UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Mecanica

MIȘCAREA PLANĂ A CORPULUI RIGID.

MIŞCAREA PLANĂ A CORPULUI RIGID

- Definirea mişcării
- Viteza punctelor corpului în mişcarea plană
- Centrul instantaneu al vitezelor
- Determinarea vitezei unghiulare a corpului aflat în mişcare plană

DEFINIREA MIȘCĂRII

Mişcarea corpului rigid se numeşte plană, dacă toate punctele corpului se mişcă în plane paralele cu un oarecare plan fix.

Cîteva exemple de mișcare plană: Bara *AB*, roata cu trepte și roata II (Fig.1).

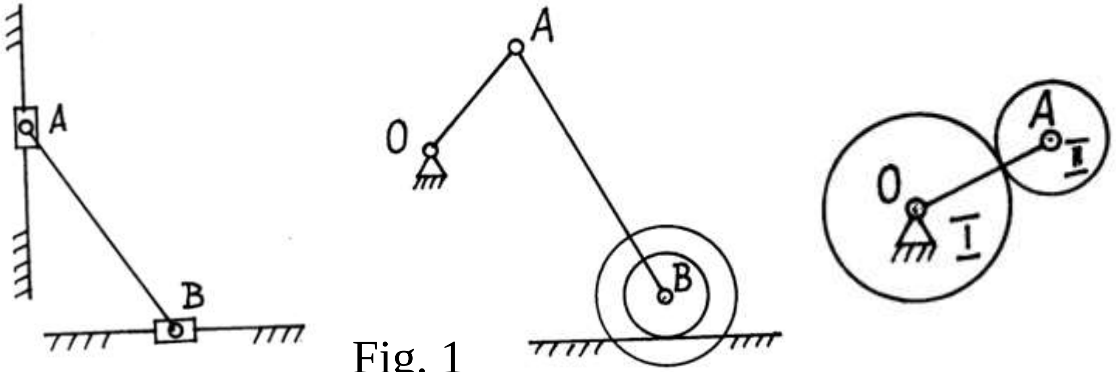

Fig. 1

Un rigid cu axă de rotație are mișcare plană dacă axa lui este fixă sau dacă axa efectuează mișcare de translație cu viteza perpendiculară pe axa de rotație.

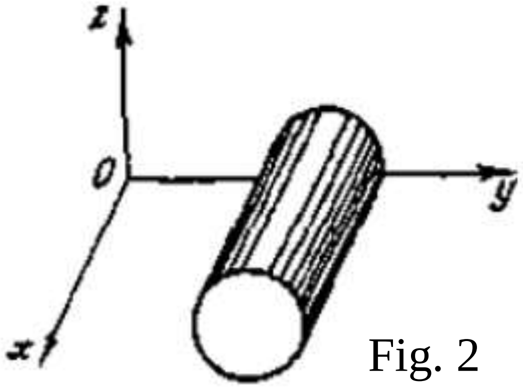

Fig. 2

Mişcare plană - rostogolirea unui cilindru pe un plan orizontal cînd baza lui rămîne tot timpul paralelă cu planul *yz* (Fig.2).

DEFINIREA MIŞCĂRII

- Considerăm mişcarea plană arbitrară a unui corp rigid.
- Fie toate punctele corpului se deplasează în plane paralele cu planul *xy* (Fig. 3).

- Din definiţia mişcării plane şi din însuşirile corpului rigid (unghiul dintre orice două drepte fixate într-un corp rigid este constant) → că orice dreaptă *AB* dusă în corp perpendicular la planul *xy* va efectua o mişcare de translaţie.

- Traiectoriile, vitezele şi acceleraţiile tuturor punctelor acestei drepte vor fi la fel.

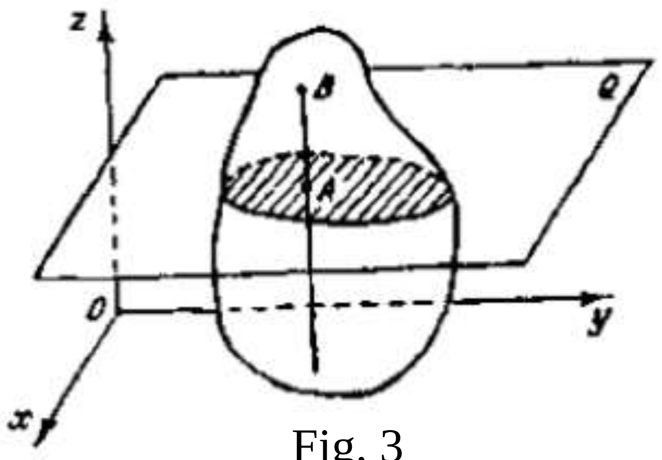

Fig. 3

Pentru definirea mişcării unui corp este necesar să ştim mişcarea doar a unui punct de pe fiecare dreaptă perpendiculară pe planul *xy*.

