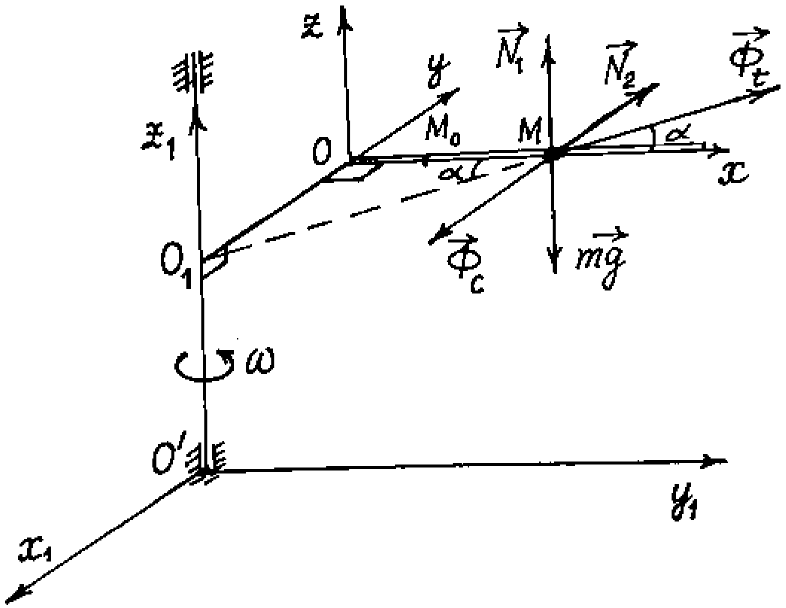
Proiectăm ecuația vectorială pe axele sistemului mobil

$$m\ddot{x} = \Phi_t cos\alpha,$$
$$m\ddot{y} = N_2 - \Phi_C + \Phi_t sin\alpha,$$
$$m\ddot{z} = N_1 - mg,$$

Dinamica mişcării relative. Exemplu

$m\ddot{x} = \Phi_t cos\alpha,$
$m\ddot{y} = N_2 - \Phi_C + \Phi_t sin\alpha$
$m\ddot{z} = N_1 - mg,$

unde $cos\alpha = \frac{x}{O_1M}$, $\Phi_t = m\omega^2 O_1M,\ sin\alpha = \frac{O_1O}{O_1M}$



Astfel, prima ecuație din sistem devine: $m\ddot{x} = m\omega^2 O_1M \cdot \frac{x}{O_1M}$ sau
$\ddot{x} - \omega^2 x = 0.$

Soluția acestei ecuații este $x = C_1e^{\omega t} + C_2e^{-\omega t}$.
Calculăm derivata și folosim condițiile inițiale pentru determinarea legii mișcării relative.

$$\dot{x} = C_1\omega e^{\omega t} - C_2\omega e^{-\omega t}.$$

Când $t=0$ $x_0 = OM_O = 0{,}2$, iar $v_{0x} = 0$.

Rezultă

$$0{,}2 = C_1 + C_2,$$
$$0 = (C_1 - C_2)\omega.$$

Rezolvând, obținem $C_1 = C_2 = 0{,}1$ și legea mişcării relative a bilei este

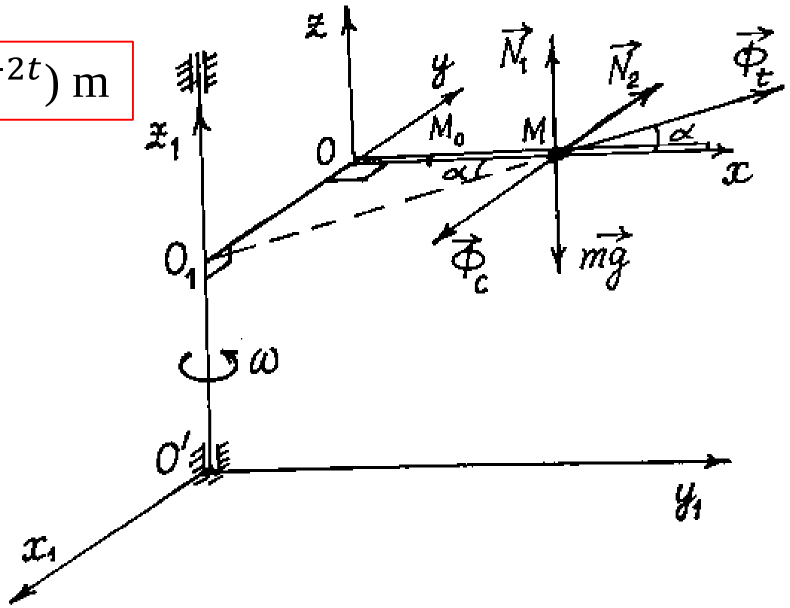
$$\boxed{x(t) = 0{,}1(e^{2t} + e^{-2t})\ \text{m.}}$$

