UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

FACULTATEA CIM
DEPARTAMENTUL MECANICA TEORETICĂ

ION BALMUŞ
ANATOLIE CASIAN
GHEORGHE COMAN
VALERIU MIHAILOV
VASILE RUSU
IONEL SANDULEAC

LUCRĂRI DE LABORATOR LA MECANICĂ

realizate în MATLAB

Chişinău
U.T.M.
2018

Prezenta lucrare didactică conţine o expunere pe scurt a materialului, necesar pentru a aplica pachetul MATLAB, şi exerciţii de antrenament în acest sens (Lucrările de laborator nr.1 şi nr.2 - calculul expresiilor aritmetice, utilizarea masivelor unidimensionale şi bidimensionale, construirea graficelor). Este expus pe scurt şi materialul teoretic pentru a efectua cinci lucrări de laborator la mecanică în pachetul MATLAB (Lucrările de laborator nr.3 - nr.7:cinematica punctului; compunerea oscilaţiilor armonice;cinematica rigidului; oscilaţiile rectilinii ale punctului material; dinamica punctului material;). Sarcinile lucrărilor de laborator sunt prezentate în 30 de variante. În prezenta lucrare sunt 5 anexe, inclusiv sarcinile lucrărilor de laborator în limba rusă. Studentul primeşte numărul variantei de la profesor pentru toate şapte lucrări de laborator. După efectuarea lucrării studentul îndeplineşte Raportul despre lucrarea respectivă. Raportul trebuie oformat pe foi A4 cu chenar la 5 mm de la margine sus, jos şi în dreapta şi 20 mm în stânga, ca documentaţie tehnică. Dacă imprimanta nu acceptă astfel de margini, se admit, ca excepţie, foi A4 cu chenar la 10 mm de la margine sus, jos şi în dreapta şi 20 mm în stânga. Foaia de titlu a Raportului este indicată de profesor conform Anexei 1 sau 2. Raportul se prezintă pentru susţinere la lucrarea de laborator următoare. După susţinerea ultimei lucrări studentul prezintă profesorului rapoartele despre toate lucrările în ansamblu, prinse cu o clamă. Ele se păstrează la departament timp de un an.

Lucrările de laborator sunt destinate studenţilor de la Facultatea Calculatoare, Informatică şi Microelectronică.

Autorii: conf. univ., dr. Ion Balmuş
prof. univ., dr. hab. Anatolie Casian
conf. univ., dr.Gheorghe Coman
lector univ. Valeriu Mihailov
conf. univ., dr.Vasile Rusu
conf. univ., dr.Ionel Sanduleac
Redactor responsabil: conf. univ., dr.Gheorghe Coman
Recenzent: conf. univ. dr. Mircea Colpajiu

Cuprinsul

Introducere

Ce este MATLAB

În timpul de faţă MATLAB este unul din cele mai puternice din toate pachetele universale de calcul. Inginerii şi savanţii aplică MATLAB pentru rezolvarea problemelor din diferite domenii de aplicare: achiziţionarea, analizarea şi vizualizarea datelor; prelucrarea semnalelor şi a imaginilor; cercetarea şi calcularea diferitor procese tehnice; modelarea, simularea şi optimizarea sistemelor tehnice; dezvoltarea aplicaţiilor, incluzând interfeţele grafice etc.

MATLAB este un sistem interactiv cu un limbaj de performanţă înaltă foarte efectiv pentru calcule tehnice a cărui *element informaţional de bază este matricea*. Denumirea de MATLAB provine de la Matrix Laboratory.

MATLAB s-a dezvoltat pe parcursul anilor cu adăugările a mai multor utilizatori. La universităţi pachetul MATLAB se foloseşte ca un instrument standard de iniţiere şi cursuri avansate în matematică. În industrie MATLAB este instrumentul cu o capacitate înaltă pentru cercetare, dezvoltare şi analiză.

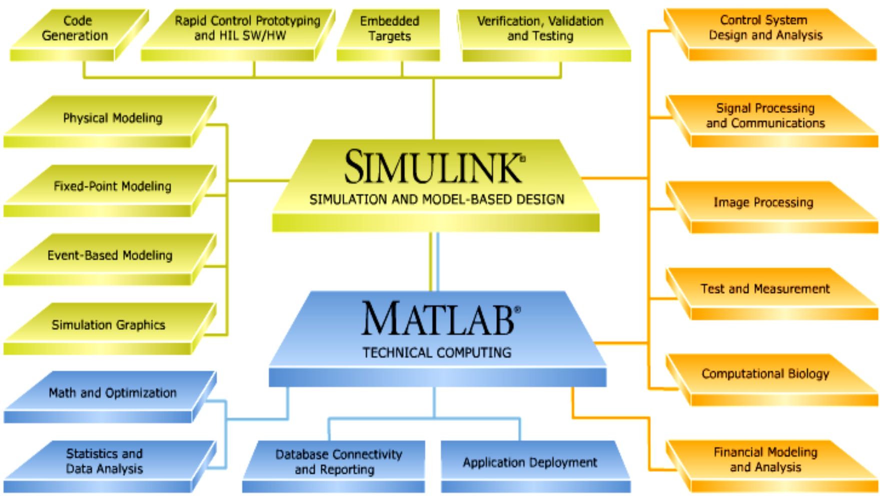


Fig. I.1. Componenţa sistemului MATLAB

Sistemul MATLAB constă din 5 părţi principale:

Mediul de dezvoltare – este un set de utilităţi cu facilităţi care ajută să folosim funcţiile şi fişierele din MATLAB. Multe din aceste utilităţi au interfaţă grafică. Ele includ fereastra de lucru (MATLAB desktop), fereastra liniei de comandă (Command window), fereastra istoriei comenzilor (Command history), editorul intern, software pentru corecţia programelor (debugger), Ajutorul şi navigatorul lui (help), Spaţiul de lucru a sesiunii (Workspace), fişierele şi drumul de căutare (Curent directory).

Biblioteca cu funcţiile matematice conţine o vastă colecţie de algoritmi de calcul de la funcţiile elementare - suma, sinus, cosinus, etc, până la funcţiile sofisticate - matrice inverse, funcţiile Bessel, transformarea rapidă Furier etc.

Limbajul MATLAB este limbaj de performanţă înaltă cu funcţii, structuri, date de intrare şi ieşire, programarea orientată pe obiecte APOO. El permite atât crearea rapidă a programelor mici, cât şi crearea programelor şi aplicaţiilor mari şi complexe.

Grafica. MATLAB are facilităţi extensive pentru vizualizarea vectorilor şi matricelor ca grafice. Grafica include funcţii pentru vizualizarea datelor în formă bidimensională şi tridimensională, prelucrarea imaginilor, animaţie, grafica pentru prezentaţii. Totodată ea include funcţii care permit setarea completă a graficelor, precum şi crearea interfeţelor grafice în aplicaţiile MATLAB.

Interfaţa Externă (External Interfaces - API). Aceasta este o bibliotecă care vă permite a scrie programe în limbajele C şi Fortran care interacţionează cu MATLAB. Ea include facilităţi pentru apelare la funcţiile şi procedurile din MATLAB (dynamic linking), apelarea la MATLAB ca la nucleul de calcul, pentru citirea şi scrierea fişierelor MAT etc.

Pornirea sistemului MATLAB şi lucrul în regim de dialog

Pachetul MATLAB se lansează din meniului principal, apăsând pe iconiţa MATLAB (de obicei Start -> Programs -> Programming). Sistemul este gata de a face calcule în *regimul de comandă*. Fereastra de bază iniţială deschisă complet este indicată pe Fig. I.2.

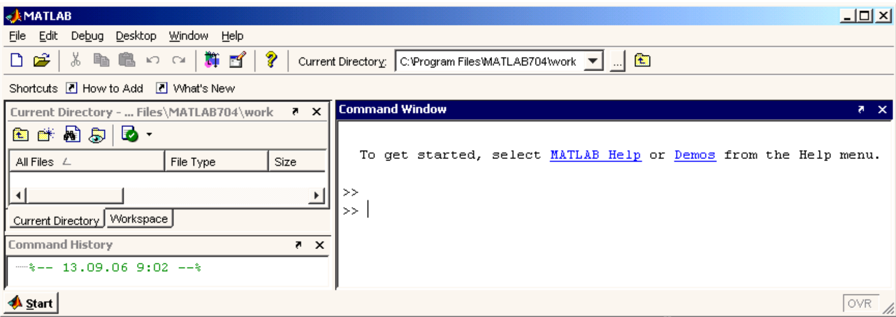


Fig.I.2. Fereastra principală iniţială a sistemului MATLAB

În partea dreaptă avem fereastra “Command Window”, stângă sus avem fereastra “Launch Pad” cu “Workspace” şi stângă jos avem fereastra “Command History”.

Uneori MATLAB se lansează numai cu o fereastra activă, de exemplu “Command History”.

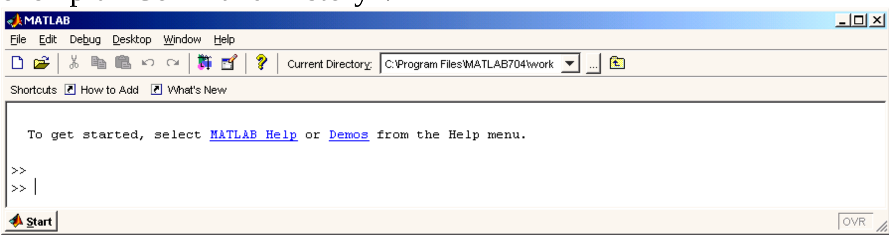
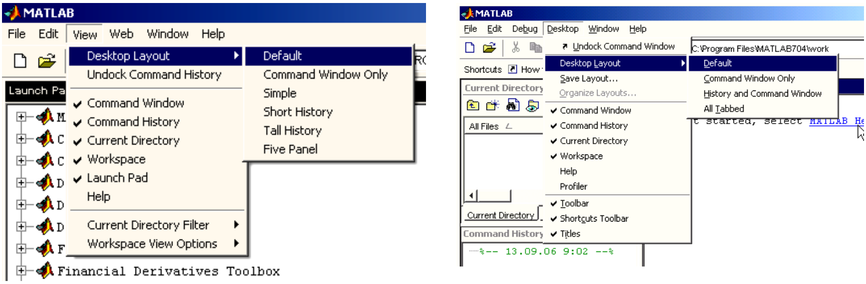


Fig.I.3. Sistemului MATLAB numai cu fereastra “Command History” activă

Pentru a făcea vizibile şi restul ferestrelor este nevoie de a seta vizibilitatea “default”



a) Matlab 6 b) Matlab 7

Fig.I.4. Setarea vizibilităţii tuturor ferestrelor:

Programele pot fi redactate intr-un editor de texte şi pe urmă copiat în rândul de comandă folosind Clipboard-ul. Exemplele din prezenta lucrare servesc pentru antrenare în aplicările MATLAB. În versiunea 6.1 era posibil copierea chiar şi cu simbolurile rândului de introducere “>>” – sistemul automat le v-a omite, iar în versiunile mai mari sistemul nu le omite şi dă eroare.

Care editor de folosit? Editorul intern a MATLAB, Notepad, MS Word, redactorul intern al NORTON Comander sau FAR Manager. Însă există diferenţe intre ele. MS Word este un redactor mai sofisticat şi ceea ce vedem noi pe ecran nu tot timpul v-a înţelege MATLAB, pe când celelalte editoare enumerate mai sus sunt editoare simple. Exemplul de mai jos pare simplu, însă la inserare din MS Word în MATLAB v-a da trei greşeli (acest exemplu v-a fi analizat în capitolul 1.10).

» x=10 – 2 ^ 3

Totuşi cel mai comod editor pentru MATLAB este redactorul intern (incorporat) al lui, deoarece el are aceleaşi facilităţi ca şi linia de comanda, plus avantajele unui translator – executarea pas cu pas, setarea punctelor de stopare a programului etc.

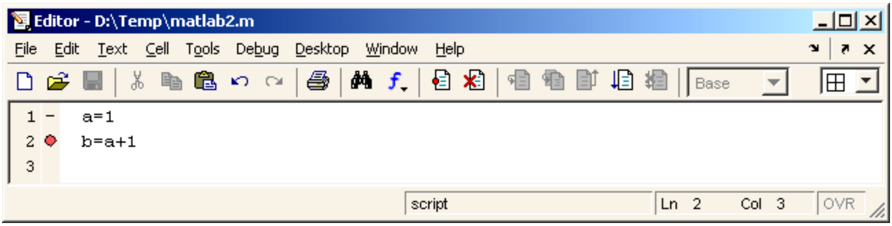


Fig.I.5. Fereastra editorului intern a MATLAB

Unicul neajuns este că erorile apar numai în fereastra liniei de comandă.

Pentru lansarea Editorului intern din MATLAB este nevoie de a face clic pe butonul ”New M-file” pe panelul de instrumente a mediului de lucru sau de selectat meniul ”*File->New-> M-file*”. Pe ecran va apărea fereastra redactorului.

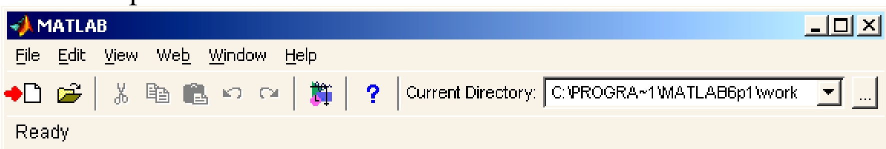


Fig.I.6. Butonul de lansare a editorului intern a MATLAB

Sfaturi practice.

Exemplele din lucrarea de laborator nr.1 e preferabil să le încercaţi din linia de comandă pentru a vedea şi a înlătura erorile, iar restul lucrărilor - să folosiţi redactorul intern.

Lucrarea nr.1. Elemente ale sistemului MATLAB

1.1. Comenzile de redactare a rândului

Când se lucrează cu MATLAB în regim de comandă, se aplică comenzile de redactare a rândului, indicate în tabelul 1.1.

Tabelul 1.1

Comenzile de redactare a rândului în MATLAB.

Tasta	Combinaţia de taste	Destinare

↑	Ctrl+P	Răsfoirea comenzilor precedente (în sus) pentru includerea în rândul de introducere
↓	Ctrl+N	Răsfoirea comenzilor următoare (în jos) pentru includerea în rândul de introducere
Ctrl+Home		Deplasarea cursorului la începutul ferestrei Command Window
Ctrl+End		Deplasarea cursorului la sfârşitul ferestrei Command Window
←	Ctrl+B	Deplasarea cursorului în stânga la un simbol
→	Ctrl+F	Deplasarea cursorului în dreapta la un simbol
Ctrl+←		Deplasarea cursorului în stânga la un cuvânt
Ctrl+→		Deplasarea cursorului în dreapta la un cuvânt
Home	Ctrl+A	Deplasarea cursorului la începutul rândului de comandă
End	Ctrl+E	Deplasarea cursorului la sfârşitul rândului de comandă
Esc	Ctrl+U	Curăţirea rândului de introducere
Delete	Ctrl+D	Ştergerea simbolului la dreapta de cursor
Backspace	Ctrl+H	Ştergerea simbolului la stânga de cursor
	Ctrl+K	Ştergerea până la sfârşitul rândului
Ins		Activarea/dezactivarea regimului de includere
Shift+Home		Selectarea până la începutul rândului
Shift+End		Selectarea pana la sfârşitul rândului

PgUp		Răsfoirea foilor sesiunii în sus
PgDn		Răsfoirea foilor sesiunii în jos
Enter		Executarea comenzii. Daca există ceva selectat in fereastra command windows textul selectat este adăugat la rândul de comandă înainte de executare

Repetarea executării rândului în linia de comanda e posibilă prin două metode:

1) răsfoirea comenzilor în linia de comandă şi apăsând <ENTER>;
2) găsirea comenzii în fereastra ”Command History” şi făcând dublu clic cu mausul pe ea.

Ţineţi minte:

Fereastra “Command Windows” oferă posibilitatea de redactare numai a ultimului rând de comandă. Să nu vă mire faptul, că cursorul î-l puteţi muta în rândurile precedente şi nu le puteţi redacta.

1.2. Comenzile de dirijare a ferestrei în regimul de comandă

clc - curăţă ecranul şi pune cursorul în colţul de sus din stânga a ecranului gol.
home - întoarce cursorul în colţul de sus din stânga a ferestrei.
echo on – deschide regimul de scoatere pe ecran a codului sursă.
echo on – închide regimul de scoatere pe ecran a codului sursă.
echo <file_name> on – deschide regimul de scoatere la ecran a codului sursă a fişierului <file_name>.

echo <file_name> off – închide regimul de scoatere la ecran a codului sursă a fişierului <file_name>.

echo <file_name> - schimbă regimul de scoatere la ecran la opus.

echo on all – deschide regimul de scoatere la ecran a codului sursă a tuturor *m*-fişierelor.

echo off all – închide regimul de scoatere la ecran a codului sursă a tuturor *m*-fişierelor.

more on - deschide regimul de scoatere la ecran a rezultatelor pe pagini. Se foloseşte la vizionarea rezultatelor voluminoase.

more off - închide regimul de scoatere la ecran pe pagini.

1.3. Regimul de comandă

Seansul de lucru cu MATLAB se numeşte sesiune (session). Sesiunea, în realitate, este un document curent, care reflectă lucrul utilizatorului cu sistemul MATLAB. În ea sunt rânduri de introducere (cu simbolul >>), de extragere (cu simbolul *ans*=) şi de informaţii despre erori (??? *Error*).

MATLAB permite de a efectua calcule foarte complicate în regimul de calcule directe, adică fără a pregăti o programă. Utilizatorul culege cu tastatura expresia respectivă, o redactează (dacă este necesar) în rândul de comandă şi apasă <ENTER>. Pe ecran apare rezultatul în rândul *ans*= sau *x*=.

În cazul când expresia matematică care trebuie să fie introdusă este foarte lungă, o parte din ea poate fi trecută într-un rând nou cu ajutorul semnului ... (3 sau mai multe puncte), de exemplu

```
>> X = 3 + 2 - 4 + 5 +...
   7 +1 + 2 - 3
```

Semnul operaţiei se indică înaintea celor 3 puncte, şi se tastează <ENTER>. Această metodă e comodă pentru a păstra întregul document în limitele ferestrei deschise. În general, într-un rând pot fi 4096 de simboluri.

În cazul când avem nevoie într-un rând să scriem două expresii le scriem prin virgulă, de exemplu

```
>> a=3, 25*(0.7-3.5/5.1)+2.3^3
a =
      3
ans =
      12.5101
```

În cazul dat s-au calculat două expresii : a=3 şi 25*(0.7-3.5/5.1)+2.3^3.

Pentru a opri apariţia rezultatului expresiile trebuie să se termine cu punct şi virgulă :

```
>> x = 0.2;
>> y = -3.9;
>> a = sin(4/3*pi*x)+exp(0.1*y);
>> b = cos(4/3*pi*x)+exp(0.1*y);
>> c = sqrt(a/b)+(a/b) ^ (1/3)
c =
      2.0451
```

1.4. Expresiile aritmetice

Ca şi alte limbaje de programare MATLAB permite calcularea expresiilor matematice, dar în comparaţie cu majoritatea limbajelor, aceste expresii implică la calculare matricea întreagă.

Expresiile matematice în MATLAB sunt formate din numere, semnele operaţiilor aritmetice, variabile şi funcţii introduse.

1.4.1. Numerele

Pentru numere MATLAB foloseşte notaţia convenţională decimală, în faţă cu semnul plus sau minus iar partea zecimală a numărului se desparte prin punct. Unele exemple a numerelor:

3 -99 0.0001 -9.6397238

Simbolul ***e*** serveşte pentru a scrie numerele în formă exponenţială, adică indică puterea numărului zece. De exemplu, numerele 0.00215 şi 2.15*e*-3 sunt echivalente. Numerele complexe se scriu cu ajutorul literei ***i*** sau ***j***.

```
>>2.15e-3
ans = 0.00215
>> 5*(2.2+3.9i)+0.8
ans = 11.8000+19.5000i
```

Toate numerele sunt stocate în spaţiul de lucru folosind formatul lung specificat de IEEE - standardul virgulei mobile.

1.4.2. Operaţiile aritmetice

Expresiile matematice folosesc următoarele operaţii aritmetice şi regulile lor:

+	Adunarea;
-	Scăderea;
*	Înmulţirea;
/	Împărţirea;
\	Împărţirea la stânga (descrisă în "Matrices and Linear Algebra" în documentaţia MATLAB);
^	ridicarea la putere;
'	Transpunerea matricei (Complex conjugate transpose);
( )	Specificarea priorităţii de evaluare.

Ţineţi minte:

Expresiile matematice se calculă conform regulilor de prioritate a operaţiilor şi de la stânga la dreapta:

a*b/c este echivalent cu $\frac{a*b}{c}$,

însă

a/b*c este echivalent cu $\frac{a}{b}*c$.

Exemplu de împărţirea la stânga:

```
>>  1\2/5
ans = 0.4000
>> 1/2\5
ans = 10
```

În primul exemplu ”1\2/5” se execută în felul următor - 2/1 şi rezultatul se împarte la 5, iar în exemplul doi ”1/2\5” – 1 se împarte la 2, iar 5 se împarte la rezultat obţinut.

1.5. Variabilele

MATLAB nu necesită declararea tipului sau dimensiunilor variabilelor. Când MATLAB are nevoie de o variabilă nouă, programul automat creează variabila şi alocă memorie. Dacă variabila deja există, MATLAB schimbă conţinutul ei şi, dacă e necesar, alocă spaţiu nou. Ca semn de atribuire a valorii sau a expresiei se foloseşte ”=” şi rezultatul apare direct în fereastra de comandă, de exemplu:

```
>> num_students = 25
num_students = 25
```

creează o matrice 1x1 cu numele *num_students* şi-i atribuie valoarea 25 în singurul ei element.

Ţineţi minte:

Numele variabilei se începe cu o literă, urmat de un număr arbitrar de litere, cifre sau semnul de subliniere "_". În numele variabilei spaţiul (locul gol) nu se admite. MATLAB foloseşte doar primele 31 de caractere din numele variabilei.

Trebuie de ţinut cont că MATLAB este "case sensitive" - *literele majuscule şi minuscule se deosebesc*. Variabilele "*A*" şi "*a*" nu sunt aceleaşi.

La calcularea unei expresii din rândul de comandă răspunsul se înscrie în variabilă redefinită specială ***ans*** (din engleză "answer" - răspuns):

```
>> 2.15+1.07
ans =3.2200
>> ans-0.22
ans =3.0000
```

Valoarea *ans* se va schimba după calculul expresiei următoare.

1.5.1. Vizualizarea variabilelor

În orişice moment poate fi extrasă valoarea variabilei în fereastra de comandă. Pentru aceasta trebuie de cules numele variabilei în rândul de comandă şi de apăsat <ENTER>, ori de utilizat funcţia ***disp*** (din engleză "display" – a vizualiza):

```
>> a
a =
      -1.34
>> disp(a)
      -1.34
```

Pentru a opri imprimarea la ecran a valorii expresiei sau variabilei la sfârşitul ei se pune "**;**"

Vizionarea listei variabilelor în mediul de lucru se efectuează cu ajutorul comenzii ***whos*** (din engleză "whos" – a cui). Presupunem, că variabilelor *a* şi *b* le-au fost atribuite valori. Chemaţi comanda *whos* indicând în calitate de parametru a comenzii numele variabilelor. În fereastra de comandă apare tabelul prezentat mai jos.

```
>> b=2.98+3.86i;
>> whos a b
Name        Size        Bytes       Class
a           1x1         8           double array
b           1x1         16          array
(complex)
Crand total is 2 elements using 24 bytes
```

În coloana *Class* este indicat tipul variabilei, în *Bytes* - numărul de biţi, pentru a păstra valoarea, iar *Size* conţine informaţia despre dimensiune. După tabel e plasat un rând cu numărul total al volumului de memorie în octeţi pe care le ocupă toate variabilele.

1.5.2. Ştergerea determinării variabilelor

În memoria calculatorului variabilele ocupă un anumit loc, numit *spaţiu de lucru* (workspace). Pentru a curăţi spaţiul de lucru se utilizează funcţia *clear* în diferite forme, de exemplu:

- *clear* - ştergerea determinării tuturor variabilelor
- *clear x*- ştergerea determinării unei variabile (în cazul dat *x*)
- *clear a b c* - ştergerea determinării câtorva variabile (în cazul dat *a*, *b c*).

Variabila ştearsă devine nedeterminată. Folosirea variabilelor nedeterminate nu se permite şi aşa încercări vor da anunţuri de eroare. Încercaţi să experimentaţi cu această funcţie împreună cu comanda *whos* :

```
>> whos
>> clear a b
>> whos
```

```
>> clear
>> whos
```

1.5.2. Fereastra Workspace

În fereastra Workspace (v. fig. 1.7) se afla lista tuturor variabilelor în formă de tabel ca şi la comanda *whos* cu o singură diferenţă – în ea este si un câmp cu valoarea variabilei.

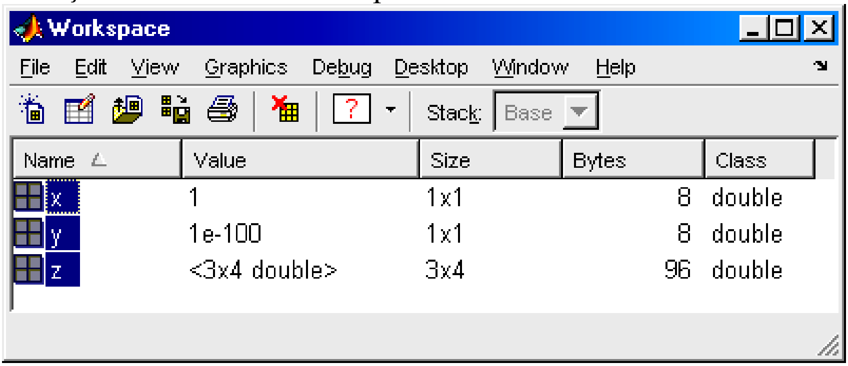


Fig. 1.7. Fereastra Workspace

Din fereastra Workspace e posibil:

1) de redactat valoarea variabilei: dacă variabila e un simplu număr se face un clic pe valoarea ei, iar dacă e matrice făcând dublu clic pe variabilă se deschide un tabel cu valorile elementelor care pot fi redactate;
2) de schimbat numele variabilei (de exemplu - ca să nu pornim programul de la început, dacă am greşit numele variabilei în majuscule-minuscule);
3) de duplicat variabila cu valoarea ei;
4) de şters o singură variabilă sau pe toate odată (analogic *clear*);
5) de creat grafice de la valorile variabilelor.

1.6. Formatul numerelor

MATLAB automat trece în domeniul numerelor complexe continuând calculele. Comanda *format* serveşte pentru stabilirea formatului din rândul de comandă. Poate fi stabilit unul din următoare formate:

short	format scurt cu punct plutitor cu 4 cifre după punctul zecimal (se foloseşte iniţial - default)
long	format lung cu punct plutitor cu 14 cifre după punctul zecimal
short e	format exponenţial cu 4 cifre după punctul zecimal
long e	format exponenţial cu 15 cifre după punctul zecimal
short g	cea mai bună prezentare a datelor sau în formatul short sau în short e
hex	prezentarea numărului prin 16 cifre
+	datele pozitive şi negative se arată prin semnele „+” şi „-„ dar cele nule- prin goluri.
bank	format pentru scoaterea sumelor băneşti cu două semne după punctul zecimal
rat	numerele reale se prezintă aproximativ ca raportul a două numere mici întregi

Independent de formatul stabilit toate calculele se fac cu precizie dublă, prin urmare după schimbul formatului de la *short* la *long* nu se cere de găsit din nou valoarea variabilelor. Este suficient de a scoate din nou valorile lor în fereastra de comandă.

```
>>a=1/3333; b=1/4; c=0.123456789;
>> format short; a, b, c
a =  3.0003e-004
b =  0.2500
c =  0.1235
>> format long; a, b, c
a =  3.000300030003001e-004
b =  0.25000000000000
c =  0.12345678900000
>> format hex; a, b, c
a =  3f33a9ab0cfb01ec
b =  3fd0000000000000
c =  3fbf9add3739635f
```

```
>> format +; a
a =+
>> format bank; a, b, c
a =  0.00
b =  0.25
c =  0.12
>> format rat; a, b, c
a =  1/3333
b =  1/4
c =  10/81
```

MATLAB admite două metode de vizualizare a rezultatelor în fereastra de comandă:

compact rândurile cu rezultatele se scot la rând.

loose rândurile cu rezultate se despart prin rând gol.

Experimentaţi cu aceste moduri de sinestătător, vizualizând variabilele *a*, *b* şi *c*.

1.7. Funcţiile matematice

MATLAB are un număr mare de funcţii matematice introduse. Unele din ele sunt prezentate în tabelul 1.7. Lista completă a tuturor funcţiilor matematice elementare poate fi obţinută, culegând în rândul de comandă *help elfun* (din engleză "elfun" – "elementary functions" – funcţii elementare). Pentru a obţine informaţia amănunţită despre sintaxa unei funcţii culegeţi şi executaţi în linia de comandă *help <numele funcţiei>*.

Tabelul 1.7

Funcţiile matematice principale

Funcţiile trigonometrice (argumentul se dă în radiani)	
sin, cos, tan, cot	Sinus, cosinus, tangenta, şi cotangenta
sec, csc	Secanta, cosecanta
Funcţiile trigonometrice inverse (rezultatul se calculează în radiani)	

asin, acos, atan, acot	Arcsinus, arccosinus, arctangenta şi arccotangentă
asec, acsc	Arcsecanta, arccosecanta
Funcţiile hiperbolice	
sinh, cosh, tanh, coth	Sinus, cosinus, tangenta şi cotangenta hiperbolice
sech, csch	Secantă şi cosecantă hiperbolice
asinh, acosh, atanh, acoth	Arcsinus, arccosinus, arctangentă şi arccotangentă;
Funcţie exponenţială, logaritmii, funcţiile de putere	
exp	Funcţia exponenţială
log, log2, log10	Logaritm natural, logaritmii în baza 2 şi 10
pow2	Ridicarea la pătrat
sqrt, nthroot	Rădăcină pătrată, rădăcina de ordinul N
Modul, semnul şi funcţiile pentru lucrul cu numere complexe	
abs, sign	Modulul şi semnul numărului
conj, imag, real	Complex-conjugată, partea imaginară şi reală
Funcţii speciale a constantelor cel mai des folosite	
pi	3.14159265...
i, *j*	unitatea imaginară
eps	eroarea relativă, $\varepsilon = 2^{-52}$
realmin	cel mai mic număr real, 2^{-1022}
realmax	cel mai mare număr real, $(2-\varepsilon)\cdot 2^{1023}$
Inf	Infinit
NaN	Nu este număr (Not-a-number)

Ţineţi minte:

La executarea funcţiei matematice argumentul se scrie în paranteze rotunde imediat după numele funcţiei.