Luînd aceste puncte într-un plan paralel cu planul *xy*, *se poate afirma că mişcarea plană a corpului rigid este determinată complet de mişcarea unei figuri plane obţinute prin intersecţia corpului cu un oarecare plan Q paralel cu planul xy* (Fig. 3).

- **Mişcarea plan-paralelă constă din două tipuri de mişcări: de translație și de rotație.**

Pentru descrierea mişcării plane a unui corp trebuie să ştim trei coordonate independente ca funcţii de timp.

$$x_{1A} = x_{1A}(\boldsymbol{t}), \quad y_{1A} = y_{1A}(\boldsymbol{t}), \quad \varphi = \varphi(\boldsymbol{t}) \qquad (1)$$

Egalitățile (1) se numesc *ecuaţii de mişcare ale unei figuri plane sau ecuaţiile mişcării plane ale unui corp rigid.*

Să găsim formulele cu ajutorul cărora putem determina coordonatele oricărui punct al unei figuri plane, dacă sunt date funcţiile (1).

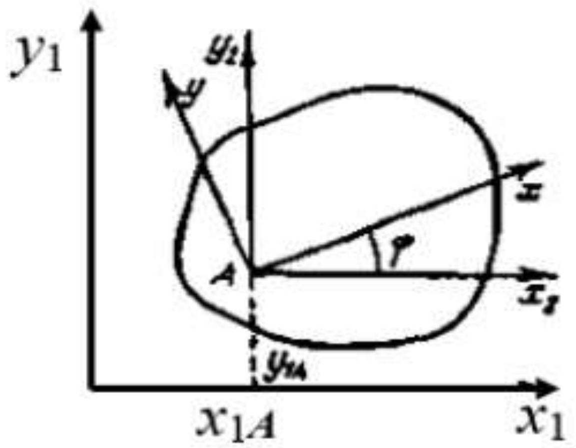

Fig. 4

VITEZA PUNCTELOR CORPULUI ÎN MIȘCAREA PLANĂ

- Fie sistemul de coordonate Ox_1y_1 este imobil,
- Sistemul de coordonate, avînd originea într-un punct A al figurii plane, ales arbitrar, efectuează o mişcare de translaţie.
- Sistemul de coordonate Axy îl legăm rigid de figura plană.

Vectorul de poziţie $\vec{r}_B$ al punctului B în sistemul de coordonate imobil Ox_1y_1 poate fi determinat cu ajutorul a doi vectori:

$\vec{r}_A$— raza vectoare a punctului A în sistemul de coordonate Ox_1y_1

$\vec{\rho}$ - vectorul de poziţie al punctului B în sistemul de referinţă Ax_2y_2

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho} \qquad (2)$$

Cunoscînd coordonatele $x_{1\boldsymbol{A}}$ şi $y_{1\boldsymbol{A}}$ ale punctului A şi coordonatele $x_{\boldsymbol{B}}$ şi $y_{\boldsymbol{B}}$ ale punctului B în sistemul de coordonate Axy, precum şi unghiul φ dintre axele Ax_2 şi Ax putem determina coordonatele $x_{1\boldsymbol{B}}$ şi $y_{1\boldsymbol{B}}$ ale punctului B din formulele:

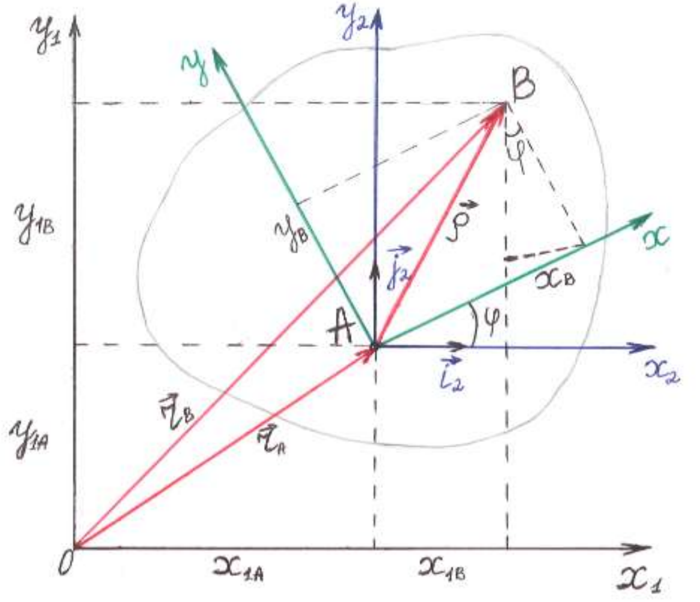

Fig. 5

VITEZA PUNCTELOR CORPULUI ÎN MIȘCAREA PLANĂ

$$x_{1B}(t) = x_{1A}(t) + x_B \cos\varphi(t) - y_B \sin\varphi(t),$$
$$y_{1B}(t) = y_{1A}(t) + x_B \sin\varphi(t) + y_B \cos\varphi(t). \qquad (3)$$

x_B şi y_B - mărimi constante, diferenţiind după timp x_{1B} şi y_{1B}, găsim proiecţiile vitezei punctului B pe axele de coordonate:

$$\dot{x}_{1B} = \dot{x}_{1A} - x_B\, \dot{\varphi} \sin\varphi - y_B\, \dot{\varphi} \cos\varphi,$$
$$\dot{y}_{1B} = \dot{y}_{1A} + x_B\, \dot{\varphi} \cos\varphi - y_B \dot{\varphi} \sin\varphi. \qquad (4)$$