Dinamica mișcării relative. Exemplu

Acum calculăm timpul deplasării bilei prin tub, egalând *x* cu lungimea tubului.

$$\boldsymbol{x = l = 1\ m}$$

$x(t)=0{,}1(e^{2t}+e^{-2t})$ m



$0{,}1(e^{2t_1}+e^{-2t_1})=1$, sau $e^{2t_1}-10+e^{-2t_1}=0$.

1. Notăm $e^{2t_1}=u$, obținem ecuația u^2- $10\,u+1=0$ și rădăcinele ei

$$u=5\pm 2\sqrt{6},\quad u_1=\ 9{,}9 \text{ și } u_2=\ 0{,}1.$$

După logaritmare obținem

$t_1=\frac{1}{2}\ ln9{,}9=1{,}15$ s, iar $t_2=\frac{1}{2}\ ln0{,}1<0$, nu are sens.

Calculăm viteza relativă a bilei la capătul tubului (*prin derivarea expresiei x(t)*)

$$v_{1r}=0{,}2(e^{2t_1}-e^{-2t_1})=0{,}2(9{,}9-\frac{1}{9{,}9})=1{,}96 \text{ m/s.}$$

Reacțiunea tubului la capătul lui

$$R=\sqrt{{N_1}^2+{N_2}^2},$$

$O_1O=0{,}4\ m$

unde $N_1=mg=0{,}1\cdot 9{,}8=0{,}98$ N, iar $N_2=\Phi_C-\Phi_t\ sin\alpha=2m\omega v_r-m\omega^2 O_1O=$
$=2\cdot 0{,}1\cdot 2\cdot 1\ 96-0{,}1\cdot 4\cdot 0{,}4=0{,}62$ N.

$$R=\sqrt{0{,}98^2+0{,}62^2}=1{,}16 \text{ N.}$$

Repausul relativ pe suprafața Pământului. Forța de greutate.

Fie un punct material situat pe un plan neted orizontal rigid legat de Pământ.

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\Phi}_t + \boldsymbol{\Phi}_c. \quad (10)$$

Din ecuația (10) rezultă condițiile repausului relativ.

În acest caz viteza relativă și accelerația relativă ale punctului sunt egale cu zero. Prin urmare, și forța de inerție Coriolis devine egală cu zero. Ecuația repausului relativ capătă aspectul

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\Phi}_t = 0, \quad (12)$$

unde $\boldsymbol{F}$ este forța de atracție a Pământului, $\boldsymbol{R}$ - reacțiunea planului, iar $\boldsymbol{\Phi}_t$ – forța de inerție de transport.

Deoarece se consideră că Pământul se rotește uniform în jurul axei polilor, forța de inerție de transport $\boldsymbol{\Phi}_t$ are numai o componentă, orientată perpendicular pe axa de rotație a Pământului.

Rezultanta forțelor $\boldsymbol{F}$ și $\boldsymbol{\Phi}_t$ va fi notată cu $\boldsymbol{P}$.

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{\Phi}_t = \boldsymbol{P}. \quad (13)$$

Suma geometrică a forței de atracție ***F*** *și a forței de inerție a mișcării de transport, cauzată de rotația Pământului se numește forța de greutate a punctului.*

Repausul relativ pe suprafața Pământului. Forța de greutate.

$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{\Phi_t} = \boldsymbol{P}.$ (13)

Deci asupra punctului material acționeză două forțe ***P*** și ***R*** care se echilibrează reciproc.