Fie, de exemplu, că trebuie de găsit valoarea expresiei de mai jos când x = 0.2 şi y = -3.9:

$$c=\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{4}{3}\pi x\right)+e^{0.1y}}{\cos\left(\frac{4}{3}\pi x\right)+e^{0.1y}}}+\sqrt[3]{\frac{\sin\left(\frac{4}{3}\pi x\right)+e^{0.1y}}{\cos\left(\frac{4}{3}\pi x\right)+e^{0.1y}}}$$

În pachetul MATLAB vom avea:

```
>> x=0.2;
>> y= -3.9;
>> c=sqrt((sin(4/3*pi*x)+exp(0.1*y))/(cos(4/3*pi*x)+...
exp(0.1*y)))+((sin(4/3*pi*x)+exp(0.1*y))/(cos(4/3*pi*x)+...
exp(0.1*y)))^(1/3)
c =
     2.0451
```

Este mai simplu de a rezolva această problemă, aplicând variabilele intermediare:

```
>> x=0.2;
>> y= -3.9;
>> a= sin(4/3*pi*x)+exp(0.1*y);
>> b= cos(4/3*pi*x)+exp(0.1*y);
>> c=sqrt(a/b)+(a/b) ^ (1/3)
c =
     2.0451
```

1.8. Vectorii şi matricele

În MATLAB matricea este un masiv rectangular de numere. Masivele sunt unul din cele mai răspândite procedee de păstrare a datelor şi se folosesc în toate limbajele de programare. Sistemul MATLAB operează cu matrice m×n. Scalarul este o matrice 1×1. În MATLAB masivul unidimensional poate fi vector-rând sau vector-coloană. Vectorul este o matrice de tipul 1×n. MATLAB are şi alte forme de a stocare a datelor, atât numerice cât şi non-numerice, dar ele sunt cazuri particulare a matricelor.

Ţineţi minte:

Avantajele MATLAB-ului:

- în timp, ce unele limbaje de programare lucrează doar cu câte un element din matrice, MATLAB permite să lucrăm cu întreaga matrice repede şi uşor.

- nu este necesar să declarăm dimensiunile matricelor - ele pot fi redimensionate pe parcursul lucrului.

1.8.1. Matricele

Pentru a introduce orice matrice trebuie de ţinut cont de regulile următoare:

- de separat elementele unui rând prin virgulă sau spaţiu (lacune)
- de folosit ”;” pentru a indica sfârşitul fiecărui rând
- de luat toată lista de elemente în paranteze pătrate

```
>> a=[1 2 3 4 5 6 7 8 9];
a =
     1     2     3     4     5     6     7     8     9
>> b=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9; 10 11 12];
b =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
    10    11    12
>> c=[1 4 7 10; 2 5 8 11; 3 6 9 12]
c =
     1     4     7    10
     2     5     8    11
     3     6     9    12
```

Vectorii sunt cazuri particulare a matricelor cu o singură linie sau cu o singură coloană:

```
>> vl = [7 3 5 9]
```

```
>> vl = [7,3,5,9]
>> vc = [9;5;3;7]
```

1.8.2. Introducerea matricelor

Matricea (vectorul) se poate de introdus în câteva metode:

- introducerea explicită a elementelor
- citirea matricei dintr-un fişier cu date
- generarea matricei folosind operatorul colon
- generarea matricei folosind o funcţie internă din MATLAB
- crearea matricei cu funcţia personală din M-fişier

Introducerea explicită a elementelor matricelor de dimensiuni mici este comodă din rândul de comandă. Există mai multe procedee de a introduce o matrice. De exemplu, matricea

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

```
>> c=[1 4 7 10; 2 5 8 11; 3 6 9 12]
>> % sau c=[1,4,7,10;  2,5,8,11;  3,6,9,12]
c =
    1     4     7     10
    2     5     8     11
    3     6     9     12
```

Ea poate fi introdusă din rândul de comandă culegând expresia c=[1□4□7□10 şi apăsăm <ENTER>. Cursorul se deplasează în rândul următor (simbolul >> nu apare). Elementele fiecărui următor rând al matricei se culeg şi sfârşitul fiecărui rând se termină cu apăsarea tastei <ENTER>. După introducerea ultimului rând la urmă se pune paranteza pătrată de închidere:

```
>> c=[1 4 7 10
2 5 8 11
3 6 9 12]
```

Alt procedeu constă în aceea, că matricea poate fi introdusă şi prin combinarea a mai multor matrice.

Matricea poate fi privită ca un vector-coloană, fiecare element al căruia este un rând al matricei:

$$c = \begin{bmatrix} [1 \quad 4 \quad 7 \quad 10] \\ [2 \quad 5 \quad 8 \quad 11] \\ [3 \quad 6 \quad 9 \quad 12] \end{bmatrix}$$

```
>> c=[[1 4 7 10]; [2 5 8 11]; [3 6 9 12]]
```

Matricea poate fi considerată şi ca un vector-rând fiecare element al căruia este coloana matricei:

$$c = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

```
>> c=[[1;2;3] [4;5;6] [7;8;9] [10;11;12]]
```

Matricea poate fi introdusă şi cu ajutorul la alte matrice:

```
>> c=[[1 4 7 10 ; 2 5 8 11]; [3 6 9 12]]
>> c=[ [[1;2;3] [4;5;6]] [7;8;9] [10;11;12] ]
>> c=[ [1 4; 2 5;3 6] [7;8;9] [10;11;12]]
```

Matricele pot fi introduse prin metode mixte principalul e ca toate elementele să fie introduse. Exemplu:

$$c = \begin{bmatrix} [1 \quad 4] & 7 & 10 \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

```
>> c=[ [1 4] 7 10; [2;3] [5 8; 6 9] [11;12]]
```

Exemple. Fie, că avem de introdus vectori-coloană şi vectori-rând

$$c1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -3.9 \\ 4.6 \end{bmatrix} \qquad c2 = \begin{bmatrix} 7.6 \\ 0.1 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$$r1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & -3.7 & 8.1 \end{bmatrix}$$

$$r2 = \begin{bmatrix} 5.2 & 9.7 & 3.4 & -5.7 \end{bmatrix}$$

În MATLAB în linia de comandă va fi nevoie de scris următoarele rânduri

```
>> c1=[0.2; -3.9; 4.6];
>> c2=[7.6; 0.1; 2.5];
>> r1=[0.1 0.5 -3.7 8.1];
>> r2=[5.2 9.7 3.4 -0.2];
```

1.8.3. Operatorul colon

Operatorul colon ":" este un operator important în MATLAB. El poate fi în câteva forme diferite.

Formatul de bază este <*valoarea iniţială*>:< *valoarea finală* > rezultatul căruia este un vector elementele căruia sunt de la *valoarea iniţială* până la *valoarea finală*.

Următoarea expresia este un vector rând care conţine numerele întregi de la 1 la 10:

```
>> a = 1:9
a =    1    2    3    4    5    6    7    8    9
```

Deoarece rezultatul operatorului colon este un vector următoarea expresie este echivalentă cu cea precedentă:

```
>> a = [1:9]
a =    1    2    3    4    5    6    7    8    9
```

Aceleaşi matrice, arătate anterior, pot fi introduse în felul următor

```
>> a=[1:9]; b=[1:3;4:6;7:9;10:12];
>> c=[[1:3]` [4:6]` [7:9]` [10:12]`];
```

Pentru a obţine o incrementare neunitară, trebuie de specificat pasul. Formatul este:

<valoarea iniţială>:*<valoarea pasului>*:*< valoarea finală >*

De exemplu:

```
>> 100:-7:50
100   93   86   79   72   65   58   51
>> 0:pi/4:pi
0   0.7854   1.5708   2.3562   3.1416
```

1.8.4. Generarea matricelor

ZEROS - generarea unei matrice elementele căreia este 0. Sintaxa este *zeros(m,n)* unde *m* şi *n* sunt dimensiunile matricei rezultante, iar dacă *m=n* atunci *zeros(n)* unde *n* este dimensiunea matricei pătrate rezultante. Apelarea la funcţia *zeros* fără argument este un scalar cu valoare 0.

ONES - generarea unei matrice elementele căreia este 1. Sintaxa este *ones(m,n)* unde *m* şi *n* sunt dimensiunile matricei rezultante, iar dacă *m=n* atunci *ones(n)* unde *n* este dimensiunea matricei pătrate rezultante. Apelarea la funcţia *ones* fără argument este un scalar cu valoare 1. Generarea unei matrice elementele căreia vor fi egale cu un număr *k* se execută în felul următor *k*ones(m,n)*

RAND - crearea unei matrice cu elemente aleatorii. Sintaxa este *rand(m,n)* unde m şi n sunt dimensiunile matricei rezultante, iar dacă *m=n* atunci *rand(n)* unde *n* este dimensiunea matricei pătrate rezultante. Apelarea la funcţia *rand* fără argument este un scalar cu valoare aleatorie.

EYE - crearea unei matrice diagonala căreia este egală cu 1 iar restul sunt 0. Sintaxa este *eye(m,n)* unde *m* şi *n* sunt dimensiunile matricei rezultante, iar dacă *m=n* atunci *eye(n)* unde *n* este dimensiunea matricei pătrate rezultante. Apelarea la funcţia *eye* fără argument este un scalar cu valoarea 1.

MAGIC - crearea unei matrice pătrate magice – sumele elementelor fiecărui rând şi fiecărei coloane sunt egale. Sintaxa este *magic(n)* unde *n* este dimensiunea matricei pătrate.

Există şi alte funcţii, aşa ca: *hadamard* – matricea Hadamard, *hilb* - matricea Hilbert, *invhilb* - matricea Hilbert inversa, *pascal* - matricea Pascal, *vander* – matricea Vandermonde, *wilkinson* – matricea Wilkinson's etc.

1.8.5. Apelări la matrice

Pentru accesarea unui element al matricei este nevoie de scris variabila matricei şi în paranteze rotunde de indicat numărul de ordine al elementului necesar, în caz general este *M(y,x)*: unde *M* este numele matricei, x,y este numărul liniei şi numărul coloanei al elementului dat.

```
>> b(2,3)
ans = 6
>> c(3,4)
ans = 12
```

Pentru un vector sintaxa este de *V(n)*, unde *n* este numărul de ordine al elementului necesar, indiferent dacă vectorul este vector-rând sau vector-coloană.

```
>> vl(2)
ans =3
>> vc(2)
ans =5
```

În matricea *M(m,n)* elementul din rândul *i* şi coloana *j* se notează ca *M(i,j)*. De asemenea e posibil de adresat la elementul *M(i,j)* cu un singur index *M(k)* (fig. 1.8). Aceasta este metoda obişnuită de apelare la elementele unui vector rând sau vector coloană, dar, totodată, poate fi aplicată şi la matrice bidimensionale. În aşa caz masivul reiese ca un vector mare format din elementele matricei originale:

(1,1) (1)	(1,2) (2)	(1,3) (3)	...	(1,n-1) (n-1)	(1,n) (n)
(2,1) (1*n+1)	(2,2) (1*n+2)	(2,3) (1*n+3)	...	(2,n-1) (1*n+n-1)	(2,n) (2*n)
...	...	...	M(i,j) M(k)	...	...
(m,1) ((m-1)*n+1)	(m,1) ((m-1)*n+2)	(m,1) ((m-1)*n+3)	...	(m,n-1) ((m-1)*n+n-1)	(m,n) (m*n)

Fig. 1.8. Apelarea la matrice folosind un singur index

unde M(k)=M((i-1)*n+j), 1≤*i*≤m , 1≤*j*≤n , 1≤*k*≤m*n

Adresarea la matrice, folosind operatorul colon, se va referi la o porţiune din matrice. Rezultatul unei astfel de apelări va fi o altă matrice conţinutul căreia vor fi elementele apelate. Aşa dar, adresarea A(*i1:i2 , j1:j2*) se va referi la elementele din coloanele de la *j1* până la *j2* din rândurile de la *i1* până la *i2* inclusiv (fig. 1.9).

(1,1)	(1,2)	...	(1,j1-1)	(1,j1)	(1,j1+1)	...	(1,j2-1)	(1,j2)	(1,j2+1)	...	(1,n-1)	(1,n)
(2,1)	(2,2)	...	(2,j1-1)	(2,j1)	(2,j1+1)	...	(2,j2-1)	(2,j2)	(2,j2+1)	...	(2,n-1)	(2,n)
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
(i1-1,1)	(i1-1,2)	...	(i1-1,j1-1)	(i1-1,j1)	(i1-1,j1+1)	...	(i1-1,j2-1)	(i1-1,j2)	(i1-1,j2+1)	...	(i1-1,n-1)	(i1-1,n)
(i1,1)	(i1,2)	...	(i1,j1-1)	(i1,j1)	(i1,j1+1)	...	(i1,j2-1)	(i1,j2)	(i1,j2+1)	...	(i1,n-1)	(i1,n)
(i1+1,1)	(i1+1,2)	...	(i1+1,j1-1)	(i1+1,j1)	(i1+1,j1+1)	...	(i1+1,j2-1)	(i1+1,j2)	(i1+1,j2+1)	...	(i1+1,n-1)	(i1+1,n)
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
(i2-1,1)	(i2-1,2)	...	(i2-1,j1-1)	(i2-1,j1)	(i2-1,j1+1)	...	(i2-1,j2-1)	(i2-1,j2)	(i2-1,j2+1)	...	(i2-1,n-1)	(i2-1,n)
(i2,1)	(i2,2)	...	(i2,j1-1)	(i2,j1)	(i2,j1+1)	...	(i2,j2-1)	(i2,j2)	(i2,j2+1)	...	(i2,n-1)	(i2,n)
(i2+1,1)	(i2+1,2)	...	(i2+1,j1-1)	(i2+1,j1)	(i2+1,j1+1)	...	(i2+1,j2-1)	(i2+1,j2)	(i2+1,j2+1)	...	(i2+1,n-1)	(i2+1,n)
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
(m,1)	(m,1)	...	(m,j1-1)	(m,j1)	(m,j1+1)	...	(m,j2-1)	(m,j2)	(m,j2+1)	...	(m,n-1)	(m,n)

Fig. 1.9. Rezultatul adresării la matrice A(i1:i2 , j1:j2)

În aşa mod se poate de setat automat o porţiune a matricei cu o valoare anumită:

```
>> d=c; d(1:2,2:3)=0
d =
     1     0     0    10
     2     0     0    11
     3     6     9    12
```

Operatorul colon indicat fără valori referă la toate elementele din rând sau coloană a matricei iar cuvântul cheie "*end*" referă la ultimul rând sau ultima coloană. Exemplu de mai jos va indica elementele din toate rândurile din ultima coloana:

```
>> c(:,end)
ans =
    10
```

```
    11
    12
```

Dacă veţi încerca să apelaţi la un element în afara limitelor matricei veţi primi o eroare:

```
>> a(0),a(10),vl(0),vl(5),vc(0),vc(5),b(0,1),c(4,5)
Index exceeds matrix dimensions.
```

Pe de altă parte, dacă veţi memoriza un element în afara matricei, dimensiunile ei vor creşte până nu va îndestula rezultatul:

```
>> d=c; d(3,5) = 15
d =
    1    4    7    10    0
    2    5    8    11    0
    3    6    9    12    15
```

Pentru rearanjarea coloanelor sau liniilor unei matrice este nevoie la apelare în loc de index de indicat un vector cu lista liniilor sau coloanelor ce trebuie rearanjate:

```
>> c(:,[1 3 2 4])
ans =
    1    7    4    10
    2    8    5    11
    3    9    6    12
>> c([1 3 2],:)
    1    4    7    10
    3    6    9    12
    2    5    8    11
```

Dacă rearanjăm şi coloanele şi liniile concomitent MATLAB mai întâi rearanjează coloanele iar pe urmă liniile:

```
>> c([3 1 2], [2 1 3 4]);     c(:, [2 1 3 4]); ans([3 1 2], :)
ans =
    6    3    9   12
    4    1    7   10
    5    2    8   11
```

1.8.6. Dimensiunile matricei.

Pentru a calcula lungimea vectorului se foloseşte funcţia *length*, iar vectorul se indică ca argument

```
>> length(a)
ans=9
```

Dacă argumentul este o matrice, atunci funcţia *length* va indica dimensiunea maximă dintre numărul de rânduri sau coloane

```
>> length(b)
ans=4
```

Funcţia *size* determină dimensiunile masivului. Ea prezintă rezultatul în formă de vector format din două elemente: primul element este egal cu numărul de rânduri, iar al doilea – cu numărul de coloane

```
>> sc=size(c)
sc =
    3    4
```

Din paragraful precedent ştim, că dacă memorizăm un element în afara matricei, dimensiunile ei vor creşte până nu va îndestula rezultatul:

```
>> d=c; d(3,5) = 15;
>> size(d)
ans =
    3    5
```

Dacă avem nevoie de şters o linie sau coloană este nevoie de egalat această coloană cu un vector nul:

```
>> d(:,5)=[], size(d)
d =
     1     4     7    10
     2     5     8    11
     3     6     9    12
ans =
    3    4
```

1.8.7. Operaţiile cu matrice.

Matricele **de aceleaşi dimensiuni** se adună şi se scad una din alta cu ajutorul semnelor „+” şi „-”. Aceasta este valabil şi pentru vectori:

```
>> c3=c1+c2; c4=c1-c2;
>> l3=l1+l2; l4=l1-l2;
```

Semnul „*” serveşte pentru înmulţirea matricelor conform regulilor matematice, adică A(m,n)*B(n,k)=P(m,k):

```
>> p= b*c
p =
    14    32    50    68
    32    77   122   167
    50   122   194   266
    68   167   266   365
```

Apostroful ‘ serveşte pentru a determina matricea transpusă (echivalent cu funcţia ***transp***). Pentru a ridica o matrice pătrată la putere se aplică ^.

1.8.8. Operaţiile cu masivele (tabelele)

Dacă ne vom îndepărta de algebra liniară, matricele pot fi privite ca masive numerice bidimensionale. Operaţiile aritmetice se înfăptuiesc cu *fiecare element pe rând*. Cum aceasta lucrează? Foarte simplu. Dacă avem o expresie aritmetică cu câteva variabile:

- în primul rând masivele trebuie să fie de aceleaşi dimensiuni
- pentru fiecare pereche de elemente respective din variabilele date se calculează valoarea expresiei iar rezultatul se înscrie în elementul respectiv al variabilei rezultante - dacă avem X(m,n) şi Y(m,n) şi funcţia F(X,Y) atunci rezultatul va fi Z(m,n) unde Z(i,j)=F(X(i,j),Y(i,j))

De aici rezultă, ca adunarea şi scăderea pentru masive şi matrice sunt identice - X+Y este echivalent cu X.+Y, însă operaţiile multiplicative sunt diferite - X*Y nu este echivalent cu X.*Y.

MATLAB foloseşte punctul ”.” ca parte a notaţiei pentru operaţiile multiplicative a masivelor.

Lista operaţiilor include:

+	Adunarea
-	Scăderea
.*	Înmulţirea masivelor (element cu element)
./	Împărţirea masivelor (element cu element)
.\	Împărţirea la stânga a masivelor (element cu element)
.^	Ridicarea la putere a masivelor (element cu element)
.'	Transpunerea masivelor

De exemplu, pentru vectorii precedenţi :

```
>> c2=[20:23; 30:33; 40:43]
>> c3=c .* c2
c3 =
    20    84   154   230
    60   155   256   363
   120   246   378   516
```

Un exemplu de calculul a funcţiilor mai complicate de la valorile vectorilor.

Des se cere de a calcula o funcţie de la valorile argumentului unui vector, care se deosebesc cu un pas constant:

$$f(x) = \frac{x \cdot \sin x + x^2}{x+1}$$ pentru x=[-1.2 1.8] cu pasul 0.5.

Consecutivitatea de comenzi este:

```
>> x=-1.2:0.5:1.8;
>> f=(x.*sin(x)+x.^2)./(x+1);
```

şi duce la crearea vectorilor:

```
>> x
x =    -1.2000   -0.7000   -0.2000   0.3000   0.8000   1.3000
1.8000
>> f
f =    -12.7922   3.1365    0.0997   0.1374   0.6744   1.2794
1.7832
```

1.8.9. Lucrul cu matricele.

Vectorii pot fi argumente la funcţii, ca *sin*, *cos* etc. În rezultat se obţine un vector cu elementele egale cu valorile funcţiei respective de la elementele vectorului iniţial, de exemplu:

```
>> sin(a)
ans =
   0.8415    0.9093    0.1411   -0.7568   -0.9589   -0.2794
0.6570    0.9894    0.4121
>> sin([0 pi/2 pi])
ans =
   0    1.0000    0.0000
```

Operaţia de **transpunere** se înseamnă cu un apostrof «'». Operaţia inversează matricea faţă de diagonala principală şi preface un vector rând în vector coloană şi viceversa.

```
>> b'
ans =
     1     4     7    10
     2     5     8    11
     3     6     9    12
>> c'
ans =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
    10    11    12
```

FLIPLR inversează matricea în direcţia din stânga în dreapta.

FLIPUD inversează matricea de sus în jos.

De exemplu:

```
>>fliplr(b)
ans =
     10     3     2     1
     11     6     5     4
     12     9     8     7
>> flipud(b)
ans =
```

```
  10    11    12
   7     8     9
   4     5     6
   1     2     3
```

SUM – suma elementelor.

S = SUM(X) este suma elementelor a vectorului X. Dacă X este matrice, S este un vector cu sumele fiecărei coloane.

```
>> sum(a),sum(b)
ans =
    45
ans =
    22    26    30
```

Suma tuturor elementelor tabelei se poate de obţinut prin SUM(SUM(X)). Cum de calculat suma rândurilor? MATLAB preferă să lucreze cu coloanele matricelor, deci, cel mai uşor mod de a calcula suma rândurilor este:

1) transpunerea matricei;
2) calcularea sumei coloanelor a matricei transpuse;
3) transpunerea rezultatului primit.

```
>> sum(a')',sum(b')'
ans =
    45
ans =
     6
    15
    24
    33
```

DIAG este: 1-matrice diagonală din vector şi 2-vector format din diagonala matricei.

DIAG(V,K) când V este un vector cu N elemente este o matrice pătrată cu rangul N+ABS(K) cu elementele vectorului V în diagonala K. Dacă K > 0 este diagonala mai sus de diagonala principală iar când K < 0 - mai jos de diagonala principală. Dacă K = 0, atunci DIAG(V) este echivalent cu DIAG(V,0) şi setează elementele vectorului V în diagonala principală.

Când X este o matrice, rezultatul DIAG(X,K), este un vector coloană format din elementele diagonalei K din X. Rezultatul DIAG(X) este un vector coloană format din elementele diagonalei principale din X.

>> diag([1 2 3]) ans = 0 1 0 0 0 0 2 0 0 0 0 3 0 0 0 0	>> diag(a,1) ans = 0 1 0 0 0 0 2 0 0 0 0 3 0 0 0 0	>> diag(a,-1) ans = 0 0 0 0 1 0 0 0 0 2 0 0 0 0 3 0

DIAG(DIAG(X)) este o matrice diagonală.

Diagonala secundară matematic nu este importantă, de aceea MATLAB nu are funcţie pentru ea, dar e posibil de calculat - diag(fliplr(b)).

1.9. Anunţul despre erori şi îndreptarea erorilor

MATLAB controlează comenzile introduse şi expresiile şi anunţă despre erori sau preîntâmpinări. Să considerăm un exemplu. Să introducem greşit expresia şi să apăsăm tasta <ENTER>. Sistemul va anunţa despre eroare:

```
>> sqr(2)
??? Undefined function or variable ‘sqr’.
```

Acest anunţ înseamnă că nu este determinată variabila sau funcţia şi indică care anume - ‘sqr’. În acest caz se poate de cules din nou expresia corectă. Însă în cazul expresiilor complicate e mai bine de folosit redactarea. Cu ajutorul tastei <↑> trecem în rândul precedent redactat (vezi punctul 1.2), adică ”***>>sqr(2)***” cu cursorul la capăt.

Dacă utilizatorul a uitat numele oarecărei funcţii se poate de apăsat tasta <TAB>, după care sistema va analiza simbolurile introduse şi ne va da o variantă (variantele) de răspuns. Fiţi atenţi - MATLAB analizează simbolurile introduse până la cursor.

În versiunea MATLAB 7:

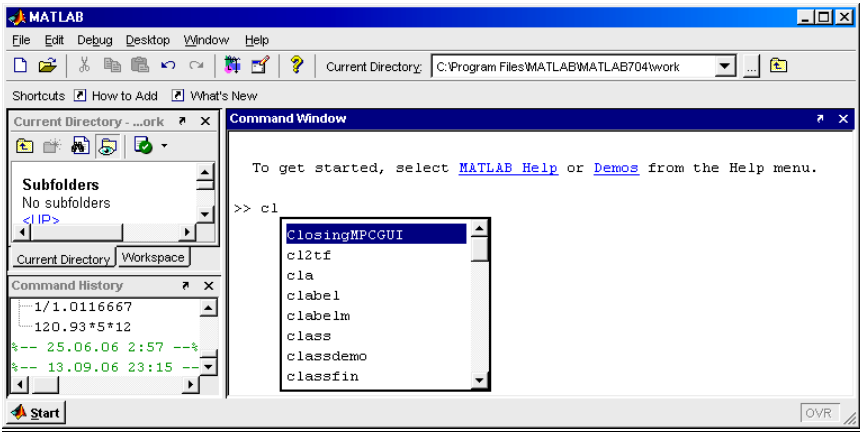


Fig.1.10. Meniul de completare a comenzii în MATLAB 7

1. dacă există o singură variantă, atunci după apăsarea tastei <TAB> sistemul ar fi terminat numele funcţiei necunoscute fără transferul rândului.
2. dacă variante sunt câteva şi este apăsată tasta <TAB> atunci apare un meniu cu toate variantele posibile sortate în ordine alfabetică de unde e posibil de selectat doar o singură variantă dorită (fig. 1.10).

În versiunea MATLAB 6 :

1. dacă există o singură variantă, atunci după apăsarea tastei <TAB> sistemul ar fi terminat numele funcţiei necunoscute fără transferul rândului.
2. dacă variante sunt câteva şi tasta <TAB> se apasă doar o singură dată atunci MATLAB dă un sunet de avertizare

3. dacă variante sunt câteva şi tasta <TAB> va fi apăsată dublu – atunci MATLAB va afişa variantele posibile în fereastra “Command Windows” şi va repeta linia de comandă introdusă.

Să considerăm un exemplu:

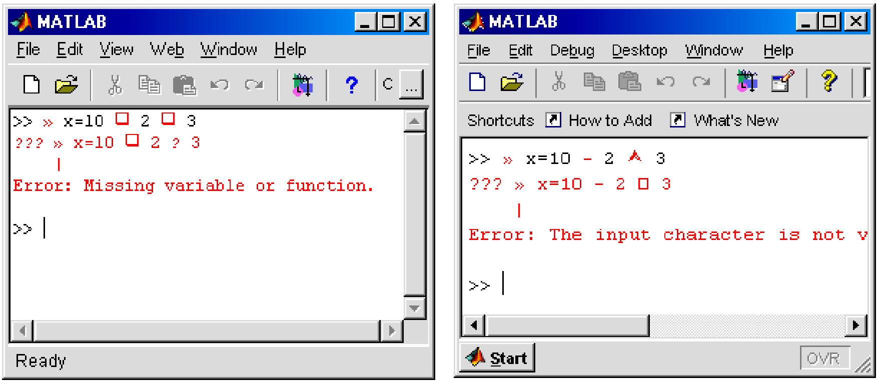
```
>> cl<TAB>
cl2tf          cleanaxe       clg             cloop
clusterdata    cla            cleanerrormsg   clipboard
close          clutch         clabel          cleanp
clipdata       close_system   clutch_if       cliprollregions
clabelm        closereq       cleanupcomment
class          clear          cliptr          clrmenu
clutchplot_if  classfin       clearcase       clma
clrpopup       clxbode        classify        clegendm
clmo           clruprop       clyap           clc
clf            clock          cluster
>> cle<TAB>
cleanaxe           cleanp            clear
                   clegendm
cleanerrormsg      cleanupcomment    clearcase
>> cleanupc<TAB>
>> cleanupcomment
```

La introducerea unei expresii matematice greşite sau a unui simbol necunoscut MATLAB anunţă despre eroare şi indică locul erorii cu un indicator de tip “|”.

Exemplu. Memorizaţi din Word în clipboard şi inseraţi în MATLAB următoarea expresie : » x=10 – 2 ^ 3

```
>> » x=10 □ 2 □ 3
??? » x=10 □ 2 ? 3
      |
Error: Missing variable or function.
>> x=10 □ 2 □ 3
??? x=10 □ 2 ? 3
           |
Error: Missing operator, comma, or semicolon.
```

Command windows din MATLAB 7 in comparaţie cu MATLAB 6 este mai sofisticat şi arată simbolurile din Word aşa cum sunt în Word, însă tot le evidenţiază ca greşeli (de ex., fig.1.11, a) şi b)).



a) Matlab 6 b) Matlab 7

Fig.1.11. Simbolurile necunoscute în MATLAB

MATLAB are un ajutor foarte bogat. Comanda *help* prezintă în fereastra de comandă lista diviziunilor sistemului de informaţii. Pentru a obţine conţinutul diviziunii trebuie de indicat *help* şi printr-un spaţiu (loc gol) numele ei, iar pentru a extrage informaţia detailată despre o funcţie oarecare, trebuie de introdus în rândul cu *help* numele funcţiei:

```
>> help sqrt
SQRT   Square root.
    SQRT(X) is the square root of the elements of X. Complex
    results are produced if X is not positive.

    See also SQRTM.

 Overloaded methods
    help sym/sqrt.m
```

La scrierea expresiilor matematice cu multe paranteze des se întâmplă scăparea unor paranteze deschise sau închise de prisos, care la executare v-a da eroare:

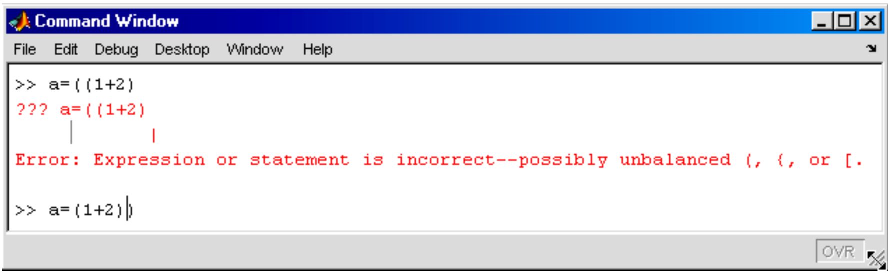
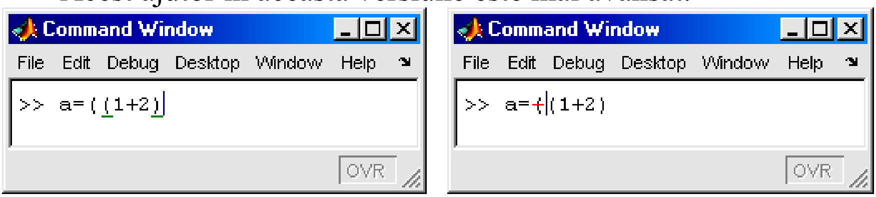


Fig.1.12. Exemplu de eroare cu paranteze de prisos

În cazul acesta MATLAB oferă posibilitatea de a găsi perechile de paranteze (indiferent de care - ")", "]", "}") şi ajută la corectarea expresiilor (fig. 1.12). Acest ajutor sistemul MATLAB îl arată doar câteva secunde.