Acelaşi rezultat îl putem obţine, derivînd nemijlocit identitatea $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}$

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} \qquad (5)$$

$$\vec{v}_B \qquad \vec{v}_A \qquad \vec{v}_{BA}$$

$\vec{v}_{BA}$ este viteza punctului B în raport cu sistemul de coordonate mobil Ax_2y_2,
adică viteza relativă.

VITEZA PUNCTELOR CORPULUI ÎN MIȘCAREA PLANĂ

- Mişcarea corpului faţă de sistemul de coordonate Ax_2y_2 este o mişcare de rotaţie în jurul axei Az_2, orientată perpendicular pe planul desenului spre cititor (Fig. 5).

- Viteza $\vec{v}_{BA}$ este viteza punctului B în rotaţia corpului în jurul axei Az_2. Pentru determinarea acestei viteze am obţinut deja formula

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega}_A \times \vec{\rho},$$

aici $\vec{\omega}_A$ este viteza unghiulară a rotaţiei figurii în jurul punctului A (în jurul axei Az_2) pe care în viitor îl vom numi *pol*.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho} = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \qquad (6)$$

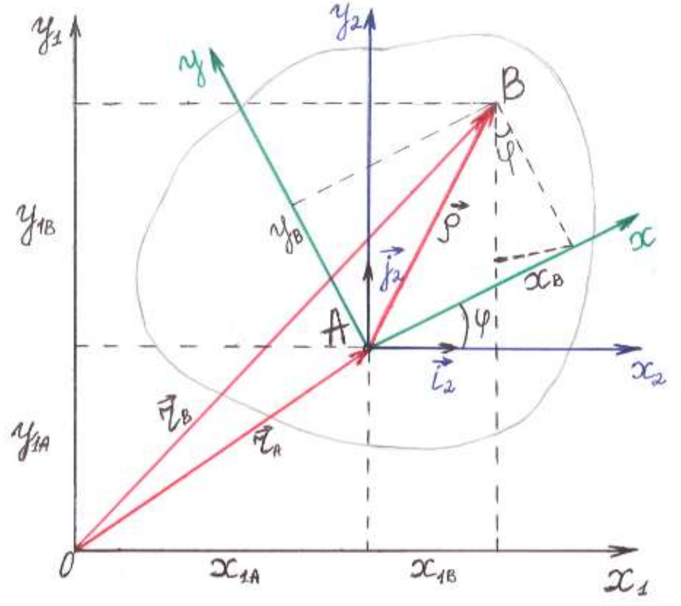

Fig. 5

Viteza unui punct oarecare B al unei figuri plane este egală cu suma geometrică a vitezei polului A şi a vitezei punctului B în rotaţia figurii în jurul polului A.

Viteza unghiulară a rotaţiei figurii nu depinde de alegerea polului, adică $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}$. Expresia (6) devine acum:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \qquad (7)$$

- Direcţia rotaţiei unei figuri plane în jurul polului se determină după semnul proiecţiei vitezei unghiulare pe axa Az_2.
- Deoarece $\omega_z = \dot{\varphi}$, apoi pentru $\omega_z > 0$ rotaţia are loc contra mişcării acelor de ceasornic şi cînd $\omega_z < 0$ — în direcţia mişcării acelor de ceasornic.
- În Fig. 6 *a* şi *b* este demonstrat cum se poate găsi viteza punctului *B*, cunoscînd viteza punctului *A* pentru $\omega_z > 0$ şi $\omega_z < 0$.