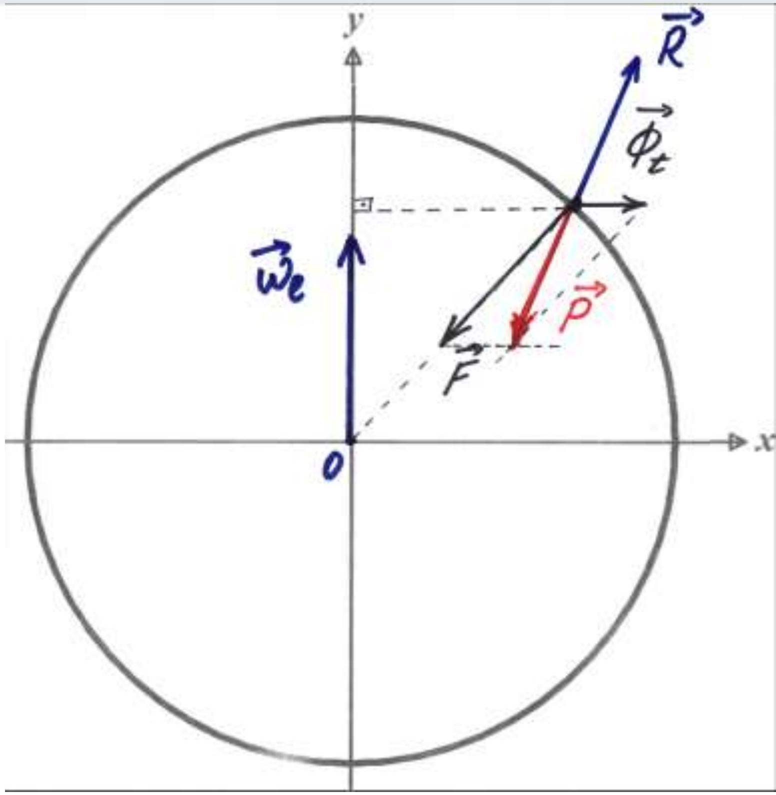
$\Phi_t = m\omega^2 R\cos\lambda$, unde R este raza Pământului, ω este viteza unghiulară a Pământului, λ – latitudenea locului.

Φ_t este mică în comparație cu forța de atracție universală ***F***, de aceea direcția forței ***P*** puțin diferă de la direcția forței ***F***.

Prin urmare, când introducem în ecuațiile de echilibru forța de greutate, noi introducem în așa fel și forța $\boldsymbol{\Phi_t}$, încât luăm în considerație influența rotației Pământului.

Modulul forței de greutate variază cu latitudinea

$$P = F - m\omega^2 R(\cos\lambda)^2$$



Repausul relativ pe suprafața Pământului. Forța de greutate.

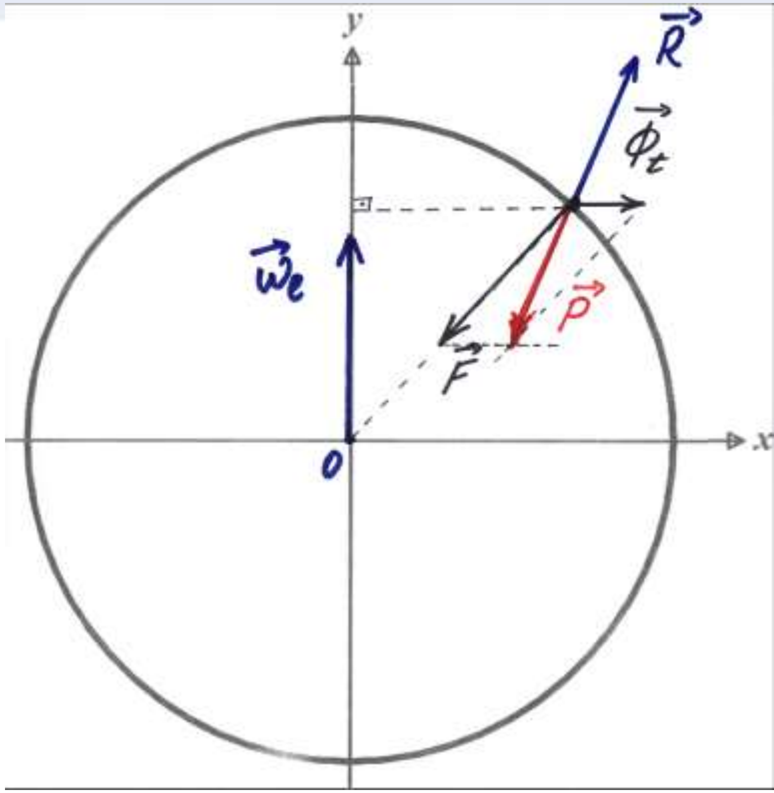
Dacă punctul material se mișcă cu viteză relativă în raport cu Pământul, *suplimentar trebuie să ținem cont de forța Coriolis*

$\Phi_c = 2m\omega v_r \sin\alpha,$

unde $\omega = 0{,}0000727\ rad/s$ este viteza unghiulară a Pământului, α este unghiul format de viteza relativă v_r și axa de rotație a Pământului.