În versiunea MATLAB 7:

Acest ajutor în această versiune este mai avansat.



a) perechea găsită b) fără pereche

Fig.1.13. Exemplu cu perechile de paranteze.

Plasând cursorul după o paranteză, MATLAB îi caută perechea şi dacă o găseşte le subliniază pe ambele, iar dacă perechea nu a fost găsită paranteza la care a fost plasat cursorul este întretăiată, dând de ştire că trebuie eliminată (fig. 1.13).

În versiunea MATLAB 6:

În această versiune MATLAB caută perechile **doar la editarea** rândului - dacă găseşte perechea la paranteza introdusă atunci automat le evidenţiază pe ambele.

Sfaturi practice.

Începutul fiecărui program începeţi cu ştergerea tuturor variabilelor din sesiune. Aceasta vă dă posibilitatea să evitaţi eroarea folosirii variabilelor determinate din programul precedent.

Preferabil ca orice program să se înceapă cu comenzile

```
clear;
format compact;
```

Sarcina Lucrării nr. 1.

I. Descrieţi comenzile de bază în regimul de comandă a Programului MATLAB.

II. În toate exerciţiile se cere de a introduce într-o variabilă oarecare valorile expresiilor când $x = -1.75*10^{-3}$ şi $y = 3.1\pi$. De calculat expresiile mai întâi într-un rând, iar pe urmă de optimizat (după posibilitate) folosind variabilele intermediare. De prezentat rezultatul în diferite formate şi de studiat informaţia despre variabile cu ajutorul comenzii *whos*.

Vari anta	Expresiile

1	$F_1=\left(\dfrac{e^x\sin y+e^{-x}\cos y}{x+\sin y}\right)^{3.5}+\sqrt{\dfrac{e^x+\sin y}{e^x\sin y+e^{-x}\cos y}}+\lvert x\rvert\sin y;$ $F_2=arctg\dfrac{\sqrt[5]{2x-\sin y}}{\sqrt{\lvert x-\ln y\rvert}}+\dfrac{\lvert x\rvert\sqrt{\lvert x-\ln y\rvert}}{\sqrt[5]{2x-\sin y}};$
2	$A_1=\left(\dfrac{x+\ln\lvert\cos y\rvert}{x+\lvert ctgy\rvert}\right)^{2.5}+\sqrt{\dfrac{\left(x+\lvert ctgy\rvert\right)^3}{x+\ln\lvert\cos y\rvert}};$ $A_2=sh\dfrac{\left(x^2+\cos^2 y\right)^3}{\sqrt{\lvert x-\cos y\rvert}}+\ln\left\lvert\dfrac{\left(x-\cos y\right)}{x^2+\cos^2 y}\right\rvert+\lvert\sin y\rvert x;$
3	$B_1=\left(\dfrac{x^3+tgy}{\sin y-\ln\lvert x\rvert}\right)^{3.1}+\dfrac{(\sin y-\ln\lvert x\rvert)^{2.5}}{\sqrt{\lvert x^3+tgy\rvert}}+\lvert x\rvert\sin^2 x;$ $B_2=ch\dfrac{\left(x^{1.3}+\sin^3 y\right)^2}{\sqrt{\lvert x+\cos^2 y\rvert}}+\ln\left\lvert\dfrac{\left(1x+\cos^2 y\right)}{\left(x^{1.3}+\sin^3 y\right)^{1.5}}\right\rvert;$
4	$H_1=\dfrac{\left[x\left(1+x^2\right)\left(1+2x\right)^2\right]^{2.3}}{\ln\lvert ctgy\rvert}+\dfrac{\ln\lvert ctgy\rvert-x}{x\left(1+x^2\right)\left(1+2x\right)^2};$ $H_2=\arcsin\left(\dfrac{x^2+\cos^2 y}{\sqrt{\lvert x-\ln y\rvert}}\right)+\sqrt{\lvert x-\ln y\rvert};$
5	$Z_1=\dfrac{\left(e^x\cos y+3\sin y\right)^2}{100\lvert x\rvert+tgy}+\dfrac{100\lvert x\rvert+tgy+\cos y}{\left(e^x\cos y+3\sin y\right)^2};$ $Z_2=cth\dfrac{\left(x^2+\cos^2 y\right)^3}{\lvert x\rvert+\sin y}+\left(\dfrac{\lvert x\rvert+\sin y}{x^2+\cos^2 y}\right)^{2.3};$

6	$Q_1=\left(\dfrac{\lvert x\rvert\left(1+2x^2\right)}{100x+ctgy}\right)^{2.1}+\dfrac{100x+ctgy+\sin y}{x^2\left(1+2x^2\right)};$ $Q_2=\dfrac{\left(x^3-\cos y\right)^{2.2}}{\lvert x\rvert+\lvert\sin y\rvert}+\dfrac{x^2\left(\lvert x\rvert+\lvert\sin y\rvert\right)^{1.3}}{\sqrt[3]{\left(x^3-\cos y\right)}};$
7	$R_1=\dfrac{\lvert x\rvert\left(x+tgy\right)}{\left(50x^2+\lvert\sin y\rvert\right)^{1/3}}+\dfrac{\left(5x^2+\lvert\sin y\rvert\right)^{2.2}}{x^2\left(x+tgy\right)^4};$ $R_2=sh\dfrac{\sqrt{2x+\sin^2 y}}{\left(x+\ln\lvert tgy\rvert\right)^{1.3}+\lvert x\rvert}-\dfrac{x+\ln\lvert tgy\rvert+\cos y}{\left(2x+\sin^2 y\right)^{1/3}};$
8	$T_1=\dfrac{\left(x+2x^2\right)\left(1+3x^3\right)^2}{\sin y+\ln\lvert x\rvert}+\dfrac{\left(\sin y+\ln\lvert x\rvert\right)^{1/3}+\cos y}{x^2\left(1+3x^3\right)};$ $T_2=\dfrac{\arcsin\left(\cos 2y\right)+\lvert x\rvert}{\left(1+2x^4\right)^{1/4}}+\dfrac{\left(1+2x^4\right)^{1/4}+\cos y}{\arcsin\left(\cos 2y\right)+\lvert x\rvert+\sin y};$
9	$F_1=\left(\dfrac{e^x\sin y+e^{-x}\cos y}{x+\sin y}\right)^{2.5}+\sqrt[3]{\dfrac{x+\sin y}{e^x\sin y+e^{-x}\cos y}}+\lvert x\rvert\sin y;$ $H_2=\arcsin\left(\dfrac{x^2+\cos^2 y}{\sqrt{\lvert x-\ln y\rvert}}\right)^{1.3}+\sqrt{\lvert x-\ln y\rvert};$
10	$A_1=\left(\dfrac{x+\ln\lvert\cos y\rvert}{x+\lvert ctgy\rvert}\right)^{2.5}+\sqrt[5]{\dfrac{\left(x+\lvert ctgy\rvert\right)^3}{x+\ln\lvert\cos y\rvert}};$ $Z_2=cth\dfrac{\left(x^2+\cos^2 y\right)^2}{\lvert x\rvert+\sin y}+\left(\dfrac{\lvert x\rvert+\sin y}{x^2+\cos^2 y}\right)^{2.3};$

11	$B_1=\left(\dfrac{x^3+tgy}{\sin y-\ln\lvert x\rvert}\right)^{2.3}+\dfrac{(\sin y-\ln\lvert x\rvert)2.5}{\sqrt{\lvert x^3+tgy\rvert}}+\lvert x\rvert\sin^2 y;$ $Q_2=\dfrac{(x^3-\cos y)^{1.3}}{\lvert x\rvert+\lvert\sin y\rvert}+\dfrac{x^2(\lvert x\rvert+\lvert\sin y\rvert)^{1.3}}{\sqrt[3]{(x^3-\cos y)}};$
12	$H_1=\dfrac{\left[x(1+x^2)(1+2x)^2\right]^{2.3}}{\ln\lvert ctgy\rvert}+\dfrac{\ln\lvert ctgy\rvert-x}{x(1+x^2)(1+2x)^2};$ $R_2=sh\dfrac{\sqrt{2x+\sin^2 y}}{(x+\ln\lvert tgy\rvert)^{1.3}+\lvert x\rvert}-\dfrac{x+\ln\lvert tgy\rvert+\cos y}{(2x+\sin^2 y)^{1/3}};$
13	$Z_1=\dfrac{(e^x\cos y+3\sin y)^2}{100\lvert x\rvert+tgy}+\dfrac{100\lvert x\rvert+tgy+\cos y}{(e^x\cos y+3\sin y)^2};$ $T_2=\dfrac{\arcsin(\cos 2y)+\lvert x\rvert}{(1+2x^4)^{1/4}}+\dfrac{(1+2x^4)^{1/4}+\cos y}{\arcsin(\cos 2y)+\lvert x\rvert+\sin y};$
14	$Q_1=\left(\dfrac{\lvert x\rvert(1+2x^2)}{100x+ctgy}\right)^{2.1}+\dfrac{100x+ctgy+\sin y}{x^2(1+2x^2)};$ $F_2=arctg\dfrac{\sqrt[5]{2x-\sin y}}{\sqrt{\lvert x-\ln y\rvert}}+\dfrac{\lvert x\rvert\sqrt{\lvert x-\ln y\rvert}}{\sqrt[5]{2x-\sin y}};$
15	$R_1=\dfrac{\lvert x\rvert(x+tgy)}{(50x^2+\lvert\sin y\rvert)^{1/3}}+\dfrac{(5x^2+\lvert\sin y\rvert)^{2.2}}{x^2(x+tgy)^4};$ $A_2=sh\dfrac{(x^2+\cos^2 y)^3}{\sqrt{\lvert x-\cos y\rvert}}+\ln\left\lvert\dfrac{(x-\cos y)}{x^2+\cos^2 y}\right\rvert+\lvert\sin y\rvert x;$

16	$T_1=\frac{\left(x+2x^2\right)\left(1+3x^3\right)^2}{\sin y+\ln\lvert x\rvert}+\frac{\left(\sin y+\ln\lvert x\rvert\right)^{1/3}+\cos y}{x^2\left(1+3x^3\right)}$; $B_2=ch\frac{\left(x^{1.3}+\sin^3 y\right)^2}{\sqrt{\lvert x+\cos^2 y\rvert}}+\ln\left\lvert\frac{\left(1x+\cos^2 y\right)}{\left(x^{1.3}+\sin^3 y\right)^{1.5}}\right\rvert$;
17	$A_1=\left(\frac{x+\ln\lvert\cos y\rvert}{x+\lvert ctgy\rvert}\right)^{2.5}+\sqrt{\frac{\left(x+\lvert ctgy\rvert\right)^3}{x+\ln\lvert\cos y\rvert}}$; $H_2=\arcsin\left(\frac{x^2+\cos^2 y}{\sqrt{\lvert x-\ln y\rvert}}\right)^{1.3}+\sqrt{\lvert x-\ln y\rvert}$;
18	$B_1=\left(\frac{x^3+tgy}{\sin y-\ln\lvert x\rvert}\right)^{3.1}+\frac{\left(\sin y-\ln\lvert x\rvert\right)2.5}{\sqrt{\lvert x^3+tgy\rvert}}+\lvert x\rvert\sin^2 y$; $Z_2=cth\frac{\left(x^2+\cos^2 y\right)^3}{\lvert x\rvert+\sin y}+\left(\frac{\lvert x\rvert+\sin y}{x^2+\cos^2 y}\right)^{2.3}$;
19	$H_1=\frac{\left[x\left(1+x^2\right)\left(1+2x\right)^2\right]^{2.3}}{\ln\lvert ctgy\rvert}+\frac{\ln\lvert ctgy\rvert-x}{x\left(1+x^2\right)\left(1+2x\right)^2}$; $Q_2=\frac{\left(x^3-\cos y\right)^{2.2}}{\lvert x\rvert+\lvert\sin y\rvert}+\frac{x^2\left(\lvert x\rvert+\lvert\sin y\rvert\right)^{1.3}}{\sqrt[3]{\left(x^3-\cos y\right)}}$;
20	$Z_1=\frac{\left(e^x\cos y+3\sin y\right)^2}{100\lvert x\rvert+tgy}+\frac{100\lvert x\rvert+tgy+\cos y}{\left(e^x\cos y+3\sin y\right)^2}$; $R_2=sh\frac{\sqrt{2x+\sin^2 y}}{\left(x+\ln\lvert tgy\rvert\right)^{1.3}+\lvert x\rvert}-\frac{x+\ln\lvert tgy\rvert+\cos y}{\left(2x+\sin^2 y\right)^{1/3}}$;

21	$R_1 = \dfrac{\lvert x\rvert (x+tgy)}{\left(50x^2+\lvert\sin y\rvert\right)^{1/3}} + \dfrac{\left(5x^2+\lvert\sin y\rvert\right)^{2.2}}{x^2 (x+tgy)^4};$ $F_2 = arctg\,\dfrac{\sqrt[5]{2x-\sin y}}{\sqrt{\lvert x-\ln y\rvert}} + \dfrac{\lvert x\rvert\sqrt{\lvert x-\ln y\rvert}}{\sqrt[5]{2x-\sin y}};$
22	$Q_1 = \left(\dfrac{\lvert x\rvert\left(1+2x^2\right)}{100x+ctgy}\right)^{2.1} + \dfrac{100x+ctgy+\sin y}{x^2\left(1+2x^2\right)};$ $A_2 = sh\dfrac{\left(x^2+\cos^2 y\right)^3}{\sqrt{\lvert x-\cos y\rvert}} + \ln\left\lvert\dfrac{(x-\cos y)}{x^2+\cos^2 y}\right\rvert + \lvert\sin y\rvert x;$
23	$T_1 = \dfrac{\left(x+2x^2\right)\left(1+3x^3\right)^2}{\sin y+\ln\lvert x\rvert} + \dfrac{\left(\sin y+\ln\lvert x\rvert\right)^{1/3}+\cos y}{x^2\left(1+3x^3\right)};$ $H_2 = \arcsin\left(\dfrac{x^2+\cos^2 y}{\sqrt{\lvert x-\ln y\rvert}}\right)^{1.3} + \sqrt{\lvert x-\ln y\rvert};$
24	$F = \left(\dfrac{e^x\sin y+2^x\cos y}{200x+y}\right)^{2.3} + \ln\lvert\sin y\rvert - \sqrt{\dfrac{e^x\sin y+2^x\cos y}{200x+y}};$ $A = \sqrt[5]{x(1+x)^2(1+2x)^3 + \sqrt[3]{\dfrac{x(1+x)^2(1+2x)^3}{\ln\lvert ctgy\rvert}}};$
25	$Z = arctg\,\dfrac{\sqrt[3]{x-\sin(y)}}{\sqrt{x-x^2}} - \dfrac{\lvert x\rvert\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{x-\sin(y)}};$ $Q = \sqrt{e^x\sin y+e^{-y}\cos y+\sqrt{1+\dfrac{e^x\sin y+e^{-x}\cos y}{tgy}}};$

26	$T=\dfrac{(\sin y+\sin 2y+\sin 3y)^4}{1+\dfrac{\sin y+\sin 2y+\sin 3y}{e^x}}+\sqrt{1+\dfrac{\sin y+\sin 2y+\sin 3y}{e^x}}$; $H=\dfrac{\sqrt{\cos 2y+\sin 4y+\sqrt{e^x+e^{-x}}}}{\left(e^{-x}+e^x\right)3\left(\sin 4y+\cos 2y-2\right)2}$;
27	$W=\left(1+\dfrac{\ln y}{x+tgy}\right)^{1+\frac{x+tgy}{\ln y}}$; $R=sh\dfrac{(x+\ln y)^3}{\sqrt{\lvert x-\ln y\rvert}}ch\left[(x+\ln y)\sqrt{\lvert x-\ln y\rvert}\right]$;
28	$F=\left(\dfrac{e^x\sin y+2^x\cos y}{200x+y}\right)^{2.3}+\ln\lvert\sin y\rvert-\sqrt{\dfrac{e^x\sin y+2^x\cos y}{200x+y}}$ $R=sh\dfrac{(x+\ln y)^3}{\sqrt{\lvert x-\ln y\rvert}}ch\left[(x+\ln y)\sqrt{\lvert x-\ln y\rvert}\right]$;
29	$A=\sqrt[5]{x(1+x)^2(1+2x)^3+\sqrt[3]{\dfrac{x(1+x)^2(1+2x)^3}{\ln\lvert ctgy\rvert}}}$; $H=\dfrac{\sqrt{\cos 2y+\sin 4y+\sqrt{e^x+e^{-x}}}}{(e^x+e^{-x})^3(\sin 4y+\cos 2y-2)^2}$;
30	$Q=\sqrt{e^x\sin y+e^{-y}\cos y+\sqrt{1+\dfrac{e^x\sin y+e^{-x}\cos y}{tgy}}}$; $W=\left(1+\dfrac{\ln y}{x+tgy}\right)^{1+\frac{x+tgy}{\ln y}}$;

III. De calculat valorile funcţiei pe segmentul dat în N puncte la intervale egale unul de altul.

Varianta	Funcţia	Intervalul	N
1	$y(x)=\ln\left(x^2+1\right)+x\cos^2 x$	$[-\pi,\pi]$	N=8
2	$y(x)=x^2\dfrac{e^x}{e^x+1}+\ln\lvert x\rvert$	$[-1,3]$	N=6
3	$y(x)=e^x\sin x\left(x^3+2\right)$	$[-\pi,2\pi]$	N=9
4	$y(x)=x^2\cos x(\ln x+3)$	$[0.5,2]$	N=8
5	$y(x)=e^x\left(x\sin x+\ln\lvert x\rvert\right)$	$[0.2,3]$	N=7
6	$y(x)=x^2\ln\left(x^2+1\right)+x\sin x$	$[-\pi,\pi]$	N=8
7	$y(x)=e^x\sin x+e^{-x}\cos x$	$[-\pi,\pi]$	N=7
8	$y(x)=\left(x+\ln\lvert x\rvert\right)ch\left(x+\ln\lvert x\rvert\right)$	$[1,3]$	N=5
9	$y(x)=e^x\left(x^2+1\right)+\ln\left(x^2+1\right)$	$[0,3]$	N=7
10	$y(x)=2\sin x^2\cos\left(x^2+1\right)$	$[0,2]$	N=8
11	$y(x)=\sin x\ln\left(\lvert x\rvert^3+2\right)+x^2\cos x$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$	N=6
12	$y(x)=e^{x^2}\left(x^2\sin x+ctgx^2\right)$	$[-\pi,2\pi]$	N=7
13	$y(x)=\ln\lvert x\rvert\left(x\cos x+\ln\lvert x\rvert\right)$	$[-0.3,3]$	N=6
14	$y(x)=e^{-x}\cos x^2\left(x^2+1\right)$	$[-1,3]$	N=8
15	$y(x)=x^2\ln\left(\lvert x\rvert+1\right)+x\cos x$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$	N=7
16	$y(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}}\left(x^2+\ln\lvert x\rvert\right)$	$[-0.2,4]$	N=6
17	$y(x)=x^2\sin x\left(\ln\lvert x\rvert+4\right)$	$[1,3]$	N=7
18	$y(x)=e^x\cos x\left(x^3+3\right)$	$[-\pi,3\pi]$	N=8

19	$y(x)=x\left(\cos x^2+thx^2\right)$	$[-\pi,2\pi]$	N=7
20	$y(x)=x^2\ln\left(\lvert x\rvert+1\right)+ctg\left(\lvert x\rvert+1\right)$	$[-0.3,4]$	N=6
21	$y(x)=x^3\left(xtgx+\sin x^2\right)$	$[-\pi,3\pi]$	N=8
22	$y(x)=\ln\left(\lvert x\rvert+1\right)\left(x^2\sin x+\arcsin x\right)$	$[-1,3]$	N=7
23	$y(x)=\cos x\ln\left(\lvert x\rvert^3+2\right)+x^2\sin x$	$[-\pi,3\pi]$	N=8
24	$y(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{x^2+1}$	$[0,2\pi]$	N=10
25	$y(x)=\ln(x+1)\sqrt{e^x+e^{-x}}$	$[-0.2,\pi]$	N=8
26	$y(x)=x^2tg\sqrt{\arcsin x}$	$[0,\frac{1}{3}]$	N=9
27	$y(x)=x\sin x+x^3\dfrac{e^x}{x+1}$	$[0,1]$	N=7
28	$y(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}}$	$[0,3]$	N=9
29	$y(x)=\dfrac{e^{\sin x}+e^{\cos x}}{x^2}$	$[\pi,3\pi]$	N=11
30	$y(x)=ctg(x^2+1)\cdot(\sin 2x+\cos 2x)$	$[-1,1]$	N=7

Lucrarea nr.2. Grafica în sistemul MATLAB

2.1. Crearea graficelor

Tipul graficului selectat depinde de natura datelor şi ce dorim să arătăm. MATLAB are multe tipuri de grafice redefinite, aşa ca linii, bare, histograme, etc. De asemenea sunt grafice tridimensionale, aşa ca carcase, suprafeţe, plane, linii de contur etc.

Sunt două metode de creare a graficelor în MATLAB: 1) crearea interactivă şi 2) crearea graficelor cu programele introduse în linia de comandă. V-om studia mai detailat metoda a doua.

2.1.1. Fereastra cu grafic

Toate graficele se scot în ferestre ale graficelor cu meniurile şi panelele de instrumente ale sale. Forma graficelor poate fi schimbată interactiv cu ajutorul instrumentelor ferestrei graficului.

Desenând un grafic, MATLAB automat deschide o *fereastră-figură* (fereastră cu figură, mai departe o v-om numi şi prescurtat - *figura*) dacă aşa fereastră încă nu exista. Dacă figura există, MATLAB desină în ea. Dacă sunt mai multe figuri, MATLAB desină în figura marcată “figura activă”. Figura activă este ultima figură folosită sau activată de utilizator.

Dacă se cere de a obţine câteva grafice în diferite ferestre, atunci înainte de a chema funcţia grafică trebuie de apelat comanda *figure* fără parametri, care deschide o figură nouă şi o face activă. Ferestrele graficelor vor fi numerotate Figure No1, Figure No 2, etc. Pentru a seta o figură activă e necesar de a clica cu mausul pe fereastra dată sau în linia de comandă de scris

```
>> figure(n);
```

unde *n* este numărul figuri date (se indică în bara de titlu a ferestrei). Rezultatul a comenzilor grafice vor fi arătate în această figură.

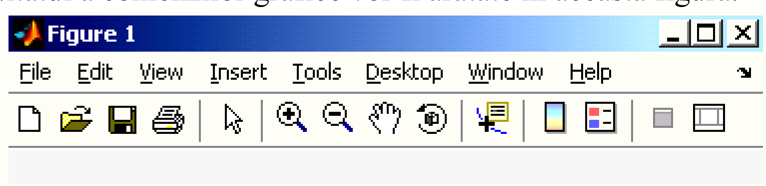


Fig. 2.1. Exemplu de fereastră-figură

Fiecare fereastră are axele de coordonate ale sale. Dacă chiar în fereastră sunt mai multe axe, graficul va apărea în axele curente, care sunt ultimele din cele create. Pentru a alege axele curente din câteva este suficient de a clica pe ele cu butonul din stânga a mousul înainte de a chema funcţia grafică.

2.1.2. Ştergerea figurii

Dacă o figură deja există, majoritatea comenzilor de desenare şterg axele şi folosesc această figură pentru crearea unui grafic nou. Pe de altă parte, aceste comenzi nu v-or reseta proprietăţile figurii aşa ca culoarea fonului sau paleta de culori. Dacă aţi setat careva proprietate a figurii precedente şi înainte de crearea unui grafic nou doriţi să le resetaţi trebuie de apelat la comanda *clf* (din engleză *clear figure*) cu opţiunea *reset*:

```
>> clf
>> clf reset
```

Comanda *clf* şterge figura fără resetarea proprietăţilor ei. Tot acelaşi rezultat v-om obţine dacă din meniul figurii v-om selecta “*Edit -> Clear Figure*”.

2.2. Construirea graficelor funcţiilor de o singură variabilă

Să construim graficul funcţiei de o variabilă $f(x) = e^x \sin \pi x + x^2$ pe segmentul [-2,2]. Primul pas constă în determinarea coordonatelor punctelor pe axa absciselor. Construirea vectorului *x1* cu elemente de pas constant se efectuează cu ajutorul operatorului colon. Mai departe trebuie de calculat valorile *f(x1)* pentru fiecare element al vectorului *x1* şi de scris rezultatul în vectorul *y1*. Pentru construirea graficului funcţiei trebuie de folosit funcţia *plot*. Se indică argumentele *x1* şi *y1* în paranteze rotunde. Ordinea comenzilor sunt indicate mai jos

```
>> x1=[-2:0.05:2];
>> y1=exp(x1).*sin(pi*x1)+x1.^2;
>> plot(x1,y1)
```

În urma executării funcţiei plot apare graficul funcţiei (fig. 2.2):

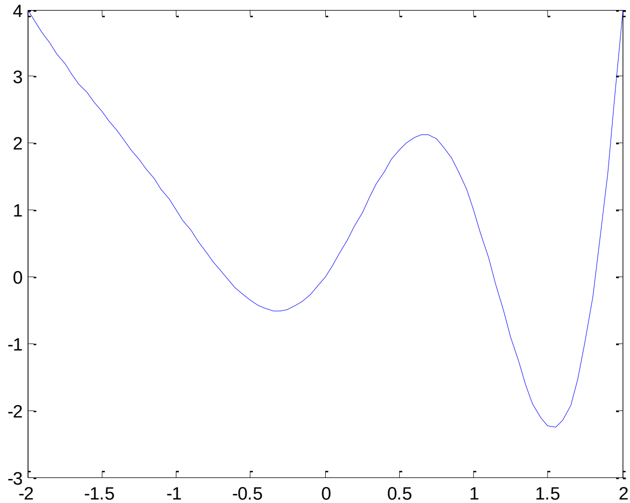


Fig. 2.2. Graficul funcţiei

2.2.1. Funcţia comet

Funcţia *comet* permite de a urmări mişcarea punctului pe traiectorie. La apelarea *comet(x,y)* apare fereastra graficului pe axele cărora se desenează mişcarea punctului în forma unei comete cu coadă. Viteza mişcării poate fi controlată prin schimbarea pasului la determinarea vectorului valorilor parametrului.

2.3. Construirea graficelor funcţiilor de două variabile

Există o serie de funcţii grafice pentru a vizualiza funcţiile de două variabile:

- *plot3* - analogul 3-dimensional a funcţiei plot;
- *mesh* - carcasa suprafeţei plină de culoare;
- *surf* - suprafeţei plină de culoare;
- *contour* - grafic plan cu liniile de nivel;
- *meshc, surfc* - suprafaţă cu liniile de nivel în planul x,y;

- *contourf* - grafic plan cu liniile de nivel colorat;
- *contour3* - suprafaţă compusă din linii de nivel;
- *surfl* - suprafaţă luminată.

Fie că trebuie de obţinut carcasa suprafeţei funcţiei $z(x,y)=e^{-x}\sin(\pi y)$ în dreptunghiul $x\in[-1,1]$, $y\in[0,2]$. Primul pas constă în indicarea scării pe dreptunghi, adică punctele, care vor fi folosite pentru a calcula valorile funcţiei. Pentru a genera scara se foloseşte funcţia *meshgrid,* care depinde de două argumente – vectorii care determin scările pe axele *x* şi *y*.

Funcţia *meshgrid*, creează două variabile care sunt matrice

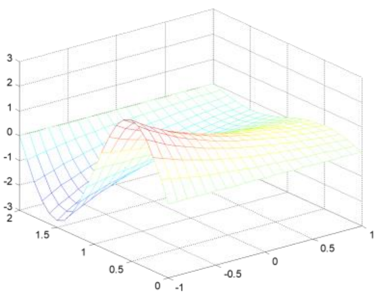
```
>> [x3,y3]=meshgrid(-1:0.1:1,0:0.1:2);
```

Matricea *x3* constă din aceleaşi rânduri egale cu primul argument – vector în funcţia *meshgrid,* iar matricea *y3* din coloane egale care coincid cu al doilea argument în *meshgrid*. Aceste matrice sunt necesare pentru a face al doilea pas la completarea matricei *z3*, fiecare element al căreia este o valoare a funcţiei *z(x,y)* în punctele scării. Obţinem matricea necesară *z3*:

```
>> z3=exp(-x3).*sin(pi*y3);
```

Pentru a construi graficul *z(x,y)* a rămas de chemat funcţia grafică potrivită, de exemplu:

```
>> mesh(x3,y3,z3)
```



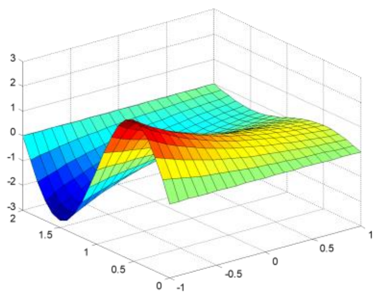


Fig. 2.3. Carcasa (*mesh*) şi suprafaţa (*surf*) funcţiei *z(x, y)*.

Pe ecran apare fereastra grafică cu suprafaţa funcţiei cercetate, culoarea căruia corespunde valorii implicite *colorcube* (culorile graficelor 3-dimensionale vor fi analizate mai departe).

Pentru obţinerea suprafeţei funcţiei se foloseşte funcţia *surf*, care se aseamănă cu *mesh* doar prin aceea, că *mesh* desină carcasa iar *surf* – suprafaţa (se apelează ca şi funcţia *mesh*) (Fig.2.3).

```
>> surf(x3,y3,z3)
```

2.3.1. Construirea graficelor plane cu liniile de nivel

Grafic plan cu liniile de nivel şi grafic plan cu liniile de nivel colorat a funcţiei (fig. 2.4):

```
>> contour(x3,y3,z3)
>> contourf(x3,y3,z3)
```

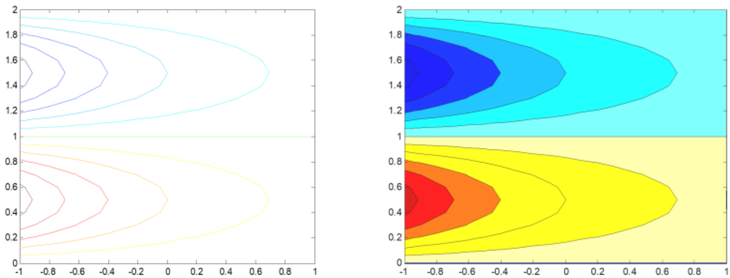


Fig. 2.4. Liniile de nivel (*contour*) şi liniile de nivel colorat (*contourf*) a funcţiei.