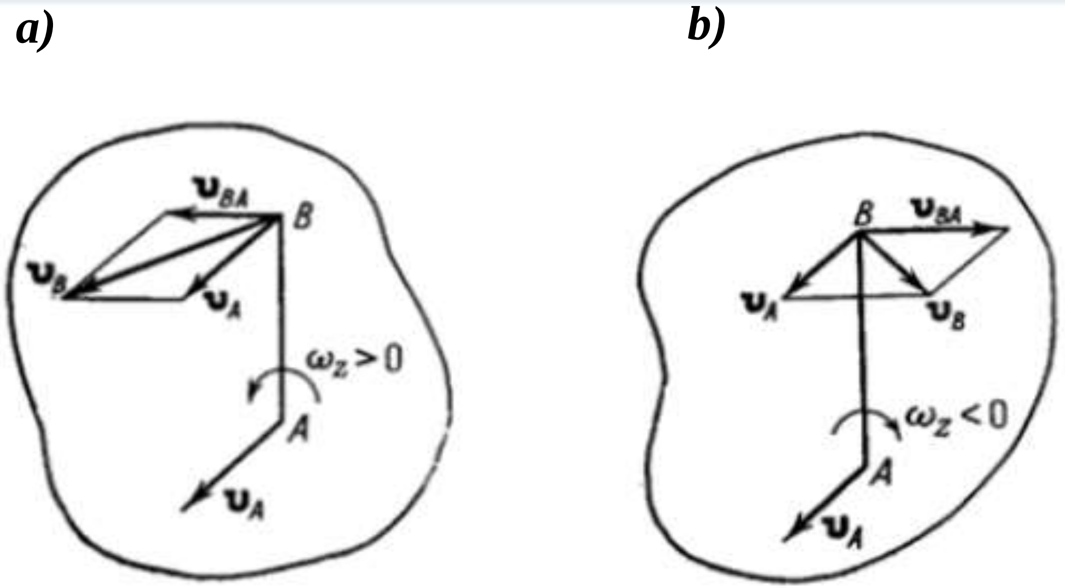

Fig. 6

Deoarece $\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$, urmează că modulul vitezei

$$v_{BA} = \omega \cdot AB,$$

vectorul $\vec{\omega}$ fiind perpendicular pe planul desenului. Menţionăm că vectorul $\vec{v}_{BA}$ este perpendicular şi pe *AB*.

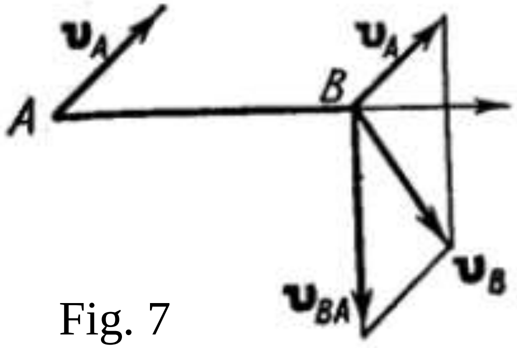

Fig. 7

Din formula (7) ($\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$), rezultă teorema:

TEOREMĂ: În mişcarea plană proiecţiile vitezelor a două puncte ale unui corp pe axa, care trece prin aceste puncte, sunt egale.

Alegem direcţia pozitivă pe axa *AB* aşa cum este arătat în fig. 7 şi aplicăm formula (7)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}. \qquad (8)$$

Proiectînd această egalitate pe axa *AB* și fiindcă vectorul $\vec{v}_{BA}$ este perpendicular pe *AB*, rezultă că proiecțiile vitezelor punctelor *A* și *B* pe axa care trece prin aceste puncte, sunt egale.

EXEMPLU

Problema 1. Să se determine viteza cursorului B al mecanismului bielă-manivelă reprezentat în Fig. 8, dacă $AC = CB = l$ şi este cunoscută viteza unghiulară ω a manivelei AC în momentul cînd AC şi BC sînt reciproc perpendiculare.

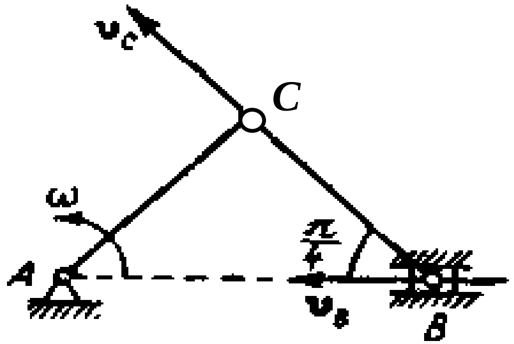

Fig. 8

Rezolvare:

Pe baza teoremei demonstrate avem

$$v_C = v_B \cos\frac{\pi}{4},$$

$$v_C = \omega \cdot AC = \omega \cdot l,$$

$$v_B \cos\frac{\pi}{4} = \omega \cdot l \quad \text{de unde} \quad v_B = \omega l\sqrt{2} = v_C\sqrt{2}$$

Răspuns: $v_B = v_C\sqrt{2} = \omega l\sqrt{2}$

CENTRUL INSTANTANEU AL VITEZELOR

Centru instantaneu al vitezelor (CIV) se numeşte punctul figurii plane, viteza căruia în momentul dat este egală cu zero.

Să demonstrăm *teorema despre existenţa centrului instantaneu al vitezelor*: dacă viteza unghiulară a unei figuri plane este diferită de zero, atunci există centrul instantaneu al vitezelor.

- Fie viteza unui punct arbitrar A al figurii plane $\vec{v}_A$ diferită de zero (în caz contrar punctul A ar fi centru instantaneu al vitezelor).
- După semnul vitezei unghiulare $\omega_z = \dot{\varphi}$ determinăm direcţia rotaţiei figurii plane în jurul punctului A şi în această direcţie perpendicular pe viteza $\vec{v}_A$ depunem de la punctul A un segment $AP = v_A/\omega$.
- În fig. 9 se presupune că $\omega_z = \dot{\varphi} > 0$ şi de aceea segmentul AP este rotit faţă de viteza $\vec{v}_A$ împotriva mersului acelor de ceasornic.
- Demonstrăm că viteza punctului P este egală cu zero, adică că acest punct şi este centrul instantaneu al vitezelor.