Dar forța de inerție Coriolis în comparație cu forța de greutate este cu mult mai mică și de aceea poate fi neglijată.

Efectul forței Coriolis se manifestă atunci când vitezele sunt mari (de exemplu, zborul rachetei cu rază de acțiune mare) sau când mișcarea este de durată mare (cursul rîului).



Repausul relativ pe suprafața Pământului. Forța de greutate.

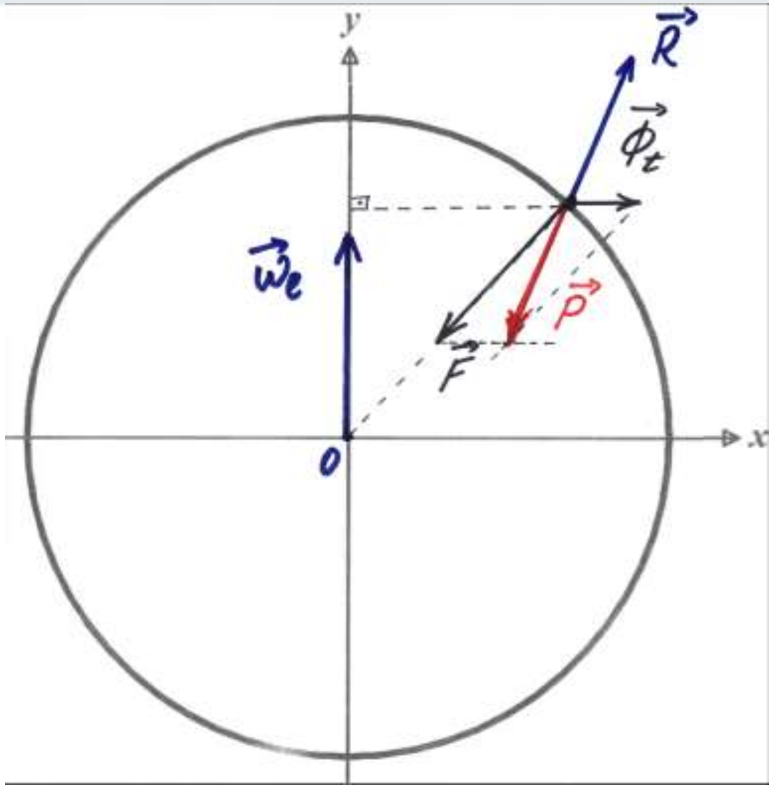
Pentru ca un sistem de coordonate mobil să fie inerțial, este suficient ca originea lui să se miște cu viteză constantă, iar viteza unghiulară a sistemului tot timpul să fie egală cu zero.

$$\boxed{m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\Phi}_t + \boldsymbol{\Phi}_c. \ (10)}$$

În acest caz ambele forțe de inerție sunt egale cu zero și ecuația fundamentală (10) ia forma

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}\,.$$

Astfel, *dacă există cel puțin un sistem de referința în care se îndeplinesc legile lui Newton, atunci există o mulțime de astfel de sisteme. Toate aceste sisteme efectuează mișcări uniforme și rectilinii unul față de altul.*