Numărul liniilor de nivel se indică în al patrulea argument, adăugător, de exemplu:

```
>> contour(x3,y3,z3, 10); contourf(x3,y3,z3, 10);
```

În locul numărului liniilor se poate de indicat în formă de vector valorile lui *z(x,y)* pentru care trebuie de construit liniile de nivel (fig. 2.5):

```
>> contour(x3,y3,z3,[-0.51 -0.25 -0.01 0.89])
>> contourf(x3,y3,z3,[-3:0.3:3])  %sau setăm pasul nostru
```

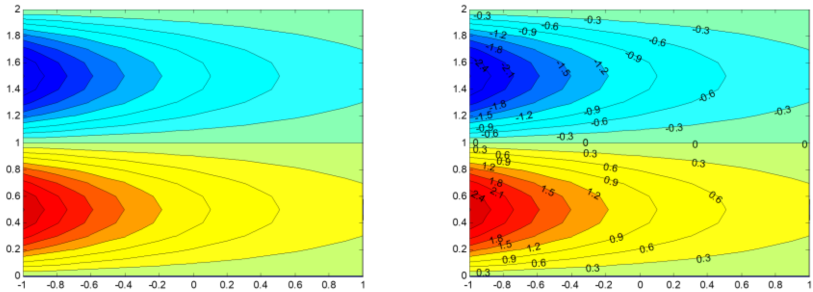


Fig. 2.5. Setarea numărului liniilor de nivel şi valorile lor.

Suprafaţa formată din liniile de nivel se prezintă aşa (fig.2.6):

```
>> contour3(x3,y3,z3,[-3:0.1:3]);
```

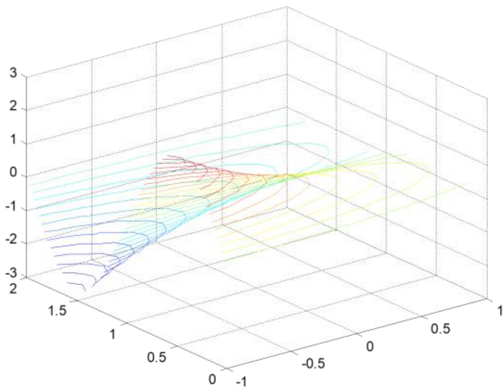


Fig. 2.6. Suprafaţa formată din liniile de nivel.

Pentru a introduce pe fiecare linie înscrieri cu valorile respective ale lui *z(x,y)* trebuie de chemat *contour* cu două argumente, unul fiind matricea cu informaţia despre poziţia liniei de nivel, iar al doilea – vectorul cu indicii pe linii. Variabilele obţinute trebuie folosite ce argumente ale funcţiei *clabel*:

```
>> [CMatr, h] = contour(x3, y3, z3, [-3:0.3:3]);
>> clabel(CMatr, h)
```

2.4. Construirea graficelor funcţiilor determinate în mod parametric

Fie că trebuie de construit graficul unei funcţii determinate în mod parametric, de exemplu graficul isteroidei $x(t) = \cos^3 t$, $x(t) = \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$. Mai întâi trebuie de determinat vectorul *t*, apoi de introdus valorile *x*(*t*), *y*(*t*) în vectorii *x*, *y* şi de aplicat *plot*, pentru a descrie dependenţa lui *y* de *x* (fig. 2.7):

```
>> t=[0:pi/20:2*pi];
>> x2=cos(t).^3;
>> y2=sin(t).^3;
>> plot(x2,y2)
```

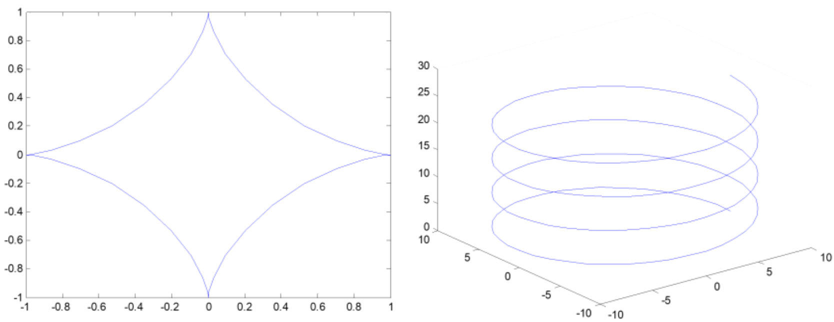


Fig. 2.7. Graficele funcţiilor determinate în mod parametric

Pentru funcţiilor de două variabile

```
>> cercuri=4; raza=10;
>> unghiul=[0:pi/20:cercuri*2*pi];
>> x2=raza*cos(unghiul);
>> y2=raza*sin(unghiul);
>> plot3(x2,y2,unghiul)
```

2.5. Construirea într-o fereastră a graficelor câtorva funcţii

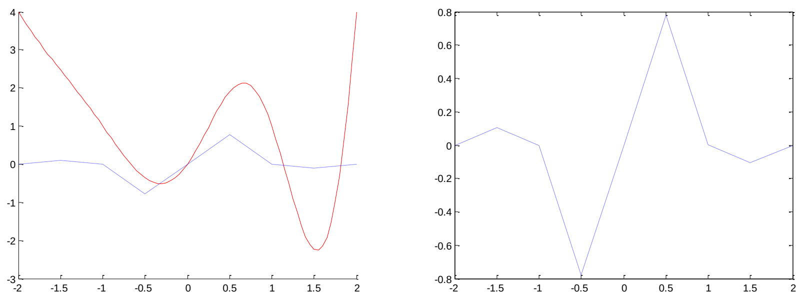
2.5.1. Grafice cu axele comune

La aplicarea funcţiei *plot* MATLAB implicit şterge fereastra grafică. Pentru a suprapune o imagine pe alta se aplică comanda *hold on*, iar pentru anularea suprapunerii imaginilor se aplică *hold off* (fig. 2.8). La suprapunerea graficelor MATLAB la nevoie recalculează axele pentru ca să încapă graficele. Exemplu:

```
>> hold on   %hold off
>> x=[-2:0.05:2]; f=exp(x).*sin(pi*x)+x.^2;
>> x1=[-2:0.5:2]; g=exp(-x1.^2).*sin(5*pi*x1);
>> figure(1); plot(x,f); plot(x1,g)
```

Pentru a suprapune o imagine pe alta, folosind numai posibilităţile funcţiilor de desenare, ca parametri ai comenzii trebuie de indicat consecutiv perechile de x,y la fiecare grafic în parte. Exemplu cu funcţia *plot*:

```
>> figure(2); plot(x,f, x1,g)
```



a) b)

Fig. 2.8. Graficul cu şi fără suprapunere (*hold on* şi *hold off*)

Adică, mai întâi trebuie de calculat valorile lui f(x), g(x) şi la sfârşit de chemat *plot*, separând prin virgulă perechile *x, f* şi *x, g* (vezi figura 2.8, a)).

Analogic si cu graficele 3-dimensionale (fig. 2.9).

```
>> raza=2; unghiul=[-2*pi:pi/20:2*pi];        %calcule preliminare
>> x2=raza*cos(unghiul);
>> y2=raza*sin(unghiul);
>> [x3,y3]=meshgrid(-raza:0.1:raza,-raza:0.1:raza);
>> z3=exp(-x3).*sin(pi*y3);
```

```
>> figure(3); plot3(x2,y2,unghiul)                %metoda 1
>> hold on
>> contour3(x3,y3,z3,[-raza:0.1:raza]);
>> figure(3); plot3(x2,y2,unghiul,x3,y3,z3);   %metoda 2
```

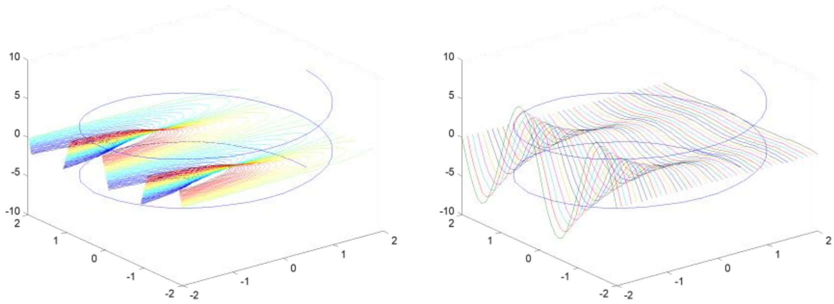


Fig. 2.9. Două grafice 3-dimensionale intr-o figură

2.5.2. Grafice cu axele proprii

Comanda *subplot* permite plasarea intr-o fereastră a graficului sau imprimarea pe aceiaşi hârtie a câteva grafice cu axele proprii. Comanda *subplot(m,n,p)* împarte figura într-o matrice *m* pe *n* de părţi a graficului iniţial, iar *p* este indexul părţi selectate (numerotarea este ca la matrice cu un singur index).

Fie că trebuie de vizualizat grafice pe 6 axe de coordonate într-o fereastră: două pe verticală şi trei pe orizontală. Se creează fereastra grafică cu ajutorul *figure* şi se aplică comanda

```
>> subplot(2,3,1)
```

În unghiul din stânga de sus apar axele. Primele două argumente din paranteze indică numărul de axe de coordonate pe verticală şi orizontală, ultimul indică numărul de ordine a axelor. Folosiţi *subplot(2,3,2), … , subplot(2,3,6)* pentru a crea axele următoare. Orice grafic poate fi desenat la axele active la momentul desenării, aplicând, de exemplu:

```
>> subplot(2,3,3)
```

```
>> bar([1.2 0.3 2.8 0.9])
>> subplot(2,3,6)
>> surf(x3,y3,z3)
```

2.5.3. Setarea axelor

Comanda axis are multe opţiuni pentru setarea scării, orientaţiei şi formatul de vizualizare a graficelor. De asemenea aceste modificări se pot executa interactiv.

Setarea limitelor axelor. Implicit, MATLAB găseşte valoarea maximală şi minimală a valorilor variabilelor şi alege limitele axelor în aşa mod, ca să cuprindă toate valorile. Comanda *axis* permite setarea limitelor proprii. Pentru grafice bidimensionale formatul este *axis([xmin xmax ymin ymax])*, iar pentru grafice 3-dimensionale - *axis([xmin xmax ymin ymax zmin zmax])*.

Comanda *axis auto* setează înapoi alegerea automată a limitelor.

Setarea modului de vizualizare. Totodată, comanda *axis* permite specificarea a unui număr pre-definit de moduri de vizualizare:

axis square	face axele egale după lungime
axis equal	face distanţele între gradările axelor egale. În rezultatul comenzii pe grafic cercul va fi cerc dar nu oval.
axis normal	returnează la modul automat de vizualizare

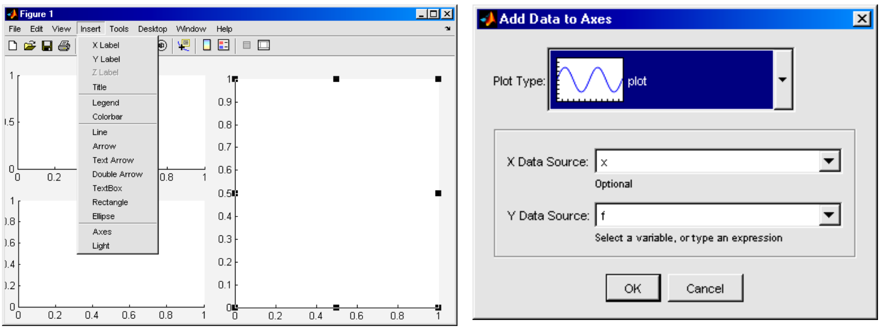
Vizibilitatea axelor. Implicit axele sunt vizibile. Comenzile *axis on* şi *axis off* schimbă starea în vizibil şi invizibil şi viceversa.

2.6. Crearea interactivă a graficelor

Fie că noi avem deja datele calculate a funcţiilor *f(x)* şi *g(x)* :

```
>> x=[-2:0.05:2];
>> f=exp(x).*sin(pi*x)+x.^2;
>> g=exp(-x.^2).*sin(5*pi*x);
```

Apelăm la comanda *figure* sau din meniul MATLAB selectăm ”*File->New->Figure*” şi ca rezultat apare fereastra graficului. Din meniu figurii alegem ”*Insert->Axes*” şi cu mausul desenăm axele în partea dreaptă a ferestrei. Repetăm operaţia şi desenăm încă două perechi de axe noi în partea stângă una sub alta (fig.2.10, a)). Activam axele din stânga sus şi apăsăm butonul drept al mausului; alegem “*Add data*” din meniul apărut. Apare fereastra de creare interactivă a graficului - de adăugare a datelor la axe (fig.2.10, b)).



a) b)

Fig. 2.10. Figura cu 3 axe (a) şi adăugarea datelor la axe (b).

În boxa ”*X Data source*” selectăm valorile abscisei, iar în boxa ”*Y Data source*” selectăm valorile ordonatei al graficului (în cazul nostru *x* şi *f* respectiv). Selectăm tipul graficului (*plot*) şi apăsăm butonul OK. Ca rezultat apare graficul pe axele selectate.

Construim graficul *f(x)* pe axele din stânga sus, *g(x)* pe axele din stânga jos şi, consecutiv, *f(x)* şi *g(x)* pe axele din dreapta (vezi Fig. 2.11).

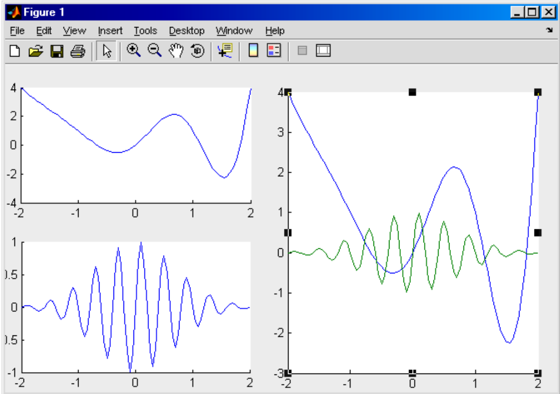


Fig. 2.11. Rezultatul creării interactive a figurii.

Selectând o funcţie în axa curentă, se poate de făcut schimbări ai tipului liniei, grosimii, culorii etc.

2.7. Oformarea graficelor

În MATLAB există comenzi şi funcţii speciale pentru oformarea graficelor.

Tipul liniilor, culoarea şi marcherii se determină prin valoarea argumentului al treilea suplimentar al funcţiei *plot*. Acest argument se indică între apostrofe, de exemplu, comanda *plot(x,f,'ro:')* va construi graficul funcţiei cu linie roşie şi marcheri rotunzi.

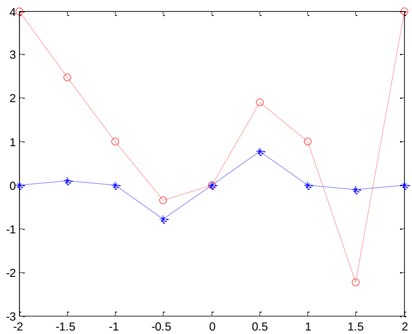


Fig. 2.12. Graficele funcţiilor cu culoarea, tipul de marcher şi stilul liniei schimbate

În argumentul suplimentar pot fi completate trei poziţii care corespund culorii, tipului de marcher şi stilului liniei, însemnările cărora sunt prezentate în tabelul 2.1:

Tabelul 2.1

Prescurtări pentru culori, tipul de marcher şi stilul liniei

Culoarea		**Tipul marcherului**	
y	Galben	.	Punct
m	Roz	o	Cerculeţ
c	Albalbastru	x	Cruciuliţă
r	Roşu	+	Semnul plus
g	Verde	*	Steluţă
b	Albastru	s	Pătrat
w	Alb	d	Romb
k	Negru	v	Triunghi cu vârful în jos
Tipul liniei		^	Triunghi cu vârful în sus
-	Dreaptă	<	Triunghi cu vârful în stânga
:	Punctată	>	Triunghi cu vârful în dreapta
-.	Linie-punct	p	Steluţă cu 5 colţuri
--	Linie întreruptă	h	Steluţă cu 6 colţuri

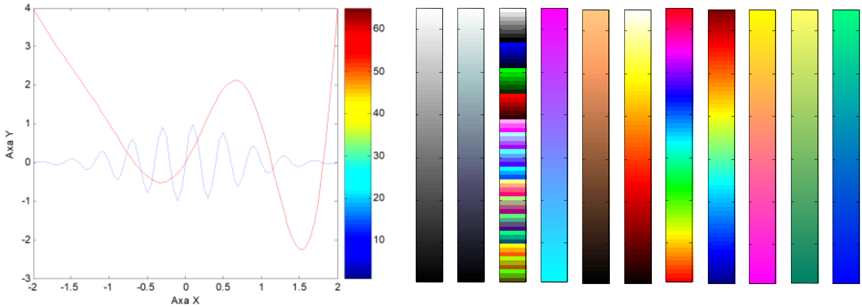
Comanda *colorbar* creează o coloană în fereastra graficului, care arată relaţia între culoare şi valoarea funcţiei *z(x,y)*. Paleta culorii graficului poate fi schimbată cu ajutorul funcţiei *colormap*, de exemplu, *colormap(gray)* reprezintă graficul culorile căruia sunt de nuanţă sură.

Unele palete a culorilor sunt prezentate mai jos (v. fig. 2.13):

- *bone* - seamănă cu aspectul gray, dar cu un ton uşor de culoare albastră;
- *colorcube* - fiecare culoare se schimbă de la închis până la deschis;
- *cool* - nuanţe de culori alb albastre şi purpurii;

- *copper* - nuanţe de culoarea cuprului;
- *hot* - schimbare lină: negru-roşu-oranj-galben-alb;
- *hsv* - schimbare lină (ca culorile curcubeului);
- *jet* - schimbare lină: albastru-alb albastru - verde- galben – roşu;
- *spring* - nuanţe de purpuriu şi galben;
- *summer* - nuanţe de verde şi galben;
- *winter* - nuanţe de albastru şi verde;

Valoarea implicită a paletei este *jet*.



a) b) c) d) e) f) g) h) i) j) k) l)

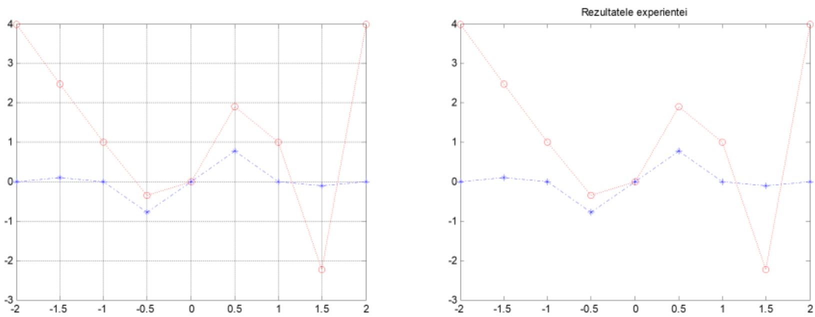
Fig. 2.13. Graficul funcţiei în rezultatul aplicării comenzilor: a) *colorbar*; şi *colormap* cu paletele b)*gray*; c)*bone*; d)*colorcube*; e)*cool*; f)*copper*; g)*hot*; h)*hsv*; i)*jet*; j)*spring*; k)*summer*; l)*winter*.

Comanda *grid on*, desenă gradarea pe grafic, iar comanda *grid off* şterge gradarea (v. fig. 2.14,a)).

Fiecare grafic are un titlu. Titlul se situează deasupra axelor în centru. Titlul graficului se plasează cu ajutorul funcţiei *title*, care are ca argument rândul respectiv în format *string* (se ia în apostrofe):

```
>> title('Rezultatele experienţei')
```

Apare figura 2.14, b).



a) *grid on* b) *title*

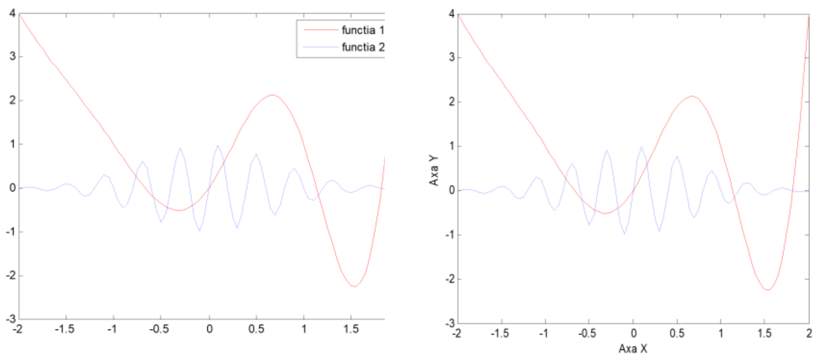
Fig. 2.14. Graficul funcţiei în rezultatul aplicării funcţiilor
a) *grid on;* b) *title.*

Reutilizarea comenzii *title* arăta titlul nou al graficului, care î-l înlocuieşte pe cel vechi.

Graficele, de asemenea, au şi câte o descripţie pentru fiecare axă, care se situează în dreptul fiecărei axe respective. Comenzile *xlabel*, *ylabel* şi *zlabel* servesc pentru a arăta descripţia la axele *x*, *y* şi *z*, respectiv. Argumentele lor la fel sunt în format *string*:

```
>> xlabel(‚Axa X'); ylabel('Axa Y'); zlabel('Axa Z')
```

Reutilizarea comenzilor *xlabel*, *ylabel* şi *zlabel* arăta descripţia nouă a axelor care o înlocuieşte pe cea veche.



a) b)

Fig. 2.15. Graficul funcţiei în rezultatul aplicării funcţiilor:
a) *legend*; b) *xlabel, ylabel.*

Pentru a descrie câteva grafice se aplică comanda *legend*. Înscrierile legendei, luate în apostrofe se indică în argumentele funcţiei *legend,* ordinea cărora trebuie să coincidă cu ordinea graficelor. Ultimul argument indică poziţia legendei (implicit 1):

- -1 în afara graficului în unghiul din dreapta de sus a ferestrei graficului
- 0 se alege poziţia cea mai bună în limitele graficului, astfel ca mai puţin să acopere graficele
- 1 în unghiul din dreapta de sus a graficului
- 2 în unghiul din stânga de sus a graficului
- 3 în unghiul din stânga de jos a graficului
- 4 în unghiul din dreapta de jos a graficului.

```
>> legend('functia 1','functia 2')
```

Pentru a plasa un obiect de tip text pe grafic putem folosi comanda text, formatul căreia este *text(x,y,z,'string'),* unde *x* şi *y* sunt coordonatele pe axe curente, urmat de textul în format *string* luat în apostrofe.

```
>> text(0,5,'Functia curenta.')
```

Parametrii *HorizontalAlignment* şi *VerticalAlignment* permit de a plasa textul în partea dorită faţă de punctul iniţial *z,y,z*. Parametrul *HorizontalAlignment* poate primi valorile *left*, *right* şi *center*, pe când parametrul *VerticalAlignment* poate primi valorile *middle, top, cap, baseline* şi *bottom*. Valorile implicite ale parametrilor sunt *HorizontalAlignment=left* şi *VerticalAlignment=middle*

```
>> text(0,5, 'Plasarea la dreapta', 'HorizontalAlignment','right')
```

În comenzile *title*, *xlabel*, *ylabel*, *zlabel* şi *text* pot fi utilizate următoarele argumente, care fac graficul mai citeţ: 'FontSize', 'Color', valorile cărora tot se indică ca argumentul următor, despărţite prin virgulă. Parametrul color este o matrice din 3 elemente cu valoarea de la 0 până la 1 pentru fiecare culoare roşu - verde - albastru (RGB – Red-Green-Blue).

```
>> title('Grafic','fontSize',14,'Color',[.3 0 0])
>> xlabel('Axa X', 'fontSize',12,'Color',[.5 0 0])
>> text(0,5,'Functia curenta.', 'fontSize',12,'Color',[.5 0 0])
```

La scrierea textului MATLAB oferă posibilitatea de includere a simbolurilor matematice, literelor Greceşti, precum şi formatul textului folosind secvenţele de caractere TEX.

Ele se încep cu simbolul “\”. Exemple:

\it	începutul simbolurilor aplecate (italic). Acoladele “{}” arată începutul şi sfârşitul.
\leq	semnul mai mic şi egal
\leftarrow	săgeată în stânga
\rightarrow	săgeată în dreapta
\pi	constanta pi
\omega	litera grecească omega

Exemple:

```
>> title('{\it font italic} font drept')
>> xlabel('-\pi \leq {\itt} \leq \pi')
```

Lista tuturor secvenţelor le puteţi vedea in anexa 2.

Pentru a scrie textul în două rânduri se foloseşte un tabel celular cu mai multe rânduri:

```
>> title({'primul rand';'al doilea rand'})
```

Pentru importarea imaginilor în Microsoft Word fără pierdere de calitate trebuie de exportat imaginea în fişier “emf” (Enhanced metafile, format vectorial) din meniul ”*File->Save as*” a ferestrei imaginii. Tot acelaşi rezultat putem obţine, dacă v-om copia în Clipboard imaginea prin meniul ”*Edit ->Copy figure*” iar pe urmă în documentul necesar. Folosind comanda *print* e posibil de memorizat în Clipboard sau în fişier:

print -dbitmap memorizează ca Windows bitmap (BMP)
print -dmeta memorizează Enhanced metafile (EMF).

Sarcina Lucrării nr. 2

I. Descrieţi comenzile de bază pentru construirea graficelor în pachetul MATLAB.

II. De construit graficele funcţiilor de o variabilă pe segmentul indicat. De indicat titlurile, de introdus înscrierile la axe, legenda, de folosit diferite culori, stiluri ale liniilor şi tipuri de marcheri. De construit graficele prin diferite metode:

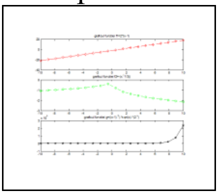
a) în ferestre diferite;

b) într-o fereastră pe aceleaşi axe;

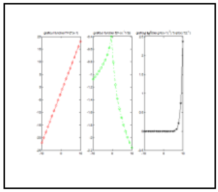
c) folosind comanda subplot :

c1) într-o fereastră pe axe diferite :

Orizontal,
f(x)
g(x)
f(x) şi *g(x)*

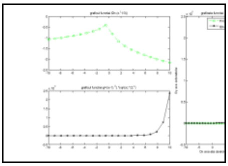


vertical
ambele pe axele din dreapta

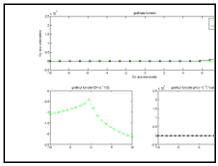


c2) într-o fereastră – fiecare aparte pe axe diferite şi ambele pe aceleaşi axe.

ambele pe axele din dreapta



ambele pe axele de sus



Vari-anta	Funcţia 1	Funcţia 2	Segmentul
1	$f(x) = \sin x$	$g(x) = \sin^2 x$	$x \in [-2\pi, 3\pi]$
2	$f(x) = \sin x^2$	$g(x) = \cos x^2$	$x \in [-\pi, \pi]$
3	$f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$	$g(x) = (x-1)^4$	$x \in [-1,1]$
4	$f(x) = \ln x^2$	$g(x) = x \ln x$	$x \in [-0.2, 10]$
5	$f(x) = \lvert 2x \rvert^3$	$g(x) = \lvert 2x \rvert^5$	$x \in [-0.5, 0.5]$
6	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^3$	$x \in [-1,1]$
7	$f(x) = \arcsin x$	$g(x) = \arccos x$	$x \in [-1,1]$

8	$f(x)=\cos^2 x,$	$g(x)=\ln(\lvert x\rvert+1)$	$x\in[-\pi,4\pi]$
9	$f(x)=x^2\ln x$	$g(x)=x\sin x$	$x\in[0.2,8]$
10	$f(x)=x^2\sin x$	$g(x)=x(\ln\lvert x\rvert+1)$	$x\in[-\pi,6\pi]$
11	$f(x)=\sin^3(x)$	$g(x)=\cos^3 x$	$x\in[-\pi,2\pi]$
12	$f(x)=x^2\cos x$	$g(x)=x^3\cos x$	$x\in[-\pi,3\pi]$
13	$f(x)=x\ln(x^2+1)$	$g(x)=x^2+x+2$	$x\in[-0.2,4]$
14	$f(x)=x\sin x^2$	$g(x)=x^2\cos x$	$x\in[-\pi,4\pi]$
15	$f(x)=2e^x\sin x$	$g(x)=x^2\cos^3 x$	$x\in[-1,3]$
16	$f(x)=5e^{-x}\cos x$	$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$	$x\in[0.1,4]$
17	$f(x)=x^2\sin^2 x$	$g(x)=x\cos x$	$x\in[-1,3]$
18	$f(x)=e^x\sin x^2$	$g(x)=x\cos^2 x$	$x\in[-1,2]$
19	$f(x)=x\cos x$	$g(x)=x\cos^2 x$	$x\in[-2\pi,2\pi]$
20	$f(x)=2\arcsin x$	$g(x)=x^2\cos x$	$x\in[-1,2]$
21	$f(x)=3e^{-x}\sin x$	$g(x)=e^x\cos x$	$x\in[0,3]$
22	$f(x)=x^2\sin x$	$g(x)=x\cos x$	$x\in[-\pi,\pi]$
23	$f(x)=3\arccos x$	$g(x)=e^{-x}\cos x$	$x\in[-1,1]$
24	$f(x)=x\sin x$	$g(x)=x(\ln\lvert x\rvert+1)$	$x\in[-1,3]$
25	$f(x)=xthx$	$g(x)=x^2\cos x$	$x\in[-1,2]$
26	$f(x)=(x^2+1)\sin x$	$g(x)=\ln(x^2+2)$	$x\in[-1,3]$
27	$f(x)=e^{-x}\sin^2 x$	$g(x)=x\cos x$	$x\in[-\pi,3\pi]$
28	$f(x)=3x\cos x$	$g(x)=x^2\cos^2 x$	$x\in[-\pi,\pi]$
29	$f(x)=x^2\cos x$	$g(x)=x\sin^2 x$	$x\in[-1,3]$
30	$f(x)=x^2(\ln\lvert x\rvert+2)$	$g(x)=e^x\sin x$	$x\in[-1,2]$

III. De construit graficul funcţiei de două variabile pe un sector dreptunghiular. Utilizaţi funcţiile grafice - *mesh, surf, meshc, surfc, contour*, *contourf*, *contour3*. Cotele la graficele de contur se aleg de sinestătător

Varianta	Funcţia	Segmentul 1	Segmentul 2
1	$z(x,y)=\sin x\cdot e^{-3y}$	$x\in[0,2\pi]$	$y\in[0,1]$
2	$z(x,y)=\sin^2 x\cdot\ln y$	$x\in[0,2\pi]$	$y\in[1,10]$
3	$z(x,y)=\sin^2(x-2y)\cdot e^{-\lvert y\rvert}$	$x\in[0,\pi]$	$y\in[-1,1]$
4	$z(x,y)=(\sin x^2+\cos y^2)^{xy}$	$x\in[-1,1]$	$y\in[-1,1]$
5	$z(x,y)=(1+xy)(3-x)(4-y)$	$x\in[0,3]$	$y\in[0,4]$
6	$z(x,y)=e^{-\lvert x\rvert}(x^5+y^4)\sin(xy)$	$x\in[-2,2]$	$y\in[-3,3]$
7	$z(x,y)=\dfrac{x^2y^2+2xy-3}{x^2+y^2+1}$	$x\in[-2,2]$	$y\in[-1,1]$
8	$z(x,y)=e^{-\lvert x\rvert}\cos^2(x-y)$	$x\in[-1,1]$	$y\in[-\pi,\pi]$
9	$z(x,y)=x^2e^{-\lvert y\rvert}\sin(xy)$	$x\in[-2,2]$	$y\in[-1,1]$
10	$z(x,y)=2x\cos x\ln y$	$x\in[-\pi,\pi]$	$y\in[1,5]$
11	$z(x,y)=e^{-\lvert x\rvert}(x^2+y^2)\cos(xy)$	$x\in[-1,2]$	$y\in[-2,3]$
12	$z(x,y)=\sin^2(x-3y)e^{-\lvert y\rvert}$	$x\in[0,\pi]$	$y\in[-1,1]$
13	$z(x,y)=\cos(x+2y^2)\ln(\lvert xy\rvert+1)$	$x\in[-1,1]$	$y\in[-1,2]$
14	$z(x,y)=2x\sin(xy)\ln(y+2)$	$x\in[-\pi,\pi]$	$y\in[-1,1]$

15	$z(x,y)=\sin\left(x^2+y^2\right)\cos(xy)$	$x\in[-\pi,2\pi]$	$y\in[-\pi,\pi]$
16	$z(x,y)=(1+2xy)(\sin x+\cos y)$	$x\in[-1,1]$	$y\in[-\pi,2\pi]$
17	$z(xy)=e^x\left[\cos(xy)+xy\right]$	$x\in[0,1]$	$y\in[-2,2]$
18	$z(xy)=x\sin(x)\ln y$	$x\in[0,\pi]$	$y\in[1,5]$
19	$z(x,y)=\sin(xy)\left(x^2y^2-3\right)$	$x\in[-2,2]$	$y\in[-1,1]$
20	$z(x,y)=2x^2e^y\cos(xy)$	$x\in[-1,1]$	$y\in[-0.5,1.5]$
21	$z(x,y)=2x\sin(x+y)\ln\left(\lvert y\rvert+2\right)$	$x\in[-\pi,\pi]$	$y\in[-2,2]$
22	$z(x,y)=(1+xy)\left[\sin(xy)+x\right]$	$x\in[-1,1]$	$y\in[-\pi,\pi]$
23	$z(xy)=\sin\left(2x-y^2\right)e^{-\lvert x\rvert}$	$x\in[-1,2]$	$y\in[0,2]$
24	$z(x,y)=x^2\cos(xy)\left(\ln\lvert xy\rvert+x\right)$	$x\in[-1,1]$	$y\in[-2,2]$
25	$z(xy)=\cos\left(x^2+y^2\right)\sin(xy)$	$x\in[-1.5,2]$	$y\in[-1,3]$
26	$z(x,y)=2xy\left[\sin(xy)+\cos(xy)\right]$	$x\in[-1,1]$	$y\in[-2,2]$
27	$z(x,y)=\left(x^2+y\right)e^{-y}\sin(xy)$	$x\in[-\pi,\pi]$	$y\in[0,1]$
28	$z(x,y)=\cos\left(x^2+2y\right)\ln\left(\lvert xy\rvert+2\right)$	$x\in[-0.5,2]$	$y\in[-1,3]$
29	$z(x,y)=2\sin(x+2xy)\cos(3xy)$	$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$	$y\in[-\pi,\pi]$
30	$z(xy)=2yu\cos(xy)\ln(xy)$	$x\in[1,3]$	$y\in[0.5,2]$

Lucrarea nr.3. Calculul caracteristicilor cinematice ale mişcării punctului .