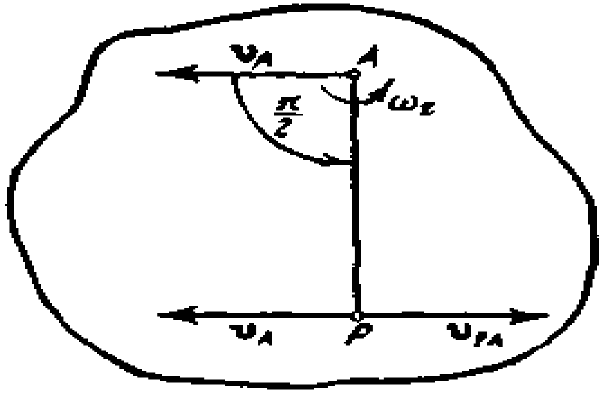

Fig. 9

În concordanţă cu formula (7) ($\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$) avem

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}. \qquad (9)$$

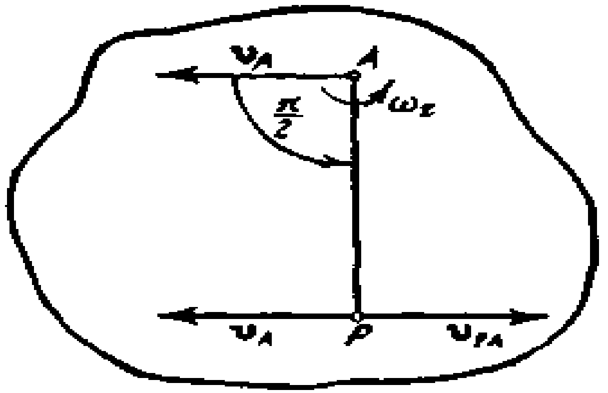

Fig. 9

Vectorul $\vec{v}_{PA}$, fiind perpendicular pe AP, este paralel cu vectorul $\vec{v}_A$. Pe lîngă aceasta în corespundere cu regula de construcţie a segmentului AP vectorii $\vec{v}_A$ şi $\vec{v}_{PA}$ au sensuri contrare. Modulul vectorului $\vec{v}_{PA}$ este

$$v_{PA} = \omega \cdot AP = \frac{v_A}{\omega} \cdot \omega = v_A.$$

Doi vectori, de mărimi egale şi orientaţi în sensuri opuse, în sumă sunt egali cu zero. Prin urmare,

avem $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = 0,$

adică viteza punctului P este egală cu zero.

CENTRUL INSTANTANEU AL VITEZELOR

Alegem acum în calitate de pol punctul P (fig. 10). Atunci viteza unui punct arbitrar A al figurii plane se va afla din formula

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \overrightarrow{PA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PA}. \qquad (10)$$

$\vec{v}_P$ fiind egal cu zero.

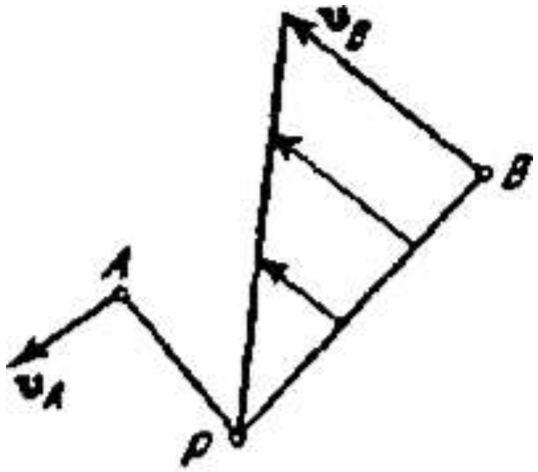

Fig. 10

- De aici rezultă că vitezele punctelor corpului în mişcarea lui plană sunt distribuite exact la fel ca şi în mişcarea de rotaţie.

- Rolul axei fixe îl joacă axa instantanee ce trece prin centrul instantaneu al vitezelor perpendicular pe planul mişcării.

- Aşadar, vitezele tuturor punctelor ale unei figuri plane sunt perpendiculare pe segmentele ce unesc aceste puncte cu centrul instantaneu al vitezelor ($\vec{v}_A \perp AP$), iar modulii vitezelor sunt proporţionali cu distanţele pînă la CIV ($v_A = \omega \cdot AP$).

CENTRUL INSTANTANEU AL VITEZELOR

Ştiind poziţia centrului instantaneu al vitezelor, se poate afla viteza oricărui punct al figurii plane, dacă este cunoscută viteza unui oarecare punct al ei.

- Presupunem că este cunoscută, de exemplu, viteza $\vec{v}_A$, a punctului A; atunci din egalitatea $v_A = \omega \cdot AP$ aflăm $\omega = v_A / AP$ şi viteza oricărui punct B va fi $v_B = v_A \cdot PB/PA$. Unind extremitatea vectorului $\vec{v}_B$ cu punctul P, obţinem epura distribuirii vitezelor de-a lungul segmentului PB (vezi fig. 10).