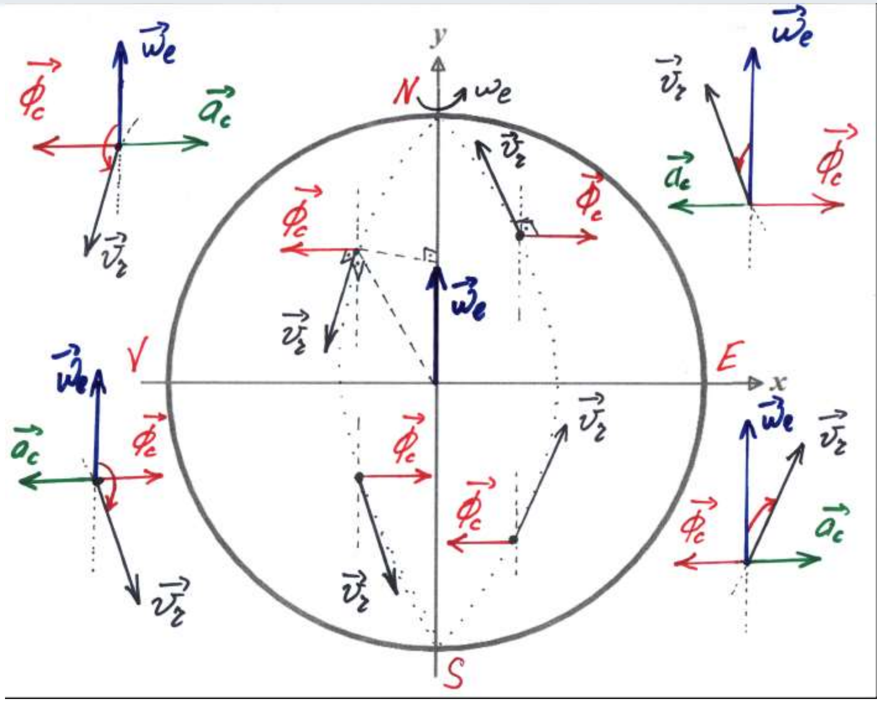


Influența rotației Pământului asupra mișcării corpurilor.

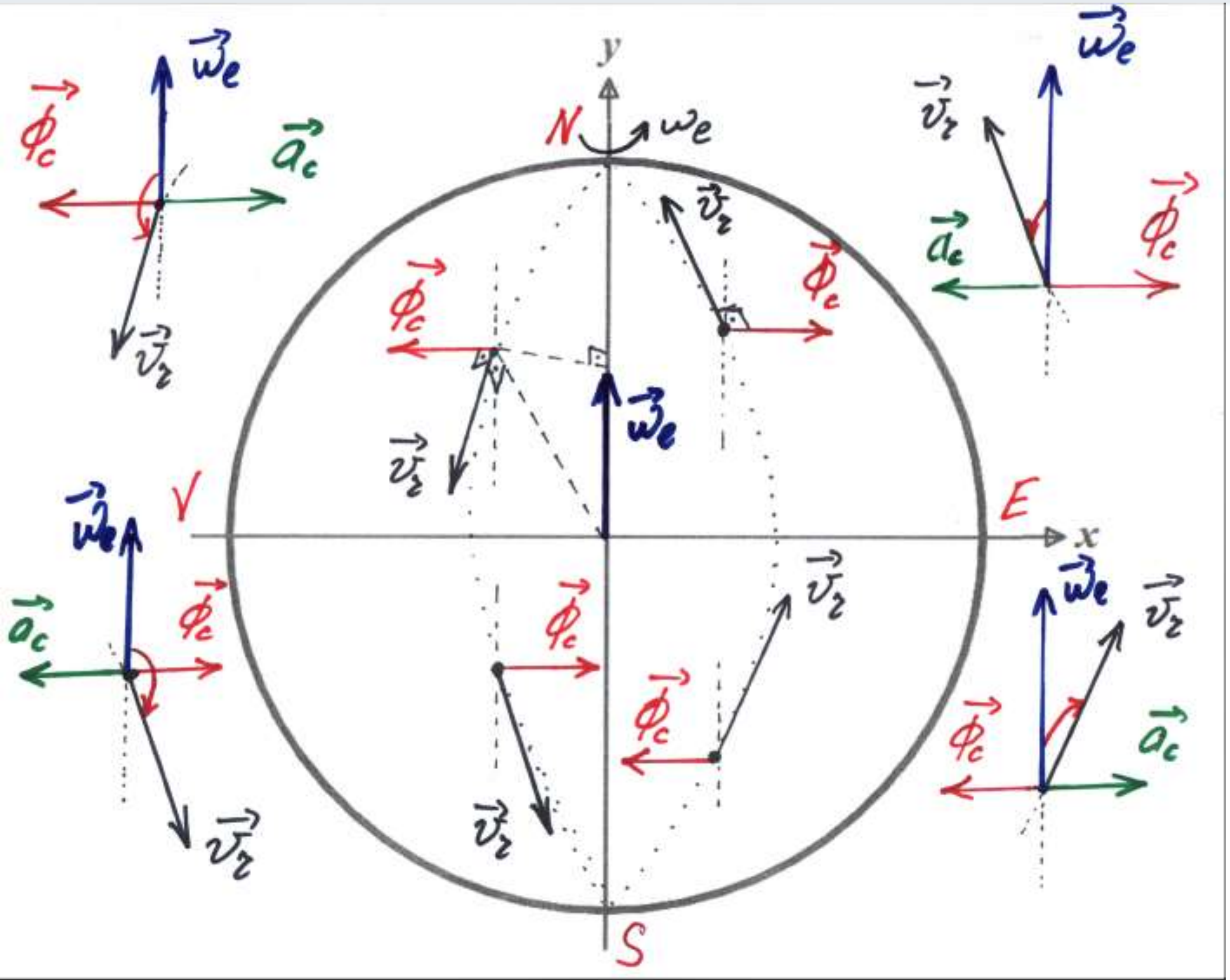
Dacă un punct material se mișcă de-a lungul meridianului în emisfera nordică de la nord spre sud forța de inerție Coriolis este orientată spre vest,