3.1. Redactorul incorporat

Redactorul intern (incorporat) din MATLAB are aceleaşi facilităţi ca şi linia de comanda, plus avantajele unui compilator modern – executarea pas cu pas, setarea punctelor de stopare a programului etc.

Evident, că a lucra în M-file e mai convenabil, de cât în rândul de comandă, fiindcă se poate de păstrat programul, de adăugat operatori, de îndeplinit unele comenzi fără a apela la istoria comenzilor, ca în cazul rândului de comandă. Unicul neajuns este că erorile apar numai în fereastra liniei de comandă.

Pentru lansarea Editorului intern din MATLAB este nevoie de a face clic pe butonul ”New M-file” pe panelul de instrumente a mediului de lucru sau de selectat meniul ”*File->New-> M-file*”. Pe ecran va apărea fereastra redactorului.

Sfat practic.

Înainte de lansarea redactorului intern trebuie de schimbat catalogul (directoriul) curent.

Schimbarea e posibilă în fereastra principală a pachetului MATLAB (fig. 3.1). Indicarea (setarea) catalogului se poate de efectuat prin două metode:

1) În MATLAB catalogul curent se indică din fereastra Current Directory a mediului de lucru. Pentru a alege de pe disc catalogul dorit apăsaţi tasta plasată la dreapta de lista deschisă.

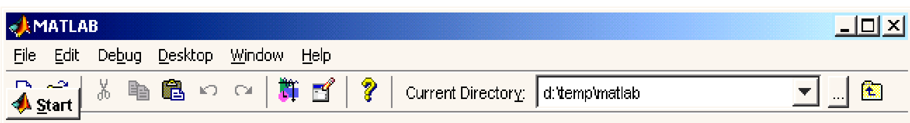


Fig. 3.1. Setarea directoriului curent.

2) Dacă se ştie catalogul de lucru atunci se poate de folosit comande ce emulează comande ale sistemului - CD, LS, PWD.

CD <DIR> - schimbarea catalogului curent. Se foloseşte în sistemele unix, windows.
Din engleză ”Change current working directory”

CD – vizualizarea catalogului curent (numai în MATLAB).

LS - vizualizarea catalogului curent. Se foloseşte în sistemele unix.
Din engleză ”List directory”.

PWD - vizualizarea catalogului curent. Din engleză ”Print current Working Directory”.

Când catalogul curent este identificat, toate M- fişierele care se găsesc în el, apar in fereastra Current Directory (fig. 3.2) şi pot fi pornite din rândul de comandă, sau din redactorul M-fişierelor.

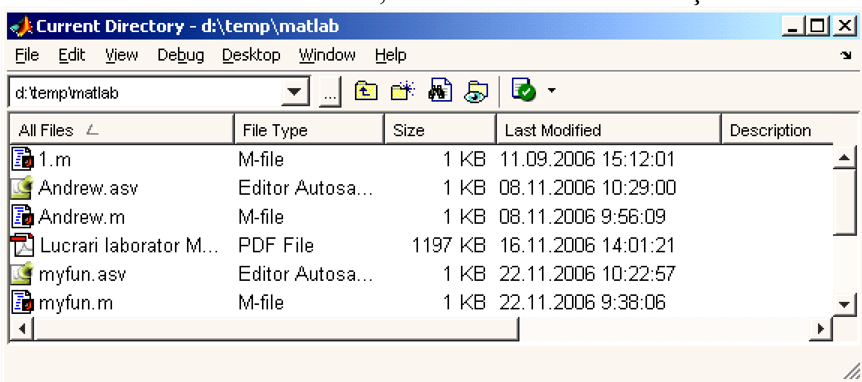


Fig. 3.2. Fereastra Curent Directory.

3.2. File-funcţii şi file-programe

Limbajul de programare, inclus în MATLAB este destul de simplu şi conţine minimum necesar pentru scrierea programelor. Înainte de a programa în MATLAB trebuie de înţeles, că toate programele pot fi sau file-funcţii, sau file-programe. File-programa este un fişier cu extensia ”.m”, de exemplu ”myprog.m”, în format text în care sunt înscrişi operatorii MATLAB. La apelarea file-programei toate comenzile din ea se execută. Să construim un file-program.

Culegeţi în redactorul incorporat careva comenzi, de exemplu, pentru a construi un grafic:

Exemplu 3.1. File-program

```
x=[-1:0.01:1];
y=exp(x);
plot(x,y)
grid on
title('Funcţia exponenţială')
```

Înainte de executarea programului fişierul automat se salvează deoarece oricare M-file înainte de apelare se re-citeşte de pe suportul memorizat (HDD,CD,Flash). Ulterior redactorul verifică catalogul curent - dacă catalogul curent diferă de cel al fişierului, apare următoarea fereastră (fig. 3.3):

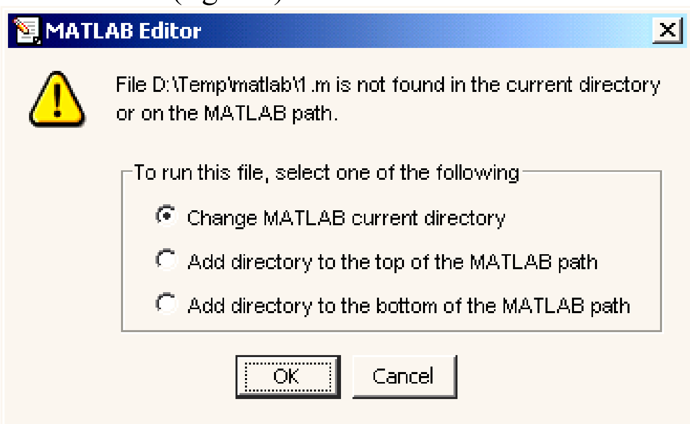


Fig. 3.3. Fereastra de schimbare a Curent Directory.

în care MATLAB propune :

1) să schimbe catalogul curent pe cel, în care se află programul

2) catalogul curent să adauge ca primul în lista de căutare a fişierelor din MATLAB

3) catalogul curent să adauge ca ultimul în lista de căutare a fişierelor din MATLAB

Pentru a executa programul în întregime trebuie de ales în meniul *Debug->Run* sau de apăsat <*F5*>.

Pentru executarea a unei părţi este nevoie de a evidenţia operatorii necesari pentru executare (cu ajutorul mausului apăsând tasta din stânga, sau cu ajutorul tastei <*Shift*> şi cu tastele <↑>, <↓>, <*Page-Up*>, <*Page-Down*>) şi de ales în meniul *Text->Evaluate Selection* sau de apăsat <*F9*>. Operatorii evidenţiaţi se îndeplinesc consecutiv, ca şi cum ei ar fi culeşi în rândul de comandă.

După ce programa din redactorul intern e păstrată în M-file, de exemplu în myprog.m, pentru a o porni din rândul de comandă este nevoie de cules numele a M-fişierului (fără extensie) şi de apăsat Enter, adică de îndeplinit ca o comandă MATLAB (se va îndeplini doar dacă e setat catalogul curent).

File-funcţiile se deosebesc de file-programe prin aceea că ele pot avea argumente de intrare şi de ieşire, dar toate variabilele cuprinse în file-funcţie, sunt locale şi nu se văd în mediu de lucru. M-fişierul, care conţine o file-funcţie, trebuie să se înceapă cu un titlu, după care se înscriu operatorii MATLAB. Titlul constă din cuvântul *function*, lista argumentelor de ieşire, numele file-funcţiei şi lista argumentelor de intrare:

function argument_de_ieşire=Nume_funcţie(arg_de_intrare)

Vectorul argumentelor de intrare (se separă prin spaţiu sau virgule) :

function argument_de_ieşire=Nume_ funcţie(argument_de_intrare1, argument_de_intrare2,...)

Analogic, vectorul argumentelor de ieşire (se separă prin spaţiu sau virgule):

function [argument_de_ieşire1 argument_de_ieşire2 ...]=Nume_ funcţie(argument_de_intrare)

Ţineţi minte:

Toate funcţiile se păstrează în M-fişiere cu acelaşi nume.

Exemplu 3.2. File-funcţia *mysum*

```
function c=mysum(a,b)
c=a+b;
```

Întotdeauna păstraţi file-funcţia în M-fişier numele căruia coincide cu numele file-funcţiei. Vă convingeţi, că catalogul cu fişierul dumneavoastră (în cazul dat mysum.m) este curent şi chemaţi funcţia mysum din rândul de comandă:

```
>> s=mysum(2,3)
s = 5
```

Observaţi, că operatorul *c=a+b;* în file-funcţia *mysum* are la sfârşit *;* pentru a opri apariţia variabilei locale *c* în fereastra de comandă.

Practic toate funcţiile pachetului MATLAB sunt file-funcţii şi se păstrează în M-fişiere cu acelaşi nume. Funcţia *sin* poate fi chemată prin două variante: sin(x) şi y=sin(x), în primul caz rezultatul se înscrie în *ans*, în al doilea – in variabila y. Funcţia noastră *mysum* se comportă la fel. Ba mai mult, în calitate de argumente de intrare pot fi masive de dimensiuni egale sau masiv şi număr.

A şti să scrii file-funcţii şi file-programe proprii este necesar cum la programare în MATLAB, la fel şi la rezolvarea diferitor probleme cu mijloacele MATLAB (în particular, căutarea rădăcinilor ecuaţiilor, integrarea, optimizarea). Să precăutăm un exemplu legat de construirea graficului funcţiei $f(x) = e^{-x}(\sin x + 0.1\sin(100\pi x))$ pe segmentul [0,1]. Programaţi file-funcţia myfun pentru calculul funcţiei $f(x)$. Apelaţi funcţia *myfun* în dependenţă de valorile vectorului x ca argument şi să obţineţi vectorul valorilor respective ale funcţiei.

Exemplu 3.3. File-funcţia myfun

```
function y=myfun(x);
```

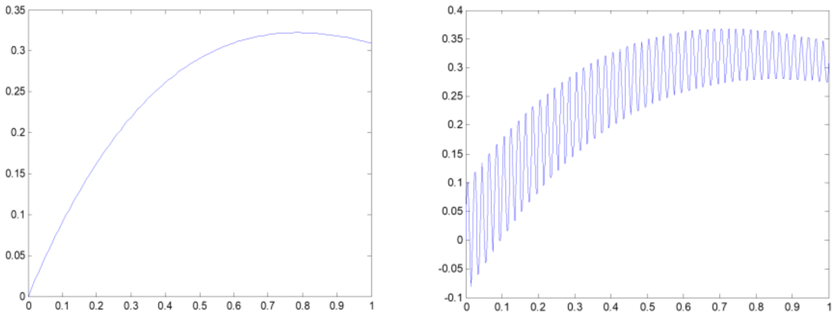
```
y=exp(-x).*(sin(x)+0.1*sin(100*pi*x));
```

Graficul funcţiei $f(x)$ poate fi obţinut prin două metode. Prima metodă constă în:

1) a crea vectorul valorilor argumentului, fie cu pasul 0.01
2) crearea vectorului valorilor funcţiei
3) chemarea funcţiei *plot*

```
>> x=[0:0.01:1];
>> y=myfun(x);
>> plot(x,y)
```

În rezultat obţinem graficul, prezentat în figura 3.4 a, care nu este corect.



a) b)

Fig. 3.4. Graficul obţinut cu *plot* (a) şi *fplot* (b)

Într-adevăr la calculul valorilor funcţiei pe segmentul [0,1] cu pasul 0.01 termenul $\sin(100\pi x)$ tot timpul era 0 şi *plot* a construit nu graficul funcţiei $f(x)$, dar al altei funcţii. Alegerea pasului fără a analiza funcţia duce la pierderea informaţiei esenţiale despre comportarea funcţiei. În MATLAB există funcţia *fplot* - un analog la *plot*, dar cu alegerea automată a pasului pentru construirea graficului. Primul argument în *fplot* este numele file-funcţiei, iar al doilea este vectorul, elementele căruia sunt marginile segmentelor: *fplot('numele* *file-funcţiei', [a b])*. Construiţi acum într-o fereastră nouă graficul funcţiei $f(x)$ cu ajutorul *fplot*:

```
>> figure
>> fplot('myfun',[0,1])
```

S-a primit graficul care redă exact comportarea funcţiei (fig. 3.4, b)).

Nu este greu de construit graficul unei funcţii parametrice. Fie că trebuie de construit graficul isteroidei $x(t)=\cos^3 t$, $y(t)=\sin^3 t$, $t\in[0,2\pi]$. Trebuie de determinat vectorul t, apoi valorile lui x(t), y(t) de le introdus în vectorii x şi y şi de folosit *plot*:

```
>> t=[0:pi/20:2*pi];
>> x=cos(t).^3;
>> y=sin(t).^3;
>> plot(x,y)
```

Funcţia *comet* ne dă posibilitatea de a urmări mişcarea punctului pe traiectorie. Viteza mişcării poate fi schimbată, schimbând pasul lui t.

Analogul 3-D a lui *plot* este funcţia *plot3*. Dacă x, y şi z sunt trei vectori de aceeaşi lungime, *plot3(x,y,z)* generează o linie 3-D prin punctele cu coordonatele x, y, şi z şi apoi produce o proiecţie 2-D a acestei linii pe ecran. De exemplu, comenzile de mai jos creează o elice

```
>> t = 0:pi/50:10*pi;
>> plot3(sin(t),cos(t),t)
>> axis square; grid on
```

Analogul 3-D a lui *comet* este *comet3*. Ea descrie mişcarea punctului ca o „cometă” pe traiectoria în spaţiu, determinată de punctele [X(i),Y(i),Z(i)]. Această funcţie are următoarea sintaxă *comet3 (X, Y, Z)*

Sarcina Lucrării nr. 3

I. De declarat funcţia din tabel file-funcţie şi de construit graficele pe segmentul dat cu ajutorul *plot* (pasul 0.05) şi *fplot*:

Varian-ta	Funcţia	Segmentul
1	$f(x)=e^{3x\sin 5\pi x}+e^{3x\cos 5\pi x}$	$x\in[0,1]$
2	$f(x)=\dfrac{10}{11-10\sin 21\pi x}$	$x\in[0.05,1]$
3	$f(x)=\sqrt{\dfrac{\lvert\sin 21\pi x\rvert}{2+\sin 20\pi x}}$	$x\in[0,1]$
4	$f(x)=\dfrac{1}{arctg(1/(1.1+\sin 5\pi x))^{-2/3}}$	$x\in[0,1]$
5	$f(x)=\cos\left(\dfrac{1}{\frac{2\pi}{11}-\operatorname{arctg} x^{x}}\right)$	$x\in[0,1]$
6	$f(x)=\sin\left(6\pi\left\lvert x-\frac{2}{3}\right\rvert x^{3}\right)$	$x\in[0,1]$
7	$f(x)=\sin 2\pi\sqrt{\left\lvert\sqrt{1-x^{3}}-\frac{4}{7}\right\rvert}$	$x\in[0,1]$
8	$f(x)=3\sin\dfrac{1}{x},$	$x\in[0.05,1]$
9	$f(x)=2\lvert\sin 20\pi x\rvert$	$x\in[0,1]$

10	$f(x)=\dfrac{2}{\sin\left(e^{2x}-e^{-x}\right)+\cos\left(e^{2x}-e^{-x}\right)}$	$x\in[-1,1]$
11	$f(x)=2\sin\dfrac{1}{2x}$	$x\in[0.05,1]$
12	$f(x)=2x\sin 6\pi x+e^{2x\cos 6\pi x}$	$x\in[0,1]$
13	$f(x)=\dfrac{12}{14-12\sin 21\pi x}$	$x\in[0.05,1]$
14	$f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{\lvert\sin 23\pi x\rvert}{3+\sin 21\pi x}}$	$x\in[0,1]$
15	$f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{\dfrac{2\pi}{11}-arctgx^{2x}}\right)$	$x\in[0,1]$
16	$f(x)=\dfrac{1}{arcctg\,\dfrac{1}{1.2+\sin 7\pi x}}$	$x\in[0,1]$
17	$f(x)=2\sin\left(7\pi\left\lvert x-\dfrac{1}{3}\right\rvert x^{2}\right)$	$x\in[0,1]$
18	$f(x)=3\lvert\sin 30\pi x\rvert+x^{2}$	$x\in[0,1]$
19	$f(x)=\cos\left(\dfrac{5}{\dfrac{3\pi}{11}-arctgx^{5}}\right)$	$x\in[0,1]$
20	$f(x)=3e^{x\cos 7\pi x}+3e^{x\cos 7\pi x}$	$x\in[0,1]$

21	$f(x)=3\cos\left(7\pi\left\|x^2-\frac{1}{3}\right\|x^5\right)$	$x\in[0,1]$
22	$f(x)=5\sin\left(10\pi x^2+2\cos\pi x\right)$	$x\in[0,1]$
23	$f(x)=3\sin\left(\pi x+100\pi x^2\right)$	$x\in[0,1]$
24	$f(x)=\sqrt[5]{\frac{\|\sin 25\pi x\|}{2+\cos 23\pi x}}$	$x\in[0,1]$
25	$f(x)=\frac{13}{15-11\sin 50\pi x}$	$x\in[0,1]$
26	$f(x)=2e^{x\sin 7\pi x}+3e^{x\cos 7\pi x}$	$x\in[0,1]$
27	$f(x)=5\|\cos 30\pi x\|+x^{1/3}$	$x\in[0,1]$
28	$f(x)=\left(\sin 50\pi x\right)^{1/3}+x^{1/2}$	$x\in[0,1]$
29	$f(x)=\sqrt[5]{\frac{\|\sin 30\pi x\|}{2+\sin 25\pi x}}$	$x\in[0,1]$
30	$f(x)=\sin 4\pi\sqrt[3]{\left\|x^3-arctge^x\right\|}$	$x\in[0,1]$

II. De scris două file-funcţii. Prima (spre exemplu, cu denumirea xy) are parametrul de intrare - t (timpul) , iar parametrii de ieşire valorile coordonatelor punctului material în timpul mişcării (x şi y) pentru timpul respectiv . A doua (spre exemplu, cu denumirea figpas) are parametrii de intrare numărul ferestrei grafice(fig) şi pasul de calcul al coordonatelor x şi y (pas) ,iar la ieşire afişează traiectoria punctului în intervalul dat de timp şi poziţia punctului pe traiectorie pentru un moment de timp ales aleatoriu din intervalul dat. Chemarea file-funcţiei figpas se face din Comand Windows.

a) De construit graficul traiectoriei plane a punctului material cu ajutorul comenzilor comet şi plot. De arătat poziţia punctului pe traiectorie pentru un moment de timp ales aleatoriu din intervalul dat. De experimentat diferite valori ale pasului de calcul.
b) De calculat viteza, acceleraţia, acceleraţia tangenţială, acceleraţia normală şi raza curburii traiectoriei penru momentul de timp ales.
c) De arătat pe graficul traiectoriei toţi vectorii din punctul precedent, utilizând pentru aceasta instrumentele ferestrei grafice.
d) De construit un tabel cu toate rezultatele obţinute.

Varianta	$x(t)$	$y(t)$	t
1	$x(t) = t - \sin t$	$y(t) = 1 - \cos t$	$[0,4\pi]$
2	$x(t) = 2\sin t - \frac{2}{3}\sin 2t$	$y(t) = 2\cos t - \frac{2}{3}\cos 2t$	$[0,3\pi]$
3	$x(t) = 9\sin \frac{t}{10} - \frac{1}{2}\sin \frac{9}{10}t$	$y(t) = 9\cos \frac{1}{10}t + \frac{1}{2}\cos \frac{9}{10}t$	$[0,4\pi]$
4	$x(t) = \cos t$	$y(t) = \sin(\sin t)$	$[0,4\pi]$
5	$x(t) = e^{-t}\cos t$	$y(t) = \sin t$	$[0,2\pi]$
6	$x(t) = e^{-t}\cos t$	$y(t) = e^{t}\sin t$	$[0,2\pi]$

7	$x(t)=t(t-2\pi)$	$y(t)=\sin t$	$[0,4\pi]$
8	$x(t)=t^2-2\cos t$	$y(t)=1-\sin t$	$[0,5\pi]$
9	$x(t)=2\cos t+\frac{3}{2}\cos 2t$	$y(t)=2\sin t+\frac{3}{2}\sin 2t$	$[0,4\pi]$
10	$x(t)=2e^{-t}\sin t$	$y(t)=3e^{-t}\cos t$	$[0,4\pi]$
11	$x(t)=3\sin t$	$y(t)=2\cos(\sin t)$	$[0,4\pi]$
12	$x(t)=e^{t}\cos t$	$y(t)=3\sin(\cos t)$	$[0,3\pi]$
13	$x(t)=t(1-\sin t)$	$y(t)=2-\cos t$	$[0,4\pi]$
14	$x(t)=te^{-t}\sin t$	$y(t)=1-\cos t$	$[0,4\pi]$
15	$x(t)=2t\cos(arctgt)$	$y(t)=3\sin t^2$	$[0,4\pi]$
16	$x(t)=t+\sin 2t$	$y(t)=2e^{-t}\cos t$	$[0,2\pi]$
17	$x(t)=2\cos(t+1)$	$y(t)=3\sin 2t+t$	$[0,2\pi]$
18	$x(t)=3e^{-t}\cos(2t)$	$y(t)=2\sin^2 t$	$[0,2\pi]$
19	$x(t)=2\ln(t+1)\sin t$	$y(t)=3\cos t$	$[0,3\pi]$
20	$x(t)=t(1+\cos t)$	$y(t)=2t(1+\sin t)$	$[0,2\pi]$
21	$x(t)=e^{t}\sin 2t$	$y(t)=t(1+\cos t)$	$[0,\pi]$
22	$x(t)=2\sin(\cos t)$	$y(t)=t\cos t^2$	$[0,\pi]$
23	$x(t)=\frac{2}{t+0.1}\cos 2t$	$y(t)=(t+1)^{1/2}\sin t$	$[0,\pi]$

24	$x(t)=(t^2+1)\sin 2t$	$y(t)=t\cos t$	$[0,2\pi]$
25	$x(t)=t\sin t+\cos t$	$y(t)=\cos 2t$	$[0,2\pi]$
26	$x(t)=2\cos(\sin t)$	$y(t)=3\sin(t-1)$	$[0,2\pi]$
27	$x(t)=t(1-\cos 2t)$	$y(t)=t\sin 2t$	$[0,3\pi]$
28	$x(t)=2\sin t+1.3\sin 2t$	$y(t)=t\cos 2t$	$[0,3\pi]$
29	$x(t)=3\sin(\arccos t)$	$y(t)=2\sin t$	$[0,4\pi]$
30	$x(t)=t\cos 2t$	$y(t)=\sin t+\ln(t+1)$	$[0,2\pi]$

III. . De scris două file-funcţii. Prima (spre exemplu, cu denumirea xyz) are parametrul de intrare - t (timpul) , iar parametrii de ieşire valorile coordonatelor punctului material în timpul mişcării (x,y şi z) pentru timpul respectiv . A doua (spre exemplu, cu denumirea figpas) are parametrii de intrare numărul ferestrei grafice(fig) şi pasul de calcul al coordonatelor x şi y (pas) ,iar la ieşire afişează traiectoria punctului în intervalul dat de timp şi poziţia punctului pe traiectorie pentru un moment de timp ales aleatoriu din intervalul dat. Chemarea file-funcţiei figpas se face din Comand Windows.

a) De construit graficul traiectoriei spaţiale a punctului material cu ajutorul comenzilor comet3 şi plot3.De arătat poziţia punctului pe traiectorie pentru un moment de timp ales aleatoriu din intervalul dat. De experimentat diferite valori ale asului de calcul.

в) De calculat viteza, acceleraţia, acceleraţia tangenţială, acceleraţia normală şi raza curburii traiectoriei pentru momentul de timp ales.

c) De construit un tabel cu toate rezultatele obţinute.

Varianta	x(t); y(t); z(t)	t
1	$x(t)=t(t-2\pi);\ y(t)=\sin(t);\ z(t)=2t$	$[0,4\pi]$
2	$x(t)=e^{-t}\cos t$ $y(t)=e^{t}\sin t$ $z(t)=1.5t$	$[0,2\pi]$
3	$x(t)=e^{-t}\cos t$ $y(t)=\sin t$ $z(t)=1.2t^{1.3}$	$[0,4\pi]$
4	$x(t)=9\sin\frac{t}{10}-\frac{1}{2}\sin\frac{9}{10}t$ $y(t)=9\cos\frac{1}{10}t+\frac{1}{2}\cos\frac{9}{10}t$ $z(t)=1.5t^{1.2}$	$[0,3\pi]$
5	$x(t)=e^{-t}\cos t$ $y(t)=e^{t}\sin t$ $z(t)=2t^{1/2}$	$[0,2\pi]$
6	$x(t)=\cos t$ $y(t)=\sin(\sin t)$ $z(t)=2t^{1/3}$	$[0,4\pi]$
7	$x(t)=t-\sin t$ $y(t)=\sin t$ $z(t)=1.2t^{1.5}$	$[0,3\pi]$
8	$x(t)=t\cos 2t$, $y(t)=\sin t+\ln(t+1)$, $z(t)=2t$	$[0,2\pi]$
9	$x(t)=3\sin(\arccos t)$ $y(t)=2\sin t$ $z(t)=1.4t^{1/3}$	$[0,4\pi]$
10	$x(t)=2\sin t+1.3\sin 2t$ $y(t)=t\cos 2t$ $z(t)=1.2t^{2}$	$[0,3\pi]$
11	$x(t)=t(1-\cos 2t)$ $y(t)=t\sin 2t$ $z(t)=1.3t$	$[0,3\pi]$
12	$x(t)=2\cos(\sin t)$ $y(t)=3\sin(t-1)$ $z(t)=t^{1/2}$	$[0,2\pi]$
13	$x(t)=t\sin t+\cos t$ $y(t)=\cos 2t$ $z(t)=2t^{1/3}$	$[0,2\pi]$

14	$x(t)=(t^2+1)\sin 2t \quad y(t)=t\cos t \quad z(t)=1,5t$	$[0,2\pi]$
15	$x(t)=\dfrac{2}{t+0.1}\cos 2t \quad y(t)=(t+1)^{1/2}\sin t$ $z(t)=2\sqrt{t}$	$[0,\pi]$
16	$x(t)=2\sin(\cos t) \quad y(t)=t\cos t^2 \quad z(t)=3t$	$[0,\pi]$
17	$x(t)=e^t\sin 2t \quad y(t)=t(1+\cos t) \quad z(t)=1.3t^{1/2}$	$[0,\pi]$
18	$x(t)=t(1+\cos t) \quad y(t)=2t(1+\sin t) \quad z(t)=2t^{1.3}$	$[0,2\pi]$
19	$x(t)=t^2-2\cos t \quad y(t)=1-\sin t \quad z(t)=1.5t$	$[0,5\pi]$
20	$x(t)=2\cos t+\dfrac{3}{2}\cos 2t \quad y(t)=2\sin t+\dfrac{3}{2}\sin 2t$ $z(t)=1.4t^{2/3}$	$[0,4\pi]$
21	$x(t)=2e^{-t}\sin t \quad y(t)=3e^{-t}\cos t \quad z(t)=3t^{1/3}$	$[0,4\pi]$
22	$x(t)=3\sin t \quad y(t)=2\cos(\sin t) \quad z(t)=1.7t^{3/2}$	$[0,4\pi]$
23	$x(t)=e^t\cos t \quad y(t)=3\sin(\cos t) \quad z(t)=t^{3/4}$	$[0,3\pi]$
24	$x(t)=t(1-\sin t) \quad y(t)=2-\cos t \quad z(t)=1.6t^{2/5}$	$[0,4\pi]$
25	$x(t)=te^{-t}\sin t \quad y(t)=1-\cos t \quad z(t)=1.3t^2$	$[0,4\pi]$
26	$x(t)=2t\cos(arctgt) \; y(t)=3\sin t^2$ $z(t)=1.5t^{3/5}$	$[0,4\pi]$
27	$x(t)=t+\sin 2t \quad y(t)=2e^{-t}\cos t \quad z(t)=2t^{5/3}$	$[0,2\pi]$

28	$x(t)=2\cos(t+1)\quad y(t)=3\sin 2t+t\quad z(t)=3t^{1.7}$	$[0,2\pi]$
29	$x(t)=3e^{-t}\cos(2t)\quad y(t)=2\sin^2 t\quad z(t)=2.1t^{4/3}$	$[0,2\pi]$
30	$x(t)=2\ln(t+1)\sin t\quad y(t)=3\cos t\quad z(t)=1.7t^{3/2}$	$[0,3\pi]$

3.3. Indicaţii metodice utile

- **În MATLAB derivatele pot fi calculate aplicând calculul simbolic. De exemplu:**

```
>> syms t
>> x=sin(t);vx=diff(x)
vx = cos(t)
```

- **File-funcţiile *xy* şi *figpas* pot avea următoarele structuri:**

```
function [x,y]=xy(t)
x=sin(t);
y=cos(t);

function figpas(fig,pas)

tmax=4*pi;
t=0:pas:tmax;
[x,y]=xy(t);
figure(fig)
%Construim traiectoria
punctului material
comet(x,y);plot(x,y)
hold on
%Determinam timpul de
calcul si pozitia punctului
t=tmax*rand
[x,y]=xy(t);
%Construim pozitia punctului
pe traiectorie
plot(x,y,'ro-')
title(['t =  ',num2str(t)])
hold on
grid on
xlabel('axa-OX')
ylabel('axa-OY')
legend('y=f(x),Traiectoria')
```

- **Cinematica punctului. Mişcarea punctului poate fi descrisă prin trei metode principale : metoda vectorială ; metoda coordonatelor carteziene şi metoda naturală. În cazul metodei vectoriale mişcarea este descrisă de ecuaţia mişcării r = r(t) ce reprezintă dependenţa razei vectoare r (vectorul de poziţie) de timpul t . În cazul metodei coordonatelor carteziene sunt date ecuaţiile mişcării x = x(t) , y = y(t) , z = z(t) ; x , y , z sunt coordonatele carteziene ale punctului. Metoda naturală presupune cunoaşterea coordonatei naturale σ ca funcţie de timp: σ=σ(t). Dacă cunoaştem ecuaţiile mişcării , putem determina caracteristicile cinematice ale mişcării punctului . În următorul tabel sunt aduse cele mai principale formule din cinematica punctului.**
- **Principalele notaţii : $\vec{a}^{n}$ –acceleraţia normală , este orientată spre centrul curburii perpendicular la vectorul vitezei ; $\vec{a}^{\tau}$ – acceleraţia tangenţială , este orientată pe tangentă la traiectorie şi coincide după**

direcţie cu vectorul vitezei la mişcarea accelerată şi este opusă la mişcarea întârziată ; $\vec{a}$ - acceleraţia totală; ρ – raza curburii.