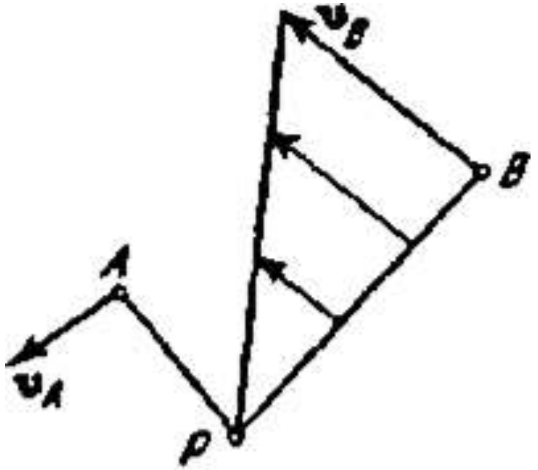

Fig. 10

Utilizind proprietăţile principale ale centrului instantaneu al vitezelor, se poate determina poziţia lui şi în alte cazuri, în fig. 11.

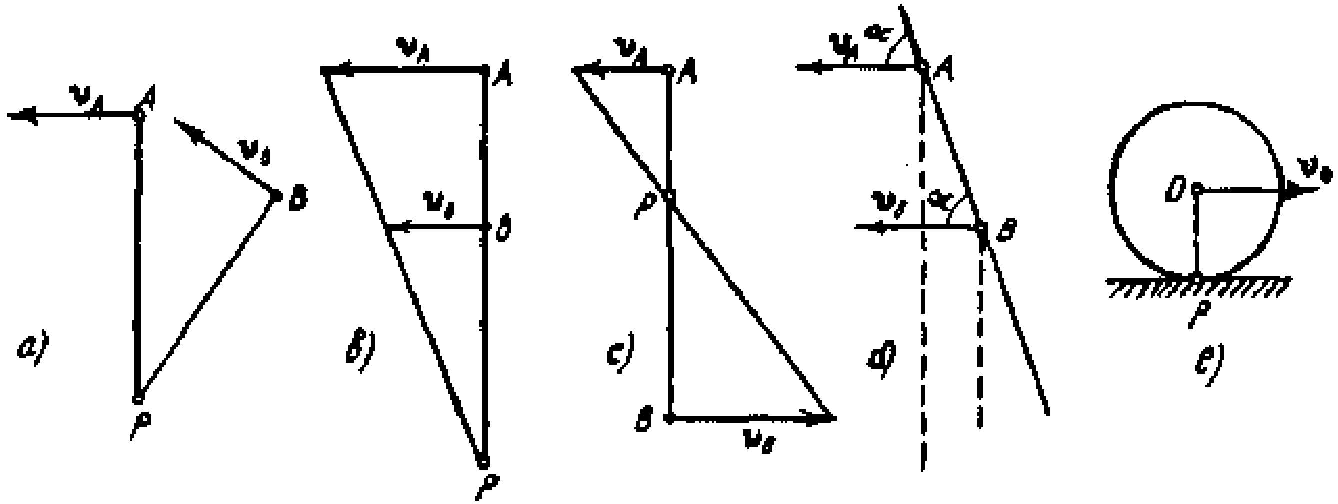

Fig. 11

CENTRUL INSTANTANEU AL VITEZELOR

- În Fig. 11 a) sunt cunoscute direcţiile vitezelor a două puncte. Din punctele *A* şi *B* sunt ridicate perpendiculare pe vitezele $\vec{v}_A$ şi $\vec{v}_B$. Punctul *P* se află la intersecţia lor.

- În Fig. 11 b) și c) vitezele punctelor *A* şi *B* sunt paralele şi $AB \perp \vec{v}_A$. Pentru determinarea (CIV-ului) urmează să aplicăm proporţionalitatea modulilor vitezelor cu distanţele dintre puncte şi centrul instantaneu al vitezelor.