iar dacă mișcarea este de la sud la nord atunci forța de inerție Coriolis este orientată spre est.

Adică în ambele cazuri forța Coriolis va devia mișcarea punctului spre dreapta direcția mișcării punctului.



Influența rotației Pământului asupra mișcării corpurilor.

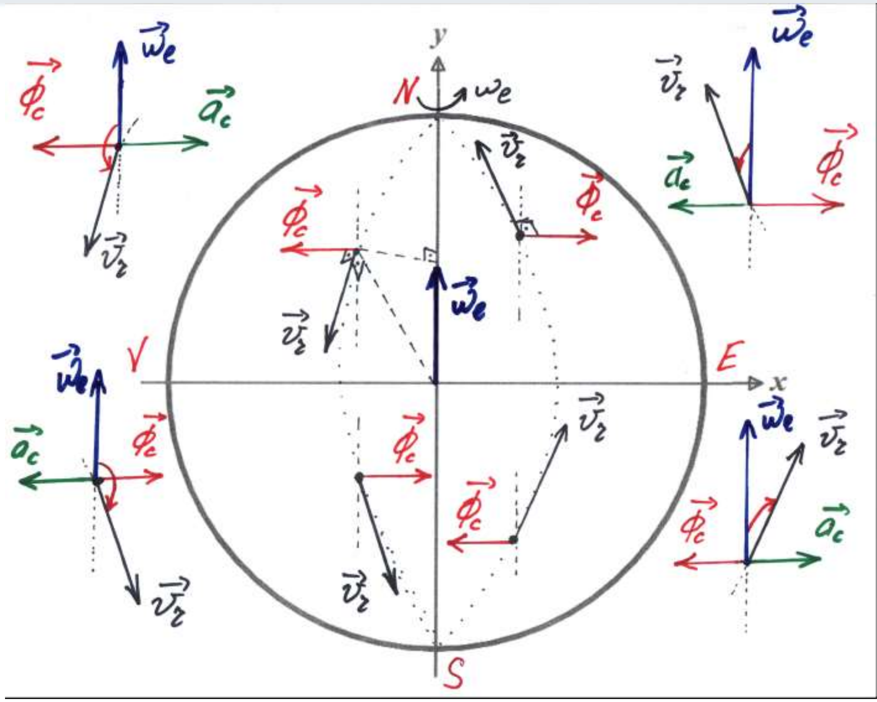


Influența rotației Pământului asupra mișcării corpurilor.

Dacă punctul se deplasează pe paralelă spre est atunci forța de inerție Coriolis este orientată perpendicular pe axa de rotație de la axă.

Componenta verticală a acestei forțe va modifica puțin forța de greutate a corpului, iar componenta orizontală va fi orientată spre sud și va devia punctul tot spre dreapta de la direcția mișcării.

Dacă punctul se deplaseză pe paralelă spre vest atunci forța de inerție Coriolis va fi orientată spre axa de rotație a Pământului și va abate punctul spre dreapta de la direcția mișcării.



Concluzia.

1. Corpul care se mișcă în orice direcție pe suprafața Pământului în emisfera nordică se va abate spre dreapta de la direcția mișcării din cauză că Pământul se rotește în jurul axei sale.

În emisfera sudică devierea va fi spre stînga.

2. La ecuator efectul forței de inerție Coriolis nu se manifestă.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Influența rotației Pământului asupra mișcării corpurilor.