Cinematica punctului		
Metoda de descriere a mişcării , ecuaţia mişcării	$\vec{v}$ - viteza	$\vec{a}$ - acceleraţia
Metoda vectorială , $\vec{r} = \vec{r}(t)$	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
Metoda coordonatelor carteziene, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$	$v_x = \dot{x}$; $v_y = \dot{y}$; $v_z = \dot{z}$ $v=\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ $\cos(\alpha_1)=v_x/v$, $\cos(\beta_1)=v_y/v$ $\cos(\gamma_1)=v_z/v$	$a_x=\ddot{x}$ $a_y = \ddot{y}$ $a_z=\ddot{z}$ $a=\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ $\cos(\alpha_2)=a_x/a$, $\cos(\beta_2)=a_y/a$ $\cos(\gamma_2)=a_z/a$
Metoda naturală $\sigma = \sigma(t)$	$v = \lvert\dot{\sigma}\rvert$ Viteza este orientată pe tangentă la traiectorie în direcţia mişcării .	$\vec{a} = \vec{a}^n + \vec{a}^\tau$, $a^n = v^2/\rho$ $a^\tau = \left\lvert\frac{dv}{dt}\right\rvert = \frac{\lvert v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z\rvert}{v}$ $a = \sqrt{(a^n)^2 + (a^\tau)^2}$

Lucrarea nr.4.Compunerea oscilaţiilor armonice

4.1. Caracteristicile cinematice ale proceselor oscilatorii.

Fie că un proces oscilatoriu este descris de o mărime scalară variabilă cu timpul , de exemplu , deplasarea **x(t)** (fig.1)**.**
Procesul oscilatoriu se numeşte periodic,dacă orice valori ale mărimii oscilatorii se repetă după intervale egale de timp , adică există o asemenea valoare minimă a timpului **T**, că pentru orice t se îndeplineşte condiţia

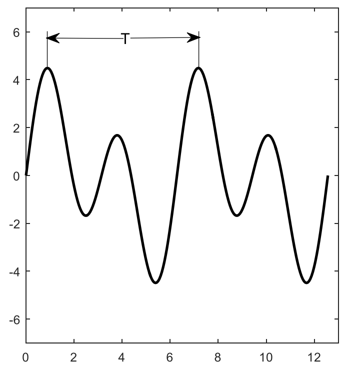


fig.1

$$\mathbf{x(\ t + T) = x(t)} \qquad (1)$$

Mărimea **T** se numeşte **perioada** procesului oscilatoriu. Mărimea inversă lui T se numeşte frecvenţa procesului oscilatoriu şi se notează cu **f**.

$$\mathbf{f} = \frac{1}{T} \qquad (2)$$

Frecvenţa **f** se măsoară în **Hz (** Hertz). În tehnică se foloseşte noţiunea de frecvenţă circulară (pulsaţia), adică numărul de oscilaţii în **2π** unităţi de timp (secunde) şi care se notează **ω**

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{2\pi}{T} \qquad (3)$$

Pulsaţia se măsoară în $\frac{rad}{s}$,sau se notează **n** şi se măsoară în $\frac{rot}{\min}$ .Trecerea de la $\frac{rot}{\min}$ la $\frac{rad}{s}$ are loc conform formulei

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\pi \cdot n}{30} \qquad (4)$$

Cel mai simplu proces oscilatoriu este mişcarea armonică în care parametrul **x** se exprimă în funcţie de timpul **t** prin relaţiile

$$\mathbf{x=A\sin(\omega \cdot t+\alpha)} \qquad (5)$$

sau

$$\mathbf{x=A\cos(\omega \cdot t+\alpha)} \qquad (6)$$

Prin urmare mişcarea oscilatorie armonică este o mişcare periodică.

Punctul, în vecinătatea căruia se execută mişcarea oscilatorie ,se numeşte centrul de oscilaţie.

În mişcarea oscilatorie armonică valoarea la un moment dat al para metrului **x** ,se numeşte **elongaţie.**

Valoarea maximă a elongaţiei, adică **A**, se numeşte **amplitudinea** (A> 0) , **(ω·t+α)** – se numeşte faza oscilaţiei, **α** – faza iniţială, iar **ω** - pulsaţia .

Pentru o reprezentare mai intuitivă a oscilaţiei armonice se poate folosi diagrama circulară, adică se introduce un vector de lungimea A, care se roteşte uniform cu o viteză unghiulară **ω**. Poziţia iniţială a vectorului se defineşte prin unghiul **α** . Proiectând acest vector pe orizontală , sau pe verticală ,vom obţine ecuaţiile în for mele (6) sau (5) (fig.2).

Viteza oscilaţiei armonice (5)

$$v=\frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega \cdot t+\alpha) , \qquad (7)$$

iar acceleraţia

$$a= -\omega^2 A\sin(\omega\cdot t+\alpha), \qquad (8)$$

Amplitudinea vitezei şi acceleraţiei, corespunzător sunt egale cu **a·ω** şi **aω²**.

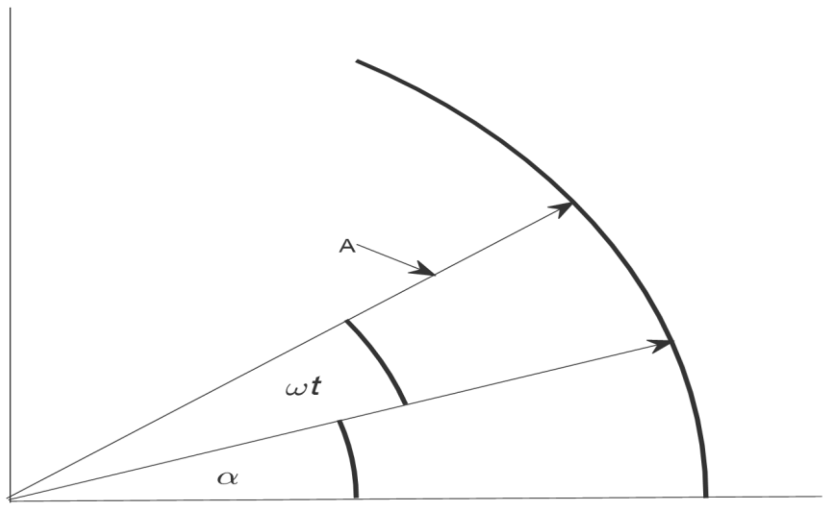


fig.2

4.2. Compunerea oscilaţiilor armonice de aceiaşi direcţie.

Sub compunerea oscilaţiilor se înţelege determinarea oscilaţiei rezultante dacă sistema oscilatorie simultan participă la mai multe procese oscilatorii. Un interes deosebit prezintă două cazuri particulare de compunere a două procese oscilatorii: cazul oscilaţiilor de aceiaşi direcţie şi cazul oscilaţiilor de direcţii reciproc perpendiculare.Să studiem compunerea a două oscilaţii armonice de aceiaşi direcţie .

$x_1=a_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)$ şi $x_2=a_2\cos(\omega_2+\alpha_2)$. (9)

Din diagramă (fig.3) găsim amplitudinea oscilaţiei rezultante

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2 . \qquad (10)$$

Proiectăm relaţia vectorială (10) pe axele x şi y .

$$a_x= a_{1x}+a_{2x}=a_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+a_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2),$$
$$a_y=a_{1y}+a_{2y}=a_1\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+a_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2).$$

Amplitudinea oscilaţiei rezultante

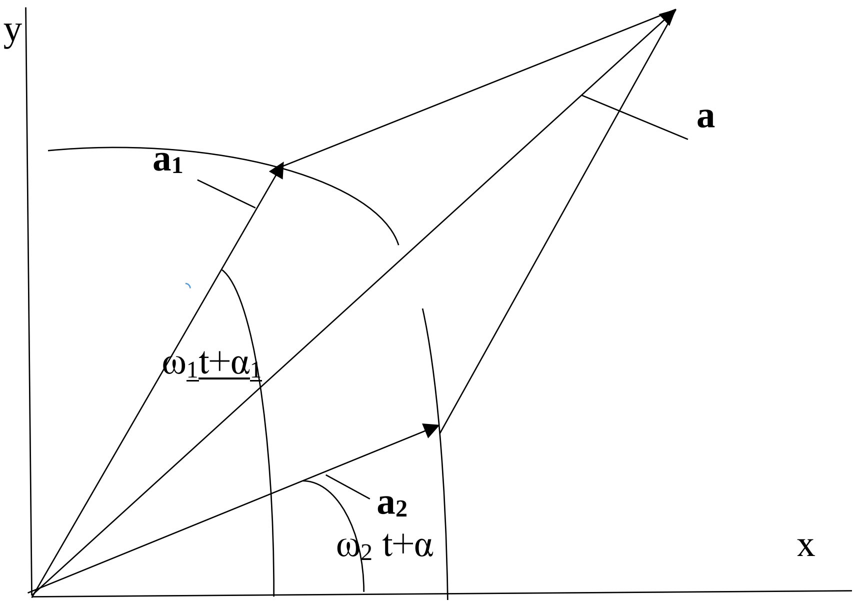


fig.3

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$a=\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos[(\omega_2 - \omega_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1)} \quad (11)$$

$$tg(\omega t + \alpha) = \frac{a_y}{a_x} = \frac{a_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)}{a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)} \quad (12)$$

Fie că ne interesează compunerea oscilaţiilor de-a lungul axei x . Atunci

$$x=a_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1) +a_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2) =a \cos (\omega\cdot t + \alpha), \quad (13)$$

unde amplitudinea oscilaţiei rezultante **a** şi faza **(ω·t + α)** sunt date de formulele (11) şi respectiv (12). Cazul studiat mai sus este un caz general,adică $\omega_1 \neq \omega_2$ şi $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Este evident,că în acest caz , amplitudinea şi faza oscilaţiei rezultante sunt funcţii de timp. Oscilaţiile componente în acest caz se numesc **necoerente**(incoerente). Două oscilaţii armonice x_1 şi x_2 se numesc **coerente**,dacă diferenţa de faze nu depinde de timp,adică

$$(\omega_2 t+\alpha_2) - (\omega_1 t+\alpha_1) = \text{const.},$$

sau

$$(\omega_2 - \omega_1)\, t +(\alpha_2 - \alpha_1) = \text{const.}$$

Pentru îndeplinirea condiţiei de coerenţă a două oscilaţii trebuie ca

$$\omega_1 = \omega_2 =\omega.$$

Să studiem compunerea a două oscilaţii armonice coerente în aceiaşi direcţie. Amplitudinea oscilaţiei rezultante

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1a_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \quad (14)$$

$$tg(\omega t + \alpha) = \frac{a_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + a_2 \sin(\omega t + \alpha_2)}{a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega t + \alpha_2)} \quad (15)$$

$$tg(\alpha) = \frac{a_1 \sin(\alpha_1) + a_2 \sin(\alpha_2)}{a_1 \cos(\alpha_1) + a_2 \cos(\alpha_2)} \qquad (16)$$

Oscilaţia rezultantă de-a lungul axei x este

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) \qquad (17)$$

şi deci oscilaţia rezultantă a compunerii a două oscilaţii armonice cu frecvenţe egale de aceleaşi direcţii este de asemenea oscilaţie armonică de aceiaşi frecvenţă.

Să analizăm dependenţa oscilaţiilor armonice coerente de fazele iniţiale.

a) Fie $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm (2n+1)\pi$.

Amplitudinea , este

$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2} = |a_1 - a_2|$, iar faza iniţială

$$tg(\alpha) = \frac{a_1 \sin(\alpha_1) + a_2 \sin(\alpha_1 + \pi)}{a_1 \cos(\alpha_1) + a_2 \cos(\alpha_1 + \pi)} = \frac{(a_1 - a_2)\sin(\alpha_1)}{(a_1 - a_2)\cos(\alpha_1)} = tg(\alpha_1)$$

Deci în acest caz amplitudinea rezultantă va avea valoarea minimă, iar oscilaţiile ce se compun vor fi în faze opuse. Dacă $a_1 = a_2$, atunci amplitudinea oscilaţiei rezultante va fi egală cu zero .

b) Fie $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm 2n\pi$. Atunci

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2} = a_1 + a_2$$

$$tg(\alpha) = \frac{a_1 \sin(\alpha_1) + a_2 \sin(\alpha_1 + 2n\pi)}{a_1 \cos(\alpha_1) + a_2 \cos(\alpha_1 + 2n\pi)} = \frac{(a_1 + a_2)\sin(\alpha_1)}{(a_1 + a_2)\cos(\alpha_1)} = tg(\alpha_1)$$

Deci în acest caz amplitudinea rezultantă va avea valoarea maximă iar oscilaţiile ce se compun vor fi în aceiaşi fază. Dacă $a_1=a_2$,atunci $a=2a_1$.

c) compunerea oscilaţiilor armonice de aceiaşi direcţie cu frecvenţe valorile cărora diferă foarte puţin .

Fie frecvenţele oscilaţiilor componente $\omega_1 \neq \omega_2$, dar

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 <<. \omega_1$$

Să presupunem că amplitudinile oscilaţiilor componente $a_1 = a_2 = a$, iar fazele iniţiale $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
Atunci, pentru oscilaţia rezultantă în direcţia axei x ,avem

$$x=a\cos(\omega_1 t) + a\cos(\omega_2 t) = 2a\cos(\omega_2 - \omega_1)t/2 \cos(\omega_1+\omega_2)t/2.$$

Deoarece $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega$, $(\omega_1+\omega_2)/2 = \omega$, atunci

$$x=2a\cos(\Delta\omega\, t/2)\cos(\omega\cdot t) \qquad (18)$$

Ecuaţia oscilaţiei rezultante obţinută depinde de produsul a două funcţii armonice : una oscilează cu frecvenţa $\Delta\omega /2$, iar alta cu frecvenţa $(\omega_1+\omega_2)/2 = \omega$. Oscilaţia rezultantă poate fi privită ca o oscilaţie armonică cu o amplitudine ce variază după o lege armonică. Un asemenea proces oscilatoriu poartă numirea de **bătaie** (fig.4) . Strict spus, oscilaţia rezultantă în cazul general nu este oscilaţie armonică ,adică

$$x(t + 2\pi/\omega) \neq x(t).$$

Perioada variaţiei amplitudinii $T_A = 4\pi/\omega = 4\pi/(\omega_2 - \omega_1)$.
Perioada bătăilor $T = 2\pi/\omega$ şi deci $T_A \gg T$.

Să construim graficul unei bătăi. Compunem file- funcţia

```
function [x1,x2,x3]=myfun1(t)
x1=20*cos(2*t);
x2=22*cos(2.08*t);
x3=x1+x2;
```

Programul în MATLAB

```
   t=0:pi/20:100*pi;
>> [x1,x2,x3]=myfun1(t);
>> plot(t,x3,'k-')
>> axis equal
>> axis([0 300 -50 50])
```

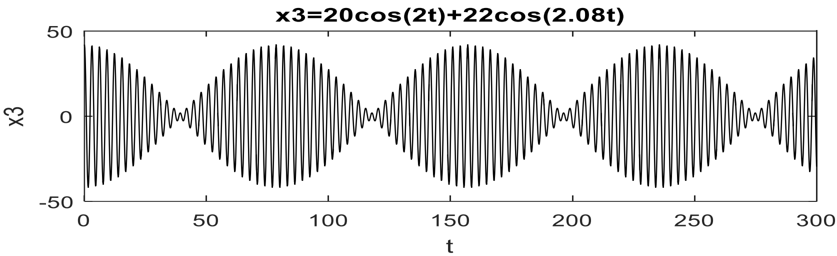


fig.4

4.3. Compunerea oscilaţiilor armonice de direcţii reciproc perpendiculare

Un exemplu de model cu care se poate demonstra compunerea a două oscilaţii armonice de direcţii reciproc perpendiculare (direcţiile axelor x şi y) este dat în fig.5 . Fie

$$x = a_x \cos(\omega_x t + \alpha_x),$$
$$y = a_y \cos(\omega_y t + \alpha_y),$$

unde $\omega_x = \sqrt{\frac{c_x}{m}}$, $\omega_y = \sqrt{\frac{c_y}{m}}$, unde c_x, c_y – coeficienţii de elasticitate a arcurilor respective, ω_x, ω_y – frecvenţele circulare respective, a_x, a_y – amplitudinile respective .

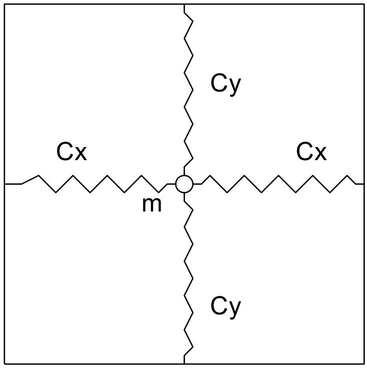


fig.5

La studierea compunerii a asemenea oscilaţii important este studierea traiectoriei mişcării rezultante ,de exemplu,al punctului material de masa m . Aceste traiectorii vor fi curbe plane înscrise în dreptunghiul cu laturile $2a_x$ şi $2a_y$ şi care se numesc figurile Lissajous În dependenţă de raportul dintre amplitudinile , frecvenţele şi fazele iniţiale ale oscilaţiilor componente, se obţin diferite traiectorii . De aici rezultă aplicaţiile practice ale acestor curbe în acustică, optică ,electrotehnică şi mecanică la studierea mişcărilor oscilatorii.

Să studiem cazul compunerii oscilaţiilor reciproc perpendiculare cu **frecvenţe egale $\omega_x = \omega_y = \omega$** , adică $c_x = c_y$. Atunci

$$x = a_x \cos(\omega t + \alpha_x) \ , \ y = a_y \cos(\omega t + \alpha_y) \ . \qquad (19)$$

Traiectoria mişcării punctului de masa m o vom găsi dacă vom exclude timpul t din ecuaţiile mişcării (19) şi vom găsi legătura funcţională dintre x şi y. Pentru aceasta vom prezenta ecuaţiile (19) în forma

$$x = a_x \cos(\omega t)\cos(\alpha_x) - a_x \sin(\omega t)\sin(\alpha_x),$$
$$y = a_y \cos(\omega t)\cos(\alpha_y) - a_y \sin(\omega t)\sin(\alpha_y).$$

Rezolvăm acest sistem de ecuaţii în raport cu $\cos(\omega t)$ şi $\sin(\omega t)$, obţinem

$$\cos(\omega t) = (x\, a_y \sin(\alpha_y) - y\, a_x \sin(\alpha_x) / a_x a_y \sin(\alpha_y - \alpha_x),$$
$$\sin(\omega t) = (x\, a_y \cos(\alpha_y) - y\, a_x \cos(\alpha_x) / a_x a_y \sin(\alpha_y - \alpha_x),$$

apoi ridicăm la pătrat părţile stângi şi drepte ale acestor ecuaţii şi sumăm părţile stângi şi drepte ale ecuaţiilor obţinute .În rezultat , obţinem

$$\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} - \frac{2xy}{a_x a_y}\cos(\alpha_y - \alpha_x) = \sin^2(\alpha_y - \alpha_x) \qquad (20)$$

Ecuaţia (20) este ecuaţia traiectoriei mişcării punctului şi reprezintă o elipsă cu centrul în originea sistemului de coordonate , cu axele de simetrie , înclinate cu un unghi oarecare în raport cu axele de coordo nate.

Să studiem această elipsă. Observăm ,că forma şi poziţia elipsei depinde nu de fazele iniţiale aparte, dar de diferenţa de faze iniţiale . Să notăm $\alpha_y - \alpha_x = \alpha$ şi să analizăm următoarele cazuri:

a) $\alpha = \alpha_y - \alpha_x = 2n\pi$, $n = 1,2,3,\ldots$,

adică oscilaţiile ce se compun sunt în aceleaşi faze. Atunci ecuaţia traiectoriei va lua forma

$$\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} - \frac{2xy}{a_x a_y} = 0,$$

sau $\quad \dfrac{x}{a_x} = \dfrac{y}{a_y}, \quad$ de unde $\quad y = \dfrac{a_y}{a_x}\, x$.

Aceasta este ecuaţia unei drepte (fig. 6) . În special, dacă $a_x = a_y = a$, atunci $y = x$ – segment de dreaptă, diagonala pătratului cu latura 2a.

b) Pentru $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, vom obţine o elipsă , axa mare a căreia formează un unghi ascuţit cu axa x (fig.7).

c) Pentru $\alpha = \alpha_y - \alpha_x = \frac{\pi}{2}$, vom obţine ecuaţia elipsei

$$\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} = 1, \quad \text{(fig.8)} .$$

Dacă în plus avem $a_x = a_y = a$,atunci obţinem ecuaţia cercului

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \text{(fig.9)} .$$

d) Pentru $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ vom avea din nou elipsă, dar care va forma cu axa mare, în cadranele II şi IV un unghi obtuz(fig.10).

e) Pentru $\alpha = \pi$ traiectoria va deveni un segment de dreaptă $y = -x$ (fig.11).

La schimbarea lui α de la π până la 2π tablourile traiectoriilor se repetă . Din exemplele de mai sus se vede , că la excluderea timpului se pierde o oarecare informaţie despre traiectorie. De exemplu, în cazul $\alpha = 0$ şi $\alpha = \pi$ obţinem ecuaţiile

$$x - y = 0 , \quad x + y = 0 ,$$

adică ecuaţiile unor drepte infinite, dar adevărul este că traiectoriile mişcării sunt numai segmente ale acestor drepte,cuprinse în dreptunghiul cu laturile $2a_x$ şi $2a_y$. Din ecuaţiile mişcării acest lucru se vede clar dar din ecuaţiile traiectoriei nu rezultă.

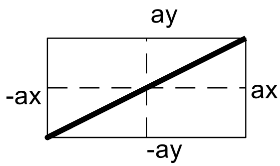


fig.6

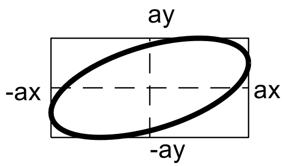


fig.7

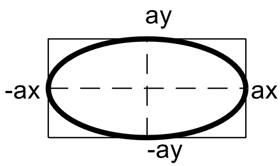


fig.8

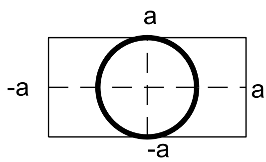


fig.9

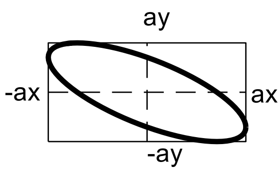


fig.10

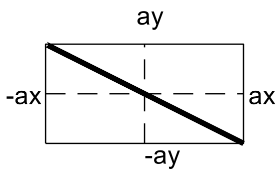


fig.11

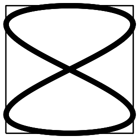
Să studiem cazul compunerii oscilaţiilor armonice de direcţii reciproc perpendiculare şi de frecvenţe diferite .

Pentru simplitate vom studia cazul,când frecvenţa uneia din oscilaţii este de două ori mai mare decât frecvenţa altei oscilaţii,iar amplitudinile sunt egale,adică $\omega_1 = 2\omega$,$\omega_2 = \omega$, $a_1 = a_2 = a$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha - \frac{\pi}{2}$.

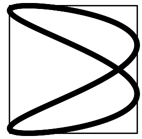
Atunci

$$x = a \sin(2\omega t - \alpha) ,$$
$$y = a \sin(\omega t - \alpha) .$$

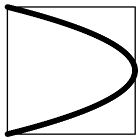
După excluderea timpului t se obţine traiectoria , ecuaţia căreia este o curbă algebrică de ordinul patru. Pentru a construi traiectoriile, mai simplu de aplicat calculatorul,de exemplu, pachetul MATLAB . Vom obţine curbe asemenea curbelor din (fig.12 – fig.16) .



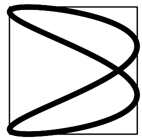
α = 0
fig.12



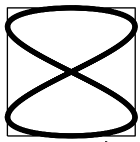
α = pi/4
fig.13



α = pi/2
fig.14



α = 3*pi/4
fig.15



α = pi
fig.15

Pentru valorile lui α ce variază de la π până la 2π ,vom obţine figurile lui Lissajous ,simetrice în raport cu verticala. În cazul $\alpha = \frac{\pi}{2}$, traiectoria se transformă într-un segment de parabolă , cuprinsă în pătratul cu latura 2a ca şi toate figurile Lissajous, cum urmează

$$x = a \sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = - a \cos(2\omega t),$$

$$y = a \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = - a \cos(\omega t),$$

şi deci

$$y^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} x ,$$

dar aceasta şi este ecuaţia parabolei cu vârful în punctul (a,0) şi cu axa de simetrie x .

Menţionăm proprietăţile figurilor Lissajous. Dacă frecvenţele oscilaţiilor sunt comensurabile , atunci mişcarea va fi periodică şi curbele vor fi închise , adică punctul va descrie aceiaşi traiectorie de multe ori .

Dacă frecvenţele nu sunt comensurabile , atunci punctul nici odată nu va repeta poziţia iniţială , rămânând în limitele pătratului sau drept unghiului , descriind noi şi noi lanţuri, figuri Lissajous , care nici odată nu se vor închide .

Dacă între frecvenţe sau perioadele oscilaţiilor perpendiculare există relaţia de comensurabilitate , adică

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

unde n_1 şi n_2 – numere întregi simple , atunci în timpul $T = n_2T_1 = n_1T_2$ se repetă un număr întreg de perioade T_1 şiT_2,adică valorile x şi y după acest timp vor atinge valorile iniţiale . În continuare mişcarea se va repeta . Dacă frecvenţele sau perioadele sunt necomensurabile atunci nu există o aşa valoare T şi punctul nici odată nu se va întoarce în poziţia iniţială .

Sarcina lucrării nr.4

I. De făcut o generalizare concisă despre caracteristicile cinematice ale oscilaţiilor armonice si despre compunerea acestora, în cazul,când direcţiile coincid, şi ,când direcţiile sunt reciproc perpendiculare.

II. De ales două oscilaţii armonice de aceiaşi direcţie(x_1 şi x_2), cu frecvenţele ciclice ω_1 şi ω_2, cu fazele iniţiale α_1 şi α_2 , şi cu amplitudinile A_1 şi A_2 . De compus(de adunat) aceste oscilaţii ($x = x_1 + x_2$, oscilaţia rezultantă), construind graficele respective cu inscripţii informative pentru următoarele cazuri:

a). Oscilaţii armonice necoerente ($\omega_1 \neq \omega_2$). De scris file-funcţia de timp, ce ar construi în o fereastră grafică pe axe comune graficele funcţiilor $x_1(t)$, $x_2(t)$ şi $x(t)$. De analizat rezultatele obţinute.

b). Oscilaţii armonice coerente ($\omega_1 = \omega_2$). De scris file-funcţia de timp, ce ar construi în o fereastră grafică pe axe comune graficele funcţiilor $x_1(t)$, $x_2(t)$ şi $x(t)$. De analizat rezultatele obţinute.

c). Oscilaţii armonice necoerente ($\omega_1 \cong \omega_2$, - oscilaţie de tip bătaie). De scris file-funcţia de timp, ce ar construi în o fereastră grafică graficul funcţiei x(t). De determinat caracteristicile cinematice ale oscilaţiei de tip bătaie.

d). Oscilaţii armonice coerente ($\omega_1=\omega_2$). De scris o file-funcţie cu parametrii de intrare numărul figurii şi diferenţa de faze $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, ce ar construi, în o fereastră grafică, graficele funcţiilor $x_1(t)$, $x_2(t)$ şi $x(t)$ pentru $\alpha=0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}; \pi$ pe axe separate (fereastra grafică se divizează în 9 sectoare, fiecare cu axele sale, pentru fiecare valoare ale parametrului α).

III. Punctul material ia parte la două oscilaţii armonice de direcţii reciproc perpendiculare (x şi y) cu frecvenţele ciclice ω_1 şi ω_2, cu fazele iniţiale α_1 şi α_2 şi amplitudinile A_1 şi A_2. Este necesar de selectat aceste oscilaţii în următoarele cazuri:

a). $\omega_1 = \omega_2$. De scris o file-funcţie cu parametrii de intrare numărul figurii şi diferenţa de faze $\alpha=\alpha_1 - \alpha_2$, ce ar construi, pe axe separate, în o fereastră grafică, traiectoriile mişcării punctului (figurile lui Lissajous),pentru $\alpha=0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}; \pi$.

b). $\omega_1 \neq \omega_2$, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$, $n_1, n_2 = 1, 2, 3, \ldots$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha - \frac{\pi}{2}$;

De scris o file-funcţie cu parametrii de intrare numărul figurii şi parametru α, ce ar construi, pe axe separate, în o fereastră grafică, traiectoriile mişcării punctului (figurile lui Lissajous),pentru $\alpha=0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}; \pi$.