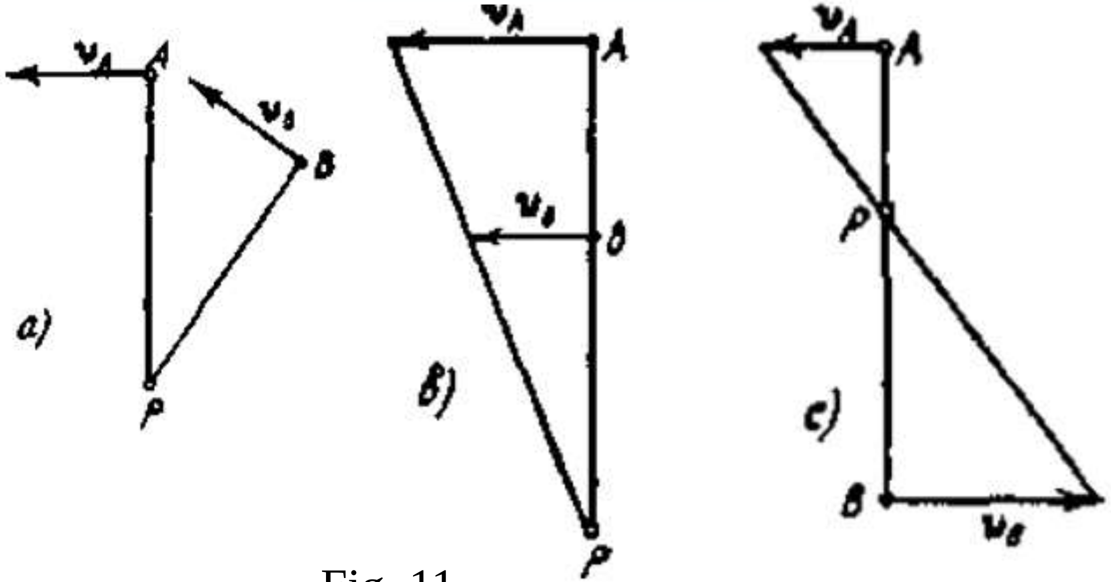

Fig. 11

CENTRUL INSTANTANEU AL VITEZELOR

- În Fig. 11 d) este reprezentat cazul cînd vitezele $\vec{v}_A$ şi $\vec{v}_B$ sunt paralele, iar $\vec{v}_A$ nu este perpendicular pe *AB*. Este evident că în acest caz dreptele perpendiculare pe $\vec{v}_A$ şi $\vec{v}_B$ se intersectează la infinit şi (CIV) nu există. Într-adevăr, conform teoremei despre proiecţiile vitezelor avem $v_A \cdot \cos\alpha = v_B \cdot \cos\alpha$, $v_A = v_B$ și $\vec{v}_A = \vec{v}_B$. Din formula (7) ($\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$) rezultă că acum $\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} = 0$, adică viteza unghiulară a figurii este egală cu zero ($\vec{\omega} = 0$). Deci, în momentul dat vitezele tuturor punctelor figurii plane sunt egale ca modul şi direcţie şi, prin urmare, punctul cu viteza liniară egală cu zero nu există.
- La rostogolirea fără alunecare a unui corp pe suprafaţa altui corp (fig. 11 e) CIV-ul coincide cu punctul de contact al corpurilor (deoarece în lipsa alunecării viteza punctului de contact este nulă).

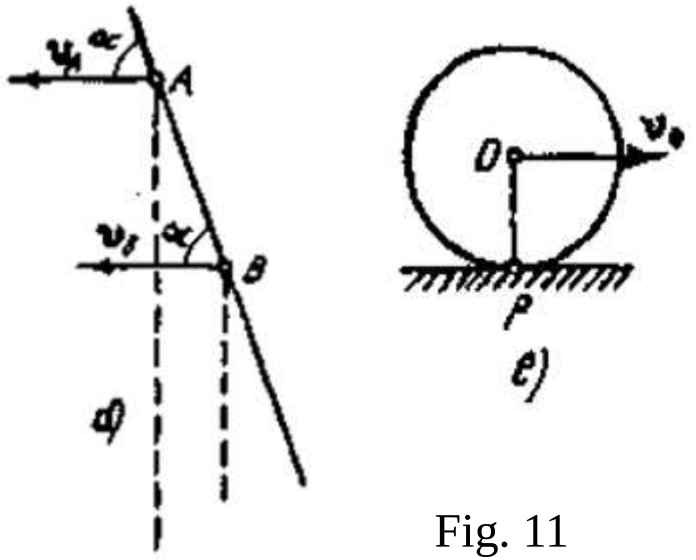

Fig. 11

Problema 2.

În mecanismul bielă-manivelă cu două cursoare manivela $OA=r=15cm$ se roteşte în jurul axei O cu viteza unghiulară constantă $\omega_0 = 2\ rad/s$ (fig. 12). Bielele au aceeaşi lungime ($AB = CD = l = 60\ cm$) și $AC = l/3$. Pentru poziția orizontală (de dreapta) a manivelei OA determinaţi:

l) vitezele unghiulare ale bielelor AB şi CD;

2) viteza cursorului D.

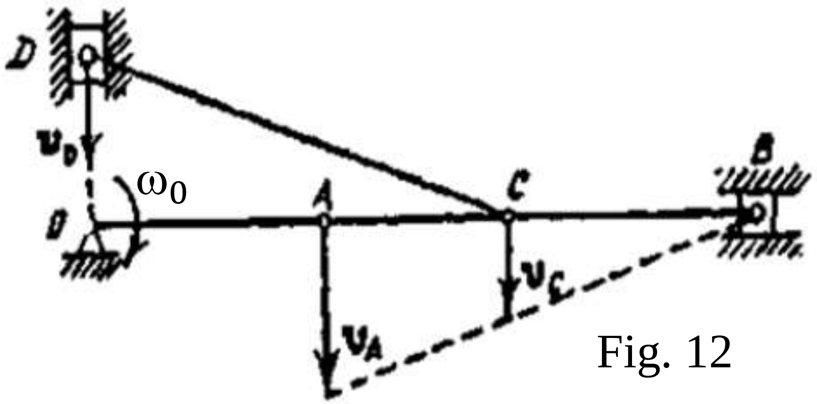

Fig. 12

Rezolvare:

Pe de o parte $v_A = \omega_0 \cdot r,$ Pe de altă parte $v_A = \omega \cdot AB,$

Prin urmare, $\omega_0 \cdot r = \omega \cdot AB$ și $\omega = \dfrac{\omega_0 \cdot r}{AB} = 0{,}5\ rad/s,$

$v_C = \omega \cdot BC = 20\ cm/s.$ Direcţia vectorului $\vec{v}_C$ este perpendiculară pe AB. Întrucît vitezele punctelor C şi D sunt paralele, CIV bielei CD se află la infinit și viteza unghiulară ω_1 a bielei CD este egală cu zero.

Deci, $\vec{v}_D = \vec{v}_C$ şi $v_D = 20\ cm/s.$

Răspuns: $\omega = 0{,}5\ rad/s,$ $\omega_1 = 0\ rad/s,$ $v_D = 20\ cm/s.$

Spre deosebire de mişcarea de rotaţie, în mişcarea plană CIV-ul îşi schimbă poziţia pe plan.

DETERMINAREA VITEZEI UNGHIULARE A CORPULUI AFLAT ÎN MIŞCARE PLANĂ

1) Dacă se cunoaște ecuația mișcării de rotație $\varphi = \varphi(t)$ a corpului rigid aflat în mișcare plană, atunci viteza unghiulară $\omega_z = \dot{\varphi}$.

Dacă $\dot{\varphi} > 0$, atunci rotirea este în sens opus acelor de ceasornic, iar dacă $\dot{\varphi} < 0$, atunci rotirea este în sens orar.

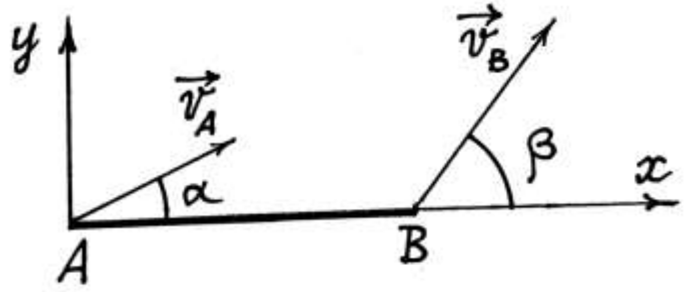

Fig. 13

2) Dacă se știe viteza unui punct al corpului v_A și distanța de la punctul *A* pînă la centrul instantaneu al vitezelor *P*, adică *AP*, atunci viteza unghiulară a corpului

$$\omega = v_A / AP.$$

3) Viteza unghiulară ω poate fi calculată din formula $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$.

$$\omega = \frac{|v_B - v_A|}{AB}.$$

4) Dacă sunt date v_A, v_B, α, β și *AB* (Fig.13) atunci proiectînd pe axele *Ax* și *Ay*, obținem

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha,$$
$$v_B \sin\beta = v_A \sin\alpha + \omega \cdot AB.$$

$$\omega = \frac{v_B \sin\beta - v_A \sin\alpha}{AB} = \frac{v_A \sin(\beta - \alpha)}{AB \cdot \cos\beta}.$$

Dacă $\beta > \alpha$ atunci $\omega_z > 0$, iar dacă $\beta < \alpha$ atunci $\omega_z < 0$.

Bibliografie

1. Butenin N. V. I. L. Lunţ, D. R. Merkin Curs de mecanică teoretică. Vol. 1, 2. Chişinău 1993.
2. Caraganciu V. M. Colpajiu, M. Ţopa Mecanica teoretică. Chişinău 1994
3. I. V. Meşcerskii. Culegere de probleme la MT, Chişinău, 1991.
4. Caraganciu V. MT, Compendiu şi probleme, 2008
5. С. М. Тарг Краткий курс теоретической механики. Наука, Москва, 1967
6. V. Szolga. Mecanica teoretică. Vol. 1. Statica, Divers-press, Bucureşti, 1994

PROBLEMĂ

Mecanismul plan constă din barele 1 și 2, cursoarele A și B și o roată cu două trepte, legate între ele prin articulații cilindrice. Lungimile barelor sunt l_1 și l_2, razele roții – r și R. Poziția mecanismului se determină prin unghiurile α și β, iar al punctului M - prin unghiul γ. Direcțiile și sensurile vitezei și accelerației cursorului A sînt indicate în figură. De determinat viteza cursorului B, viteza punctului M al roții, viteza unghiulară și accelerația unghiulară a barei AB.

Cursoarele se mișcă în ghidaje orizontale sau verticale, roata se rostogolește fără alunecare pe o tijă orizontală.