S-a observat că în emisfera nordică malurile drepte ale rîurilor sunt mai abrupte, iar cele stângi au o înclinare mică.

Aceasta se poate explica prin aceea că asupra apei râului acționează forța de inerție Coriolis orientată perpendicular pe viteza apei spre dreapta. În emisfera sudică sunt erodate malurile stângi ale râurilor.

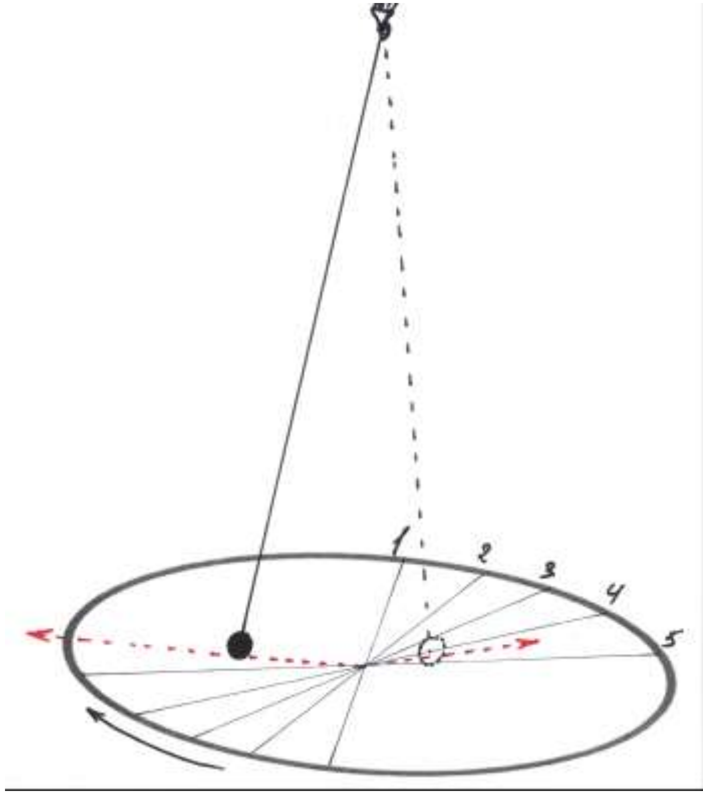
Prin forța de inerție de trasport, cauzată de rotația Pământului, se explică și turtirea Pământului.

Pământul are forma unui elipsoid de revoluție. Raza Pământului la poli este egală cu $R_p = 6357$ km, iar la ecuator $R_e = 6378$ km .

De regulă, turtirea Pământului este neglijată și se consideră că forța de greutate mg este orientată de-a lungul razei Pământului spre centrul lui.

Influența rotației Pământului asupra mișcării corpurilor. Pendulul Foucault

Savantul francez Leon Foucault a demonstrat în anul 1851 rotația Pământului cu ajutorul unui pendul foarte lung (*l = 67 m*), măsurând efectul forței de inerție Coriolis asupra acestui pendul.



Acest efect constă în rotirea planului vertical în care oscilează pendulul în sens orar.

Pendulul a fost instalat la Paris, adică în emisfera nordică și corpul care se mișcă în emisfera nordică se abate spre dreapta de la direcția mișcării.

De aceea pendulul în loc să ajungă în punctul diametral opus, ajungea într-un punct mai la dreapta, din acest punct deplasîndu-se înapoi iar se abate la dreapta și în felul acesta planul de oscilații a pendulului se rotește.

O rotație a planului de oscilație pendulul o face în timpul

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda},$$

La latitudinea Chișinăului $\lambda = 47°$ $\tau = 32{,}82$ ore.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Pendulul Foucault

Bibliografie

1. Butenin N. V. I. L. Lunţ, D. R. Merkin Curs de mecanică teoretică. Vol. 1, 2. Chişinău 1993.
2. Caraganciu V. M. Colpajiu, M. Ţopa Mecanica teoretică. Chişinău 1994
3. I. V. Meşcerskii. Culegere de probleme la MT, Chişinău, 1991.
4. Caraganciu V. MT, Compendiu şi probleme, 2008
5. С. М. Тарг Краткий курс теоретической механики. Наука, Москва, 1967
6. V. Szolga. Mecanica teoretică. Vol. 1. Statica, Divers-press, Bucureşti, 1994