Lucrarea nr. 5. Calculul caracteristicilor cinematice ale mişcării corpului rigid

5.1 Mişcarea de rotaţie a rigidului .

Ecuaţia mişcării de rotaţie a rigidului reprezintă dependenţa unghiului de rotaţie de timp: $\varphi = \varphi(t)$. Mişcarea de rotaţie are un grad de libertate. Dacă cunoaştem ecuaţia mişcării deţinem toată informaţia despre caracteristicile cinematice ale mişcării de rotaţie. În următorul tabel sunt aduse principalele caracteristici cinematice ale rigidului în mişcarea de rotaţie şi ale punctelor acestuia .

Principalele notaţii : $\vec{k}$- versorul (vectorul unitar) al axei de rotaţie ; $\vec{r}$- raza vector(vectorul de poziţie) a punctului ; R – raza traiectoriei (cercului) punctului ; $\vec{v}$ - viteza punctului ,orientată pe tangentă la traiectorie în direcţia mişcării ; $\vec{a}^{ax}$ - acceleraţia axipetă (normală) orientată spre axa de rotaţie ; $\vec{a}^{rot}$ – acceleraţia de rotaţie (tangenţială) orientată pe tangentă la traiectorie în direcţia vitezei la rotaţia accelerată şi opus vitezei la rotaţia întîrziată; $\vec{a}$ – acceleraţia totală .

Mişcarea de rotaţie a rigidului		
Caracteristica cinematică	Formula vectorială	Formula scalară
Viteza unghiulară	$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\ \vec{k}$	$\omega = \lvert\dot{\varphi}\rvert$
Acceleraţia unghiulară	$\vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\ \vec{k}$	$\varepsilon = \lvert\ddot{\varphi}\rvert$
Viteza unui punct al rigidului	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$,	v=ω*R
Acceleraţia axăpetă (normală)	$\vec{a}^{ax} = \vec{\omega} \times \vec{v}$	$a^{ax} = \omega^2 * R$

Accelerația de rotație (tangențială)	$\vec{a}^{rot} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$	$a^{rot} = \varepsilon * R$
Accelerația totală	$\vec{a} = \vec{a}^{ax} + \vec{a}^{rot}$	$a = \sqrt{(a^{ax})^2 + (a^{rot})^2}$

5.2 Mişcarea plan - paralelă a rigidului .

Se numeşte mişcare plan – paralelă sau plană o aşa mişcare a rigidului la care toate punctele rigidului se mişcă în plane paralele la un plan fix. Mişcarea plană este determinată de mişcarea unei figuri plane ce se obţine prin secţionarea rigidului cu un plan paralel la planul fix. Spre exemplu,o carte se mişcă arbitrar pe suprafaţa unei mese,figura plană va fi un dreptunghi,ce se mişcă pe masă. Alt exemplu, o bară subţire se mişcă pe masă, figura plană va fi un segment de dreaptă de lungimea barei. Dacă un corp arbitrar face mişcare plană, paralel la planul desenului, figura plană se va situa în planul desenului.

Figura din planul desenului poate fi deplasată în altă poziţie făcând două mişcări mai simple: prima-mişcare de translaţie împreună cu un punct (pol) arbitrar al figurii până în poziţia finală a polului; a doua-mişcare de rotaţie în jurul polului până ce figura ocupă poziţia finală.

Mişcarea plană are trei grade de libertate. Poziţia figurii plane este determinată de poziţia polului(două coordonate) şi de unghiul de rotaţie în jurul polului(o mărime). Ecuaţiile mişcării plane sunt: $x_A=f_1(t)$; $y_A= f_2(t)$; $\varphi=\varphi(t)$. Punctul A – pol. Se poate demonstra că unghiul φ nu depinde de punctul ales arbitrar ca pol.

5.3 Determinarea vitezelor punctelor rigidului la mişcarea plan-paralelă.

Considerăm că ecuaţiile mişcarii plane sunt cunoscute,sau cunoaştem viteza unui punct al rigidului după modul şi direcţie, iar viteza altui punct este cunoscută numai după direcţie. Vom specifica trei metode ce pot fi aplicate la rezolvarea problemelor.

1. Metoda coordonatelor. Din considerente geometrice pot fi scrise coordonatele x şi y ale punctului rigidului ca funcţii de timp. În acest caz, viteza se calculă după formulile din cinematica punctului :

Vectorului vitezei după proiecţii pe axele x şi y	$v_x = \dot{x}$; $v_y = \dot{y}$
Vectorul vitezei după modul	v= $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
Vectorul vitezei după direcţie (cosinuşii directori)	$\cos(\alpha_1)=v_x/v$, $\cos(\beta_1)=v_y/v$

2. Metoda centrului instantaneu al vitezelor(metoda CIV). Se numeşte centrul instantaneu al vitezelor(CIV) punctul figurii plane cu viteza egală cu zero în poziţia dată. La curs a fost demonstrată existenţa lui. În acest caz ,la calcularea vitezelor, mişcarea plană poate fi considerată mişcare momentană de rotaţie în jurul CIV. Evident, putem scrie: $v_A=\omega\cdot AP$; $v_B=\omega\cdot BP$; $v_C=\omega\cdot CP$; $v_M=\omega\cdot MP$ etc. Prin P este notat centrul instantaneu al vitezelor(CIV).Ca şi la mişcarea de rotaţie ,vitezele punctelor sunt perpendiculare la segmentele ce unesc punctele respective cu CIV: $\vec{v}_A \perp AP$; $\vec{v}_B \perp BP$; $\vec{v}_C \perp CP$ $\vec{v}_M \perp MP$ etc.

3. Metoda vectorială. Această metodă se bazează pe ecuaţia vectorială: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$. Viteza punctului B al figurii plane este egală cu suma vectorială ale altor două vitze: $\vec{v}_A$ - viteza punctului A , considerat ca pol; $\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{AB}$ - viteza punctului B în raport cu polul A, sau , viteza punctului B în mişcarea de rotaţie a figurii plane în jurul polului A. După modul , această viteză este $v_{BA}=\omega\cdot AB$, iar după direcţie $\vec{v}_{BA} \perp AB$. Viteza punctului B ,după modul, se calculă cum urmează:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2 + 2v_A v_{BA} \cos\alpha}$$

Unghiul α este unghiul dintre vectorii $\vec{v}_A$ şi $\vec{v}_{BA}$.

5.4 Rezolvarea ecuaţiilor algebrice în MATLAB.

A rezolva ecuaţia F(x)=0 , înseamnă a determina rădăcinile ei sau, de determinat zerurile funcţiei y=F(x). În dependenţă de tipul ecuaţiei vom avea două cazuri.

1.Determinarea rădăcinilor polinoamelor. Pentru realizarea acestui scop ,în MATLAB, există comanda roots , cărei i se transmite,în calitate de argument, vectorul coeficienţilor polinomului. Spre exemplu, avem de rezolvat ecuaţia: $x^4-3x^3+3x^2-3x+2=0$. Formăm vectorul coeficienţilor(îi aranjăm în ordinea descreşterii puterilor variabilei x): Coef=[1,-3,3,-3,2] , în continuare, aplicăm comanda r= roots(Coef). În rezultat obţinem 4 rădăcini, două reale şi două imaginare.

2.Determinarea rădăcinilor ecuaţiilor trigonometrice. Rezolvarea ecuaţiei F(x)=0 se face cu ajutorul comenzii fzero(name, x0). În calitate de primul argument i se transmite numele funcţiei, declarate file-funcţie, iar al doilea este valorea estimativă a rădăcinii. Spre exemplu, rezolvăm ecuaţia cos(x)-x=0:

```
function y=myfunction(x)
y=cos(x)-x;
>> x=fzero('myfunction',pi/2)

x =0.7391
```

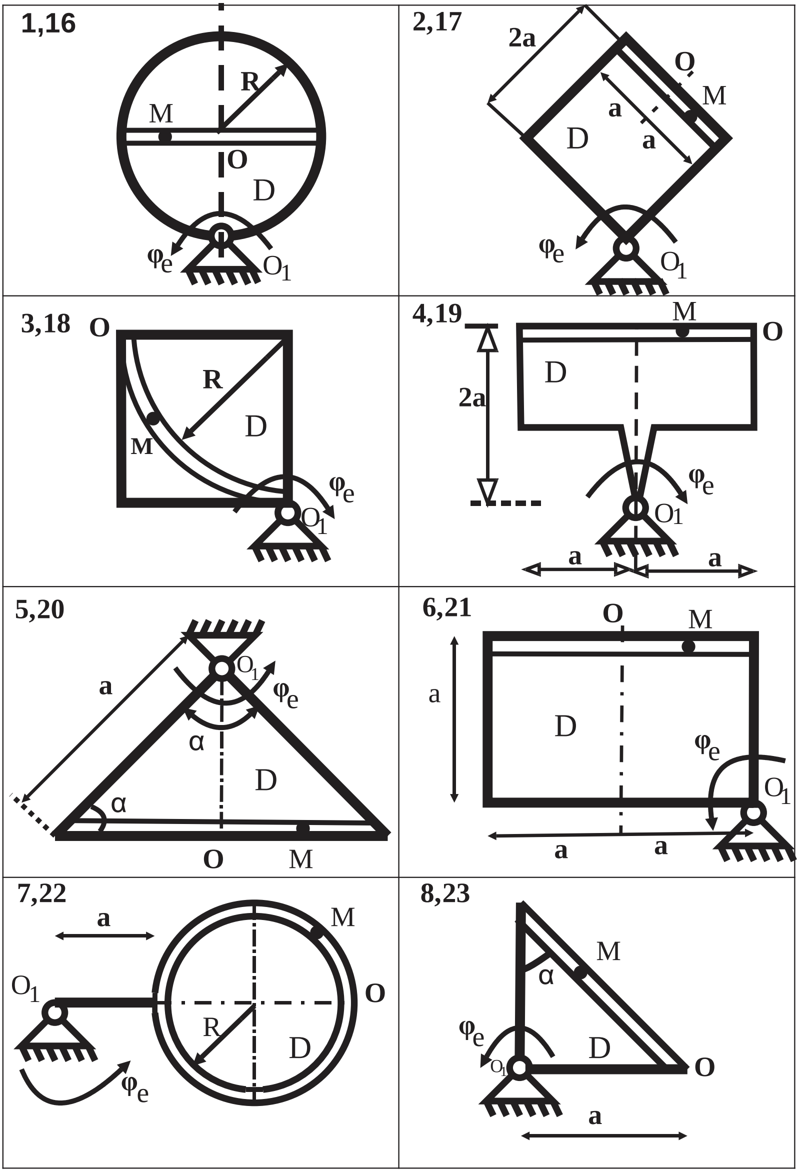
Sarcina lucrării nr.5

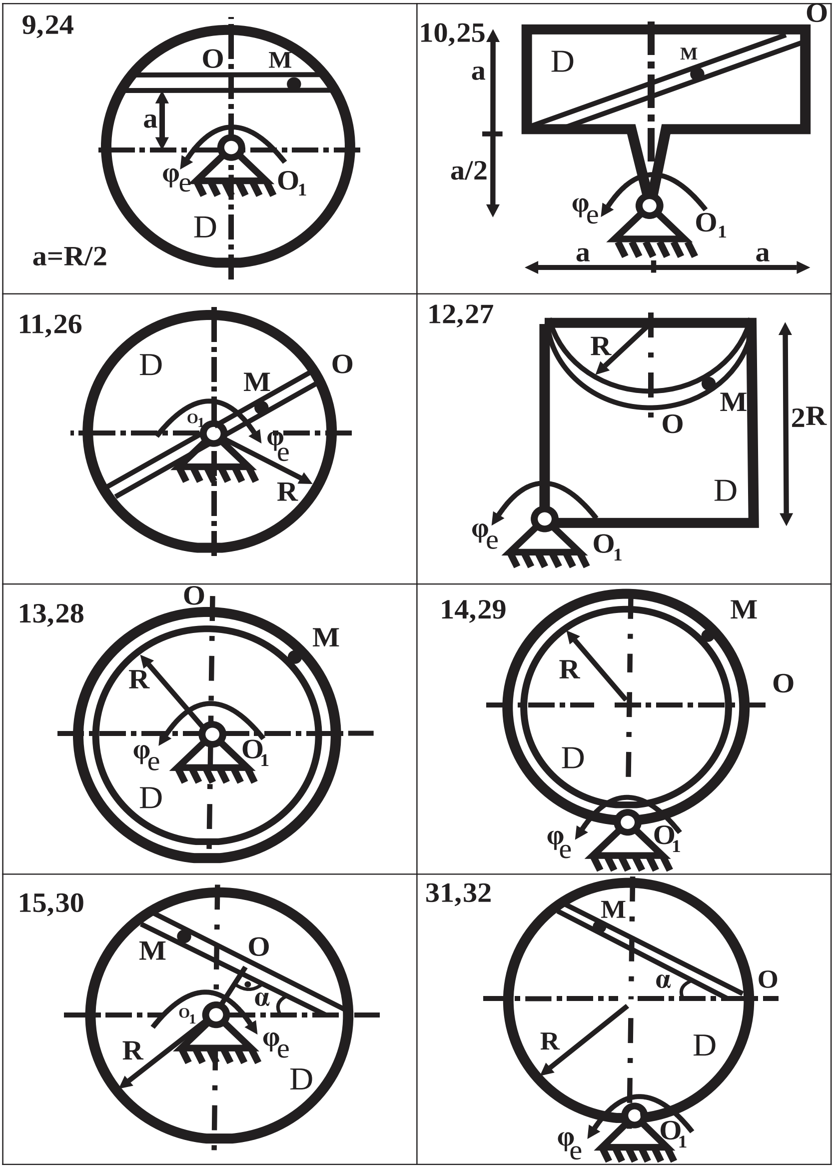
I.Placa D (dreptunghi,cerc sau triunghi) se roteşte în jurul axei O_1 perpendiculare la planul desenului conform ecuaţiei $\varphi_e = \varphi(t)$, rad. Pe placă este montată rigid bila M, poziţia căreia este determinată de segmentul (sau arcul) OM .Datele numerice şi desenele respective sunt ataşate.

a) De determinat momentul de timp în care $\varphi_e = \varphi_1$.
b) Pentru momentul de timp determinat aflaţi viteza şi acceleraţia punctului M al plăcii.
c) Faceţi desenul şi arătaţi pe el vectorii calculaţi: (ω, ε, v , a^{ax} , a^{rot}, a) .

Varianta	$\varphi_e = \varphi(t)$, rad	a,R cm	OM cm	α grad	φ_1 grad
1,16	$t^3 +0,4t^2 +t$	20	R/4	-	275
2,17	$2t^3 -t^2 +t$	25	a/4	-	65
3,18	$t^3 +1,5t^2 +0,75t$	25	πR/8	-	125
4,19	$t^3 +0,5t^2 +2t$	30	a/4	-	235
5,20	$t^3 +0,5t^2 +t$	40	a/4	60	75
6,21	$t^3 +2t^2 -0,5t$	25	a/8	-	145
7,22	$t^3 -4t^2 +5t$	30	πR/8	-	245
8,23	$0,2t^3 +t^2 +t$	60	a	45	300
9,24	$t^3 -0,5t^2 +t$	20	10	-	80
10,25	$t^3 +0,5t^2 +t$	$4\sqrt{5}$	5	-	170
11,26	$t^3 +3t^2 +t$	40	R/4	-	195
12,27	$t^3 +t^2 +6t$	60	πR/8	-	225
13,28	$t^3 -4t^2 +2t$	25	πR/4	-	95
14,29	$t^3 -0,3t^2 +2t$	30	πR/3	-	155
15,30	$t^3 +0,6t^2 +t$	36	$6\sqrt{3}$	30	222
31,32	$t^3 +2t^2 -3t$	20	20	30	232

e


1,16
R
M
O
D
φe
O1
2,17
2a
O
M
a
D
a
φe
O1
3,18
O
R
D
M
φe
O1
4,19
M
O
D
2a
φe
O1
a
a
5,20
a
O1
φe
α
D
α
O
M
6,21
O
M
a
D
φe
O1
a
a
7,22
a
M
O1
O
R
D
φe
8,23
M
α
φe
D
O1
O
a


9,24
O
M
a
φe
O1
D
a=R/2
10,25
O
D
M
a
a/2
φe
O1
a
a
11,26
D
O
M
O1
φe
R
12,27
R
M
O
2R
D
φe
O1
13,28
O
M
R
φe
O1
D
14,29
M
R
O
D
φe
O1
15,30
M
O
α
O1
φe
R
D
31,32
M
α
O
R
D
φe
O1

II. Placa D (dreptunghi,cerc sau triunghi) se roteşte în jurul axei O_1 perpendiculare la planul desenului conform ecuaţiei $\varphi_e = \varphi(t)$, rad. Datele numerice sunt ataşate, iar desenele – în punctul precedent.

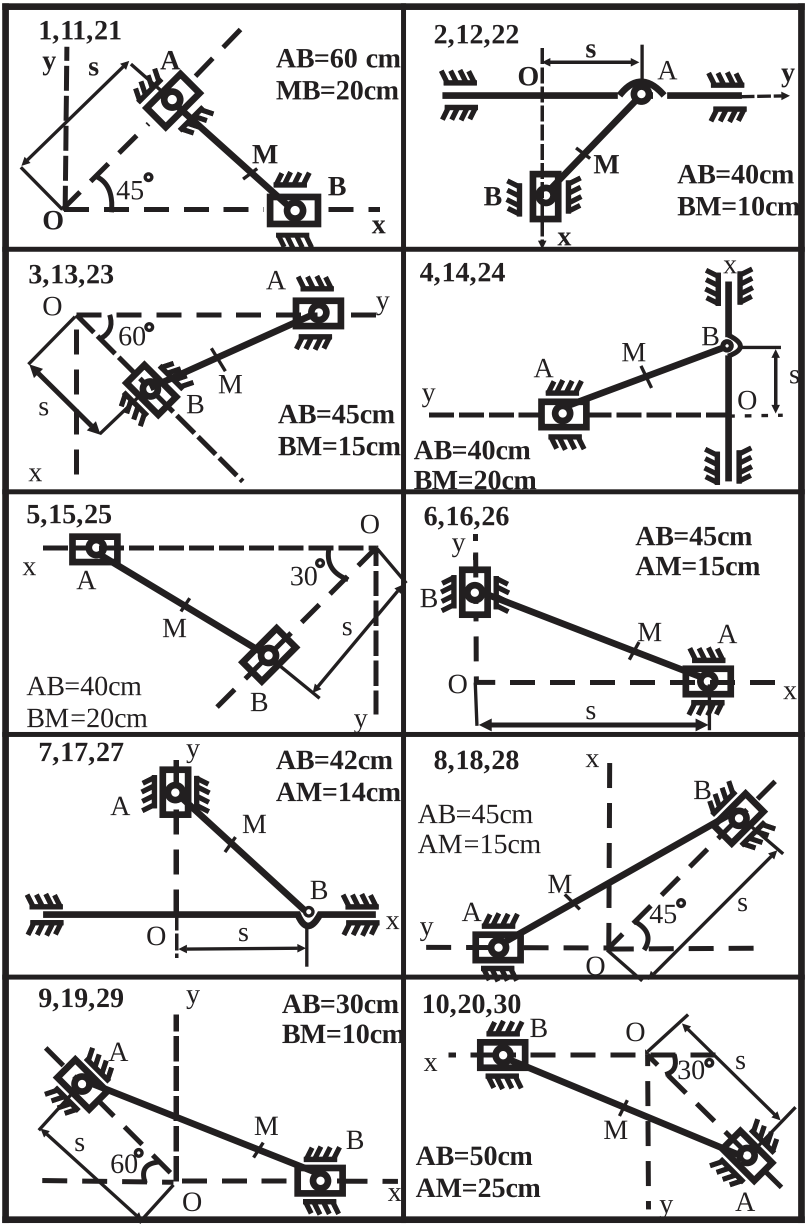
a).De determinat momentul de timp în care $\varphi_e = \varphi_1$.
b).Pentru momentul de timp determinat aflaţi viteza şi acceleraţia punctului O al plăcii.
c).Faceţi desenul şi arătaţi pe el vectorii calculaţi: (ω, ε, v, a^{ax} , a^{rot}, a) .

Varianta	$\varphi_e = \varphi(t)$, rad	a,R cm	α grad	φ_1 grad
1,16	$20\sin(\pi t)$	20	-	275
2,17	$18\sin(2\pi t)$	25	-	65
3,18	$16\sin^2(\pi t)$	25	-	125
4,19	$14\cos^2(2\pi t)$	30	-	235
5,20	$12\cos(\pi t)$	40	60	75
6,21	$10\cos(2\pi t)$	25	-	145
7,22	$8\cos^2(\pi t)$	30	-	245
8,23	$7\sin^2(2\pi t)$	60	45	300
9,24	$7{,}2\sin(3\pi t)$	20	-	80
10,25	$8{,}4\cos(0{,}5\pi t)$	$4\sqrt{5}$	-	170
11,26	$9{,}2\sin^2(3\pi t)$	40	-	195
12,27	$9{,}4\cos^2(2\pi t)$	60	-	225
13,28	$10{,}2\sin^3(3\pi t)$	25	-	95
14,29	$11{,}2\cos^3(2\pi t)$	30	-	155
15,30	$12{,}2\sin(4\pi t)$	36	30	222
31,32	$13{,}2\cos(5\pi t)$	20	30	232

III.Mecanismul, din desen ,constă din bara AB şi două pistoane, articulate cu bara. Pistoanele A şi B fac mişcări de translaţie în planul desenului în ghidajele respective.Bara AB face mişcare plan-paralelă tot în planul desenului.Este cunoscută ecuaţia mişcării a pistonului A (sau B) s=s(t) . Datele numerice şi desenele respective sunt ataşate. t_1 –este timpul de calcul.

a) De calculat vitezele punctelor A , B şi M prin metoda coordonatelor.
b) De construit traiectoria mişcării punctului M şi poziţia punctului M pe traiectorie pentru timpul de calcul t_1. Folosind instrumentele ferestrei grafice , arătaţi pe traiectorie viteza punctului M.
c) Consideraţi viteza punctului A(sau B) cunoscută(vezi punctul 1) de calculat vitezele punctelor B(sau A) şi M prin metoda CIV pentru timpul de calcul t_1. Comparaţi rezultatele cu cele obţinute în punctul 1.
d) Faceţi desenul şi arătaţi pe el toţi vectorii: (ω, v_A , v_B , v_M).

Varianta	Ecuaţia mişcării s=s(t), m	Timpul de calcul t_1 , s
1,11,21	$60\sqrt{2}\sin(2\pi t)$	1/12
2,12,22	$40\sin(\pi t)$	1/4
3,13,23	$30\sqrt{3}\cos(\pi t)$	1/3
4,14,24	$40\sin(3\pi t)$	1/9
5,15,25	$80\sin(2\pi t)$	1/6
6,16,26	$45\sin(\pi t)$	1/3
7,17,27	$42\cos(2\pi t)$	1/6
8,18,28	$45\sqrt{2}\sin(\pi t)$	1/6
9,19,29	$20\sqrt{3}\sin(3\pi t)$	1/18
10,20,30	$100\cos(2\pi t)$	1/8


1,11,21
AB=60 cm
MB=20cm
y
s
A
M
45°
B
O
x
2,12,22
s
O
A
y
M
B
AB=40cm
BM=10cm
x
3,13,23
A
O
y
60°
M
s
B
AB=45cm
BM=15cm
x
4,14,24
x
B
M
A
s
y
O
AB=40cm
BM=20cm
5,15,25
O
x
A
30°
M
s
AB=40cm
BM=20cm
B
y
6,16,26
AB=45cm
AM=15cm
y
B
M
A
O
x
s
7,17,27
y
AB=42cm
AM=14cm
A
M
B
x
O
s
8,18,28
x
B
AB=45cm
AM=15cm
M
A
45°
s
y
O
9,19,29
y
AB=30cm
BM=10cm
A
M
B
s
60°
x
O
10,20,30
B
O
x
30°
s
M
AB=50cm
AM=25cm
y
A

Lucrarea nr. 6. Studiul oscilaţiilor rectilinii ale unui punct material

6.1. Integrarea numerică.

6.1.1. Integrale definite ordinare.

Integrarea numerică este una din aplicările cele mai importante ale pachetului MATLAB. Integrarea numerică înseamnă a calcula aproximativ integrala:

$$\int_a^b y(x)dx,$$

aplicând una din metodele numerice, care sunt multe la număr. Vom aplica metoda cuadraturilor, care permite de a calcula integrale simple şi duble prin metoda lui Simpson sau metoda lui Gauss-Lobatto. Cuadratura reprezintă o metodă numerică de a determina suprafaţa sub graficul funcţiei $y(x)$, adică integrala definită de mai sus.

Funcţia *quad* utilizează metoda lui Simpson şi poate fi mai efectivă când funcţiile de sub integrală nu sunt line sau când precizia calculului, care se cere, este joasă. În MATLAB6 precizia a fost ridicată până la 10^{-6}. Funcţia *quadl* (cuadratura Lobatto) utilizează regula adaptivă a cuadraturii Gauss-Lobatto de ordin foarte înalt.

În formulele de mai jos expresia de sub integral *fun* de obicei se dă in formă de funcţie descriptor, de aceia în scopuri didactice se notează prin *@fun*.

- *quad(@fun,a,b)* - redă valoarea numerică a integralei definite de la funcţia dată *@fun* pe segmentul [a,b]
- *quad(@fun,a,b,tol)* - redă valoarea numerică a integralei definite cu precizia relativă *tol* (valoarea implicită *tol=1.e-6*). Se poate de folosit un vector, compus din două elemente *tol=[rel_tol abs_tol]* pentru a determina greşeala relativă şi absolută.

- *quad(@fun,a,b,tol,trace)* - redă valoarea numerică a integralei definite şi la valoarea *trace* ne egală cu zero, construieşte un grafic, care arată mersul calculului integralei.

Exemplul 6.1.

De calculat $\int_0^1 (e^x - 1)dx$ cu precizia 10^{-5}. Culegem în rândul de comandă:

```
>> quad('(exp(x)-1)',0,1,1.e-5)
ans=
  0.7183
```

De calculat $\int_0^2 e^x dx$ cu precizia 10^{-4}. Expresia exp(x) este funcţie descriptor, de acea putem scrie:

```
>> q=quad(@exp,0,2,1.e-4)
q=
   6.3891
>> q=quad(@sin,0,pi,1.e-3)
q=
  2.0000
```

Se poate de format şi file-funcţiile respective şi de le inclus în loc de *@fun* (vezi exemplu în paragraful următor).

6.1.2. Integrale definite duble.

Fie că trebuie de calculat integrala definită dublă

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}[2y\sin(x)+\frac{x}{2\cos(y)}]dxdy.$$

- *dblquad(@fun,inmin,inmax,outmin,outmax)* – calculează şi redă valoarea integralei duble pentru funcţia de sub integral *fun(inner,outer)*. Implicit se utilizează cuadratura *quand*. Aici *inner* este variabile interioară, care variază de la *inmin* până la *inmax*, iar *outer* – variabila exterioară, care variază de la *outmin* până la *outmax*. Primul argument este un rând, care descrie funcţia de sub integrală. Înscrierea în apostrofe acum este inadmisibilă.

Exemplul 6.2.

Să alcătuim mai întâi file-funcţia integr1.m care descrie funcţia:

integr1.m

```
function y=integr1(x,y);
y=2*y.*sin(x)+x./(2*cos(y));
```

Atunci calculul integralei duble de mai sus poate fi efectuat în felul următor:

```
>> result=dblquad(@integr1,pi,2*pi,0,2*pi)
result=
  -78.9574
```

6.1.3. Integrale definite triple.

Fie că trebuie de calcul integrala triplă

$$\int_1^4\int_2^5\int_3^6 (xyz)^2 dxdydz$$

triplequad(@fun,xmin,xmax,ymin,ymax,zmin,zmax) – calculează şi redă valoarea integralei triple pentru funcţia de sub integral *fun*.Implicit se utilizează cuadratura *triplequad* . Aici *x* –variabila inferioară,care variază de la *xmin* pînă la *xmax*, *y* – variabila mijlocie, care variază de la *ymin* pînă la *ymax* şi *z* – variabila exterioară, care variază de la *zmin* pînă la *zmax*

t

Exemplul 6.3

Să alcătuim mai întâi file-funcţia integr2.m care descrie funcţia de sub integral:

```
function f=integr2(x,y,z);
         f=(x.*y.*z).^2;
```

Atunci calculul integralei triple de mai sus poate fi efectuat în felul următor: >> rezult= triplequad(@integr2,1,4,2,5,3,6)
rezult = 51597 ;

Se mai poate calcula direct în rândul de comandă, în felul următor :

>> rezult=triplequad('(x.*y.*z).^2',1,4,2,5,3,6)
rezult = 51597 .

6.2. Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale.

Pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale obişnuite (EDO) în MATLAB există diferite metode. Ele se numesc rezolvatori de EDO (solver - rezolvator):

- *ode45* - o metodă clasică, care se recomandă la începutul încercării rezolvării.
- *ode23* - când precizia care se cere e joasă, această metodă dă avantaj în viteza de rezolvare.
- *ode113* - asigură o precizie înaltă a rezolvării.
- *ode23tb* – indiferent de precizia joasă, această metodă poate fi mai efectivă decât *ode15s*.
- *ode15s* - se recomandă, dacă *ode45* nu asigură rezolvarea.
- *ode23s* - asigură o viteză înaltă a calculului la o precizie joasă a soluţiei.
- *ode23t* - metoda trapezelor cu interpolare, obţine rezultate bune la rezolvarea problemelor care descriu sisteme oscilatorii cu rezultat aproape armonic.

Toţi rezolvatorii pot rezolva sisteme de ecuaţii de tipul *y'=F(t,y)*. Rezolvatorii *ode15s* şi *ode23t* pot rezolva ecuaţii de tipul *M(t)y'=F(t,y)*, unde M se numeşte matricea de masă. Rezolvatorii *ode15s, ode23s, ode23t* şi *ode23tb* pot rezolva ecuaţii de tipul *M(t,y)y' = F(t,y)*.

La aplicarea rezolvatorilor se folosesc următoarele notări şi reguli:

- *F* - numele fişierului EDO, adică a funcţiei de *t* şi *y*, care redă un vector-coloană.
- *tspan* -vector, care determină intervalul de integrare [*to tfinal*].
- *yo* – vectorul condiţiilor iniţiale;
- *p1, p2,...* – parametri arbitrari care se transmit în funcţia F;
- *options* - argument creat de funcţia *odeset*, de obicei pentru a determina greşeala relativă şi absolută;

- *T, Y* – matricea soluţiilor, unde fiecare rând corespunde timpului redat în vectorul-coloană *T*;

Descriem comenzile pentru a rezolva sisteme de ecuaţii diferenţiale (vom nota prin *solver* una din metodele numerice posibile de rezolvare a EDO - *ode45*; *ode23*; *ode113, ode15s, ode23s*; *ode23t*; *ode23tb*) :

- *[T,Y]=solver(@F,tspan,y0)* - unde în loc de *solver* se pune numele funcţiei rezolvatorului concret, integrează sistemul de ecuaţii diferenţiale de tipul *y'=F(t,y)* pe intervalul *tspan* cu condiţiile iniţiale *y0*. *@F* - este descriptorul fişierului EDO. Se poate de scris *'F'* - rândul care conţine numele fişierului EDO. Fiecare rând în masivul de soluţii *Y* corespunde timpului redat în vectorul-coloană *T*.
- *[T,Y]=solver(@F,tspan,y0,options)* - redă soluţie ca şi mai sus, dar cu parametrii determinaţi de valorile argumentului *options* adică precizia relativă şi absolută respectivă. Implicit componentele sunt egale cu 1e-6.
- *[T,Y]=solver(@F,tspan,y0,options,p1,p2...)* - redă soluţie ca mai sus cu parametri suplimentari *p1, p2,...* în m-failul *F*. Folosiţi *optins=[]*, dacă nici un fel de parametri nu se dau.

Exemplul 6.4.

Trebuie de rezolvat ecuaţia lui Van-der-Pol: $y''=1000(1-y^2)y'-y$ pe intervalul (în secunde) *t=[0 3000]* cu condiţiile iniţiale y(0)=2, *y'(0)=0*. Transcriem ecuaţia ca un sistem de două ecuaţii diferenţiale, notând $y = y_1$:

$$y'_1 = y_2;$$
$$y'_2 = 1000*(1-y_1^2)*y_2-y_1.$$

Înainte de rezolvare trebuie de scris sistemul de ecuaţii diferenţiale în formă de file-funcţie EDO.

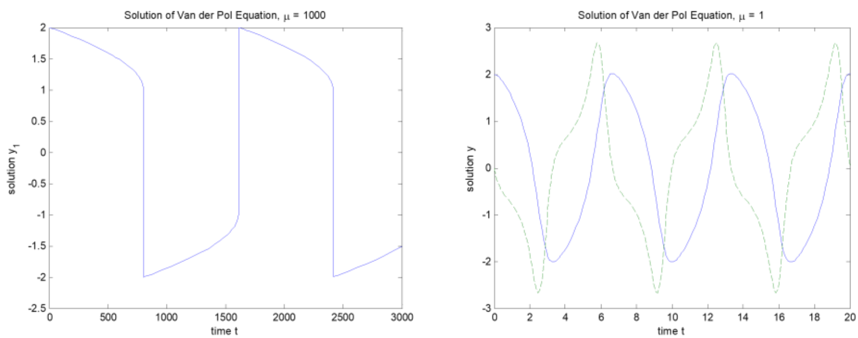
vdp1000.m

```
function dydt = vdp1000(t,y)
dydt = zeros(2,1);     %a column vector
dydt(1) = y(2);
dydt(2) = 1000*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1);
```

Soluţia cu rezolvatorul *ode15s* şi graficul corespunzător pot fi obţinute, aplicând comenzile următoare:

```
>>[t,y] = ode15s(@vdp1000,[0 3000],[2; 0]);
plot(t,y(:,1),'-');
title('Solution of Van der Pol Equation, \mu = 1000');
xlabel('time t');
ylabel('solution y_1');
```

În rezultat obţinem graficul, prezentat în figura 4.1,a).



a) b)

Figura 6.1. Graficul funcţiei pentru μ=1000 (a), şi μ=1 (b)

Pentru a construi y1 şi y2 putem aplica comenzile (pentru alt coeficient mu sau μ=1):

vdp1.m

```
function dydt = vdp1(t,y)
dydt = zeros(2,1);     %a column vector
dydt(1) = y(2);
dydt(2) = 1*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1);
```

Soluţia cu rezolvatorul *ode45* şi graficul corespunzător pot fi obţinute, aplicând comenzile următoare:

```
>>[t,y] = ode45(@vdp1,[0 20],[2; 0]);
plot(t,y(:,1),'-',t,y(:,2),'--')
title('Solution of Van der Pol Equation, \mu = 1');
xlabel('time t');
ylabel('solution y');
```

Obţinem figura 6.1, b) cu graficele $y = y_1$ şi $y'_1 = y_2$.

În caz general soluţia se reduce la următoarele:

1). Crearea file-funcţiei. Independent de aspectul sistemului de ecuaţii el are forma:

solverDE.m

```
function dy = solverDE(t,y)
dy(1) = f1(t, y(1), y(2),..., y(n));
dy(2) = f2(t, y(1), y(2),..., y(n));
................................................
dy(n) = fn(t, y(1), y(2),..., y(n));
```

2). Obţinerea soluţiei şi a graficului însoţitor:

```
>> [T,Y] = solver(‘solverDE’, [to tfinal], [y10 y20 ... yn0]);
>> plot(T,Y)
```

Vor fi construite graficele *y1, y2,...,yn* ca funcţii de *t*).

În rezultat obţinem graficele, care pot fi însemnate cu denumiri *Nume1*, *Nume2*,...,*NumeN*. Aceasta e posibil în două metode – manuală şi automată.

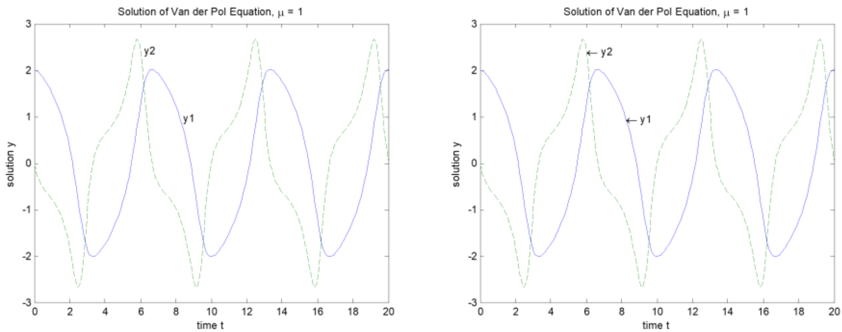
La scrierea manuală mai întâi se aplică comanda gtext, după ce se indică locul potrivit al graficului pentru text - cu ajutorul mausului se apasă cu tasta din stânga al mausului:

```
>> hold on; gtext('y1'),gtext('y2'),...,gtext(‘yn’),
```

Pentru a automatiza, selectam un punct oarecare de pe grafic, adică perechea de coordonate *t* şi *y*, si scriem cu funcţia *text* :

```
>> text(t(110),y(110,1),'\leftarrow y1')   % perechea 110
>> text(t(83),y(83,2),'\leftarrow y2')     % perechea 83
```

Pentru exemplul 6.4 de mai sus avem următoarele rezultate (fig. 6.2):



a) manuală – funcţia gtext   b) automată – funcţia text

Figura 6.2. Scrierea denumirilor graficelor

6.3. Studiul oscilaţiilor libere

(Problema 32.1 din [6]):

Arcul AB este suspendat de un capăt al lui în punctul A (vezi fig. 6.3). Pentru alungirea lui cu Δl = 1m trebuie să aplicăm în punctul B o sarcină statică P = 19,6 N. La un moment dat de capătul B al arcului ne deformat se suspendă un corp C cu masa M = 0,1 kg şi i se dă drumul fără viteză iniţială. Neglijând masa arcului, să se determine ecuaţia cinematică a mişcării corpului (legea mişcării) faţă de axa x dusă vertical în jos din poziţia de echilibru static al corpului.

Rezolvare. Fie l_0 - lungimea arcului nedeformat, δ_{st} - deformaţia statică a arcului, când corpul se află în poziţia de echilibru static. Alegem originea O a axei *x* în această poziţie a corpului (punctul O coincide cu centrul maselor corpului, când *x* este egal cu zero) şi îndreptăm axa vertical în jos. Alegerea originii axei *x* în punctul O este comodă fiindcă faţă de acest punct oscilaţiile corpului (deplasările *x*) vor fi simetrice: deplasarea maximală în jos va fi egală cu deplasarea maximală în sus. Fie *x* – deformaţia suplimentară a arcului când corpul efectuează o deplasare arbitrară de la poziţia de echilibru. În această poziţie asupra corpului acţionează două forţe: forţa de greutate $\vec{G}$ şi forţa elastică $\vec{F}$. Scriem ecuaţia diferenţială a mişcării de translaţie a corpului în proiecţie pe axa de coordonate *x*:

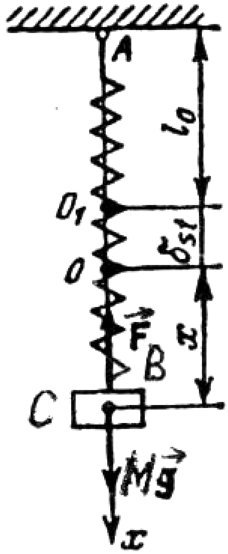


Figura 6.3.

$$M\ddot{x} = G_x + F_x, \qquad (1)$$

unde,

$$G_x = Mg, \text{ şi } F_x = -c(x+\delta_{st}). \qquad (2)$$

Aici *g* este acceleraţia căderii libere, *c* este coeficientul de elasticitate a arcului, $(x+\delta_{st})$ este deformaţia totală a arcului. Introducem (2) în (1) şi obţinem:

$$M\ddot{x} = Mg - c(x+\delta_{st}). \qquad (3)$$

Pentru a determina coeficientul *c* egalăm forţa elastică după mărime cu forţa statică *P*:

$$P = c\Delta l \Rightarrow c = P/\Delta l \Rightarrow c = 19{,}6\text{N}/1\text{m} = 19{,}6 \text{ N/m}. \qquad (4)$$

Pentru a determina δ_{st} scriem ecuaţia (3) pentru poziţia de echilibru a corpului, când $\ddot{x}=0$, $\dot{x}=0$, $x=0$:

$$0 = Mg - c\delta_{st} \Rightarrow \delta_{st} = Mg/c. \tag{5}$$

Ultima relaţie ne permite să reducem în ecuaţia (3) Mg cu $c\delta_{st}$, după ce obţinem

$$M\ddot{x} + cx = 0. \tag{6}$$

Aceasta este ecuaţia diferenţială în formă generală pentru oscilaţiile libere unidimensionale ale unui punct material sau corp. Dacă ca origine a axei x ar fi luat un alt punct pe verticală, de exemplu O_1, atunci ecuaţia diferenţială (6) ar deveni mai complicată.

Urmează **etapa matematică** de rezolvare a acestei ecuaţii diferenţiale. Împărţim (6) la M şi notăm $(c/M) = k^2$. Obţinem

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \tag{7}$$

Aceasta este forma matematică a ecuaţiei (6), care se numeşte ecuaţie diferenţială liniară, omogenă de ordinul doi cu coeficienţi constanţi. Soluţia poate fi obţinută în trei forme.

I. Forma complexă. Căutăm soluţia în forma $x = e^{st}$. Introducem această expresie în (7), simplificăm la e^{st} şi obţinem ecuaţia caracteristică pentru ecuaţia diferenţială (7)

$$s^2 + k^2 = 0, \tag{8}$$

rădăcinile căreia sunt imaginare $s_1 = ik$ şi $s_2 = -ik$. Soluţia generală a ecuaţiei (7) va fi

$$x = c_1 e^{ikt} + c_2 e^{-ikt}, \tag{9}$$

unde c_1 şi c_2 sunt constante arbitrare de integrare. Ele se determină din condiţiile iniţiale. Deplasarea x trebuie să fie reală.

II. Forma reală. Aplicăm în (9) formulele lui Euler

$$e^{\pm ikt} = \cos kt \pm i \sin kt \tag{10}$$

şi introducem constante noi de integrare

$$(c_1 + c_2) = c_1'; \quad i(c_1 - c_2) = c_2'. \tag{11}$$

Obţinem soluţia în forma

$$x = c_1' \cos kt + c_2' \sin kt. \tag{12}$$

Constantele noi c_1' şi c_2' se determină la fel din condiţiile iniţiale, dar toate mărimile în (12) sunt reale.

III. Forma comodă în aplicările tehnice. În loc de c_1' şi c_2' introducem alte constante de integrare a şi α:

$$c_1' = a\sin\alpha, \quad c_2' = a\cos\alpha, \tag{13}$$

şi obţinem

$$x = a\sin(kt + \alpha). \tag{14}$$

Oscilaţiile, care au loc sub acţiunea forţei de elasticitate se numesc *oscilaţii libere*. Forţa de greutate G determină numai poziţia de echilibru faţă de care au loc oscilaţiile şi perioada oscilaţiilor. Noi vedem, că corpul se mişcă după *legea sinusoidală*. Astfel de oscilaţii se mai numesc *armonice***.**

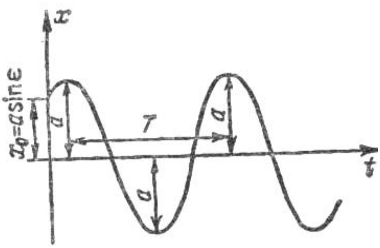


Figura 6.4.

Constantele a şi α la fel se determină din condiţiile iniţiale, dar ele au sens fizic: a este amplitudinea oscilaţiilor, $(kt + \alpha)$ este faza oscilaţiilor, α este faza iniţială, k este frecvenţa circulară, $k = 2\pi / T$, unde T este perioada oscilaţiilor, $T = 2\pi\sqrt{M / c}$ şi nu depinde de condiţiile iniţiale. În cazul nostru $k = 14s^{-1}$.

Deplasarea x a corpului desfăşurată în timp (graficul oscilaţiilor) reprezintă în cazul general o sinusoidă (fig. 6.4).

Din condiţiile: când $t = 0$, $x_0 = -\delta_{st} = -5cm$, $\dot{x}_0 = 0$, obţinem

$$-\delta_{st} = a\sin\alpha, \quad 0 = ak\cos\alpha, \tag{15}$$

de unde rezultă: $a = \delta_{st} = 0,05m$, $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$ şi

$$x = -0,05\cos 14t \text{ m.} \tag{16}$$

6.4. Influenţa rezistenţei asupra oscilaţiilor libere. Oscilaţii amortizate.

Problema 32.53 din [6].

O placă cu masa de 100 g, suspendată de arcul AB în punctul fix A, se mişcă între polii unui magnet. Din cauza curenţilor turbionari mişcarea este frânată de o forţă, proporţională cu viteza. Forţa de rezistenţă opusă mişcării este egală cu $qv\Phi^2$ N, unde q = 0,001, v - viteza în m/s, Φ - fluxul magnetic dintre polii N şi S. În momentul iniţial viteza plăcii este egală cu zero şi arcul nu este întins. Alungirea arcului cu 1 m are loc la acţiunea statică a unei forţe de 19,6 N, aplicate în punctul B. Să se determine mişcarea plăcii în cazul, când $\Phi = 10\sqrt{5}$ Vb (Veber este unitate de măsură a fluxului magnetic în SI).

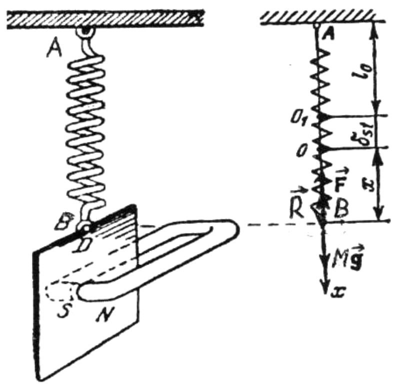


Figura 6.5.

Rezolvare.

Placa efectuează mişcare de translaţie, toate punctele ei se mişcă la fel. Considerăm acum punctul B – punctul plăcii conectat de arc. Asupra lui acţionează trei forţe: forţa de greutate $\vec{G} = M\vec{g}$, forţa elastică $\vec{F}$ şi forţa de rezistenţă $\vec{R}$. Forţa $\vec{R}$ este orientată opus vitezei. $\vec{R} = -q\Phi^2\vec{v} = -b\vec{v}$, $b = q\Phi^2$ am notat coeficientul de proporţionalitate. În cazul nostru b = 0.5 Ns/m. Alegem originea axei

x în punctul O, care coincide cu punctul B în poziţia de echilibru a corpului (plăcii) şi îndreptăm axa vertical în jos. Ecuaţia diferenţială a mişcării punctului B a plăcii se va scrie sub forma:

$$M\ddot{x} = G_x + F_x + R_x, \tag{1}$$

unde $G_x = Mg$, $F_x = -c\left(x+\delta_{st}\right)$, $R_x = -bv_x = -b\dot{x}$, şi deci

$$M\ddot{x} = Mg - c(x+\delta_{st}) - b\dot{x}. \tag{2}$$

Pentru poziţia de echilibru a plăcii, când $\ddot{x}=0$, $\dot{x}=0$, $x=0$, avem $Mg - c\delta_{st} = 0$ şi ecuaţia (2) devine

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0. \tag{3}$$

Introducem notările $c/M = k^2$, $b/M = 2h$ şi obţinem forma matematică a ecuaţiei (3)

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = 0. \tag{4}$$

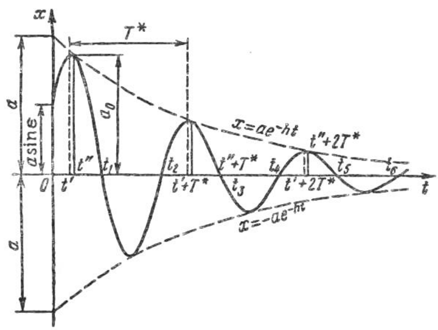


Figura 6.6. Oscilaţiile amortizate.

Repetăm procedura de rezolvare din paragraful precedent. Deoarece $h = 2{,}5s^{-1}$ iar $k = 14\,\mathrm{s}^{-1}$ şi deci $h < k$, rădăcinile ecuaţiei caracteristice $s^2 + 2hs + k^2$ sunt complexe:

$$s_1 = -h + ik^*, \; s_2 = -h - ik^*, \tag{5}$$

unde $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$, şi noi obţinem

$$x = ae^{-ht}\sin(k^* t + \varepsilon). \tag{6}$$

Amplitudinile oscilaţiilor, care ating înfăşurătoarele $\pm ae^{-ht}$ se micşorează cu timpul şi oscilaţiile se numesc amortizate (fig. 4.6). Condiţiile iniţiale: când t = 0, $x_0 = -\delta_{st} = -0,05m$, $\dot{x}_0 = 0$. Înlocuim în (6) şi obţinem

$$x_0 = -0,05 = a\sin\varepsilon\,,\ \dot{x}_0 = 0 = -ah\sin\varepsilon + ak^*\cos\varepsilon\,, \qquad (7)$$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + hx_0)^2}{k^{*2}}} = |x_0|\sqrt{\frac{k^2}{k^2 - h^2}} = 0{,}0516\text{m},$$

$$\sin\varepsilon = x_0 / a = -0{,}969,\quad k^* = 13,77s^{-1},$$

$$x = 0{,}0516e^{-2,5t}\sin(13{,}77t + \arcsin 0{,}969 + \pi)\,\text{m}.$$

Deoarece placa este în mişcare de translaţie, toate punctele ei efectuează oscilaţii analogice.

6.5. Oscilaţii forţate în prezenţa forţei de rezistenţă.

(Problema 32.94 din [6])

De un arc, coeficientul de rigiditate al căruia c = 19,6 N/m, sunt suspendate o bară magnetică cu masa de 50 g, care trece printr-un solenoid, şi o placă de cupru cu masa de 50 g, care trece printre polii unui magnet (fig. 4.7). Prin solenoid circulă curentul $i = 20\sin 8\pi t$ A, care creează o forţă de interacţiune dintre câmpul magnetic al solenoidului şi bară de $0.016\pi i$ N. Forţa de frânare a plăcii de cupru cauzată de curenţi turbionari este egală cu $qv\Phi^2$, unde q = 0,001, $\Phi = 10\sqrt{5}$ Vb şi v este viteza plăcii în m/s. Să se determine oscilaţiile forţate ale plăcii.

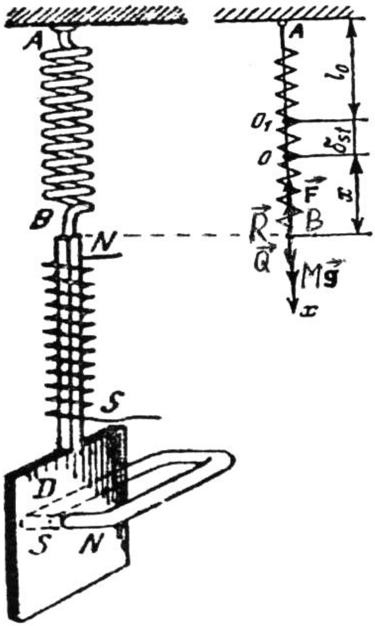


Figura 6.7.

Rezolvare.

Alegem axa x ca şi în problema precedentă, dar acum asupra punctului B acţionează încă o forţă, forţa perturbătoare $\vec{Q}$ (fig. 4.7):

$$Q_x = 0.016\pi i = 0.32\pi\sin 8\pi t. \qquad (1)$$

În acest caz ecuaţia diferenţială a mişcării punctului B va avea aspectul

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Q_0 \sin pt, \qquad (2)$$

unde $Q_0 = 0.32\pi$ N, $p = 8\pi$ s^{-1} = 25s^{-1}. Împărţim (2) la M şi introducem notările $c/M = k^2$, $b/M = 2h$, $Q_0/M = H_0$. Atunci (2) devine:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = H_0 \sin pt. \tag{3}$$

Dacă forța de frînare este egală cu zero(h=0) și alte forțe de rezistențăe se negligează, atunci ecuația diferențială a mișcării punctului B va deveni :

$$\ddot{x} + k^2 x = H_0 \sin pt \tag{4}$$

Ecuaţiile (3) și (4) au devenit neomogene, fiindcă partea din dreapta este diferită de zero. Soluţia ecuaţiei diferenţiale (3) este suma soluţiei generale x_1 a ecuaţiei omogene respective şi a soluţiei particulare x_2 a ecuaţiei neomogene (3). În problema precedentă am determinat $k = 14s^{-1}$, $h = 2.5s^{-1}$ şi pentru $h < k$ am obţinut soluţia ecuaţiei omogene

$$x_1 = a_1 e^{-ht} \sin(k * t + \varepsilon_1), \tag{5}$$

unde a_1 şi ε_1 sunt constantele de integrare, iar $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$. Soluţia (4) descrie oscilaţii amortizate. Soluţia particulară a ecuaţiei (3) se caută sub forma părţii din dreapta

$$x_2 = A\sin(pt - \beta), \tag{6}$$

unde constantele A şi β trebuie determinate astfel ca (5) să satisfacă ecuaţia (3). Soluţia (5) descrie oscilaţiile forţate. Constanta A are sensul amplitudinii oscilaţiilor forţate, $\left(pt - \beta\right)$ este faza oscilaţiilor, iar β este decalajul de fază a oscilaţiilor forţate în raport cu faza forţei perturbatoare. Semnul minus în faţa lui β în (5) înseamnă că conform principiului de cauzalitate deplasarea x_2 trebuie să urmeze după aplicarea forţei Q_x şi deci trebuie să întârzie în fază în raport cu faza forţei Q_x. Calculăm $\dot{x}_2, \ddot{x}_2$ şi le introducem în (3). De unde obţinem (vezi [4], Vol. 2, Cap.II, # 2.6]):

$$A = \frac{H_0}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4h^2 p^2}}, \; tg\beta = \frac{2hp}{k^2 - p^2}, \qquad (7)$$

$$H_0 = 10m/s^2.$$

În rezultat avem

$$x = a_1 e^{/ht} \sin(k*t + \varepsilon_1) + A\sin(pt - \beta) \qquad (8)$$

Constantele a_1 şi ε_1 se determină din condiţiile iniţiale. Ele vor fi altele decât în problema precedentă deoarece în (7) este şi termenul al doilea. Însă oscilaţiile amortizate se atenuează şi după un anumit interval de timp, numit timp de tranziţie t_{tr}, ele dispar. Rămân numai oscilaţiile forţate, care ne interesează. Constantele A şi β nu depind de condiţiile iniţiale şi obţinem

$$x_2 = 0.022\sin(8\pi t - 0.91\pi)\text{ m.} \qquad (9)$$

Să integrăm ecuaţia (3) în Matlab. Introducem valorile coeficienţilor şi adăugăm condiţiile iniţiale. Vom avea

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 196x = 1000\sin(25t),\; x(0) = -5\text{ cm},\; \dot{x}(0) = 0\text{ cm/s}.$$

Singuri alegeţi intervalul de tip t pentru ca pe ecran să se vadă timpul de tranziţie t_{tr}, când rămân numai oscilaţiile forţate. În cazul de faţă am ales, că t variază de la 0 la 4s.

Rezolvarea se reduce la următorii paşi:

1). Crearea file-funcţiei şi memorizarea ei: ofr1.m (oscilaţii forţate cu rezistenţă 1):

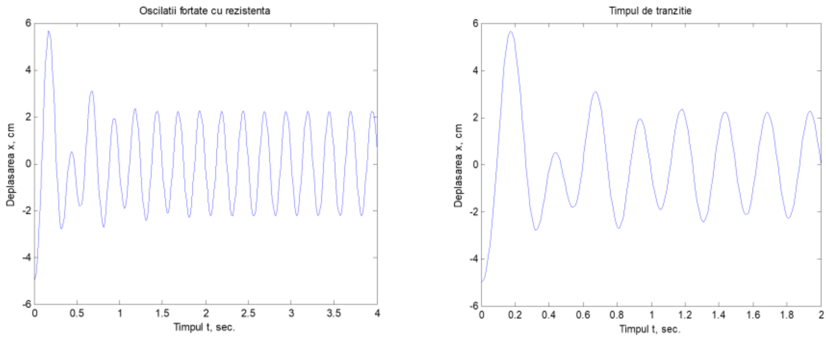
```
function dxdt=ofr1(t,x);
dxdt=zeros(2,1); % a column vector
dxdt(1)=x(2);
dxdt(2)=-5*x(2)-196*x(1)+1000*sin(25*t);
```

2). Obţinerea soluţiei şi a graficului însoţitor:

```
>> [t,x]=ode45(@ofr1,[0 4],[-5;0]);
plot(t,x(:,1),'-');
```

```
title('Oscilatii fortate cu rezistenta');
xlabel('Timpul t, sec.');
ylabel('Deplasarea x, cm')
```

În rezultat obţinem graficul mişcării (figura 6.8, a)). Observăm, că timpul de tranziţie, după care rămân numai oscilaţiile forţate este aproximativ de 1,5 sec (figura 6.8, b)).



a) pe intervalul [0 4]　　　b) doar pentru timpul de tranziţie

Figura 6.8. Graficele funcţiei

Obţinerea graficului doar pentru timpul de tranziţie:

```
>> [t,x]=ode45(@ofr1,[0 2],[-5;0]);
plot(t,x(:,1),'-');
title('Timpul de tranzitie');
xlabel('Timpul t, sec.');
ylabel('Deplasarea x, cm')
```

Sarcina lucrării nr. 6.

I. De calculat numeric integralele definite ordinare:

Varianta	Integrala a)	Integrala b)

1	$\int_{1/2}^{1}(1-2y)^3\sqrt{1+(1-2y)^4}\,dy$	$\int_{-1}^{\sqrt{2}}\frac{xdx}{(x^2+1)^3}$
2	$\int_{0}^{1} y^{1/2}(y^{3/2}+1)^{1/2}dy$	$\int_{0}^{1}\frac{u^2du}{(2-u^3)^3}$
3	$\int_{1}^{8} x^3\sqrt{x^4+1}dx$	$\int_{0}^{1}\frac{z}{(z^2+1)^4}dz$
4	$\int_{0}^{1}(1+5x)^{-1/3}dx$	$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+5x}}$
5	$\int_{0}^{\sqrt{5}} z\sqrt{z^2+4}dz$	$\int_{0}^{\sqrt{5}} z^2\sqrt{z^3+4}dz$
6	$\int_{0}^{9}\sqrt{1+\sqrt{y}}\,dy$	$\int_{0}^{1}\frac{z+1}{(z^2+2z+3)^{\frac{2}{3}}}dz$
7	$\int_{1}^{2} x^{-1/3}(x^{2/3}+1)^{1/3}dx$	$\int_{0}^{5/9}\frac{dy}{\sqrt{1-y}(1+\sqrt{1-y})^2}$
8	$\int_{1}^{5}\left(1-5x^2\right)^2\sqrt{3+\left(2+x\right)^3}dx$	$\int_{-1}^{\sqrt{5}}\frac{y^2dy}{\left(y^4+y^2+1\right)^{1/3}}$
9	$\int_{0}^{4}\left(y^2+2\right)^{1/4}y^{3/5}dy$	$\int_{1}^{5/2}\frac{\left(z^3-2\right)^{1/3}dz}{\left(z^2+z+1\right)^2}$
10	$\int_{-1}^{3}\left(y^3+3y+1\right)^3\left(y^2+2\right)dy$	$\int_{1.2}^{3}\frac{\left(u^2+1\right)^{1/3}du}{\left(u^3+u^2+2\right)^{1/2}}$

11	$\int_{-1/2}^{5}\left(x^4+x^2+1\right)^{1/5}x^6dx$	$\int_{-1.5}^{4}\frac{\left(z^2+z+1\right)^{1/5}dz}{\left(z^4+3\right)^2}$
12	$\int_{-2}^{2}\left(u^3+3u^{1/3}+2\right)^3u^2du$	$\int_{1}^{3}\frac{\left(x^{1/3}+x^2\right)^{1/5}dx}{\left(x^3+x^{1/2}\right)^{1/3}}$
13	$\int_{0}^{3}\left(x^{1/4}+x\right)^{3/2}x^3dx$	$\int_{1.5}^{4}\frac{\left(z^3+z^{2/3}\right)^{1/3}dz}{\left(z^4+1\right)^2}$
14	$\int_{1}^{4}\left(y^{1/3}+y^3\right)^{1/5}y^{7/3}dy$	$\int_{1}^{3}\frac{\left(u^3+u^{3/2}\right)^{1/3}du}{\left(u^2+2\right)^{1/5}}$
15	$\int_{1.2}^{3}x^{3/2}\left(\sqrt{x^4+2}\right)dx$	$\int_{1}^{4}\frac{\left(z^{3/2}+z\right)^{1/5}dz}{\left(z^3+2\right)^{1/3}}$
16	$\int_{1.5}^{4}\left(y^{5/3}+1\right)^{1/3}y^{3/2}dy$	$\int_{1.2}^{4}\frac{\left(x^4+3x^{1/3}\right)dx}{\left(x^2+4\right)}$
17	$\int_{1.2}^{3}\left(x^{3/2}+1\right)x^{7/3}dx$	$\int_{0.5}^{2}\frac{\left(u^3+u^{1/3}\right)du}{\left(u^{3/4}+2\right)}$
18	$\int_{0}^{3}x^{3/4}\left(x^{2/3}+2\right)dx$	$\int_{0.2}^{3}\frac{\left(y^{2/5}+y\right)dy}{\left(y^3+3\right)}$
19	$\int_{0.5}^{4}y^{7/3}\left(y^3+y^{3/5}\right)dy$	$\int_{0}^{3}\frac{\left(z^{3/4}+z\right)dz}{\left(z^3+1\right)^{1/3}}$
20	$\int_{0.2}^{3}x^{7/3}\sqrt{x^3+x}dx$	$\int_{0.5}^{3}\frac{z^{3/2}\left(z^3+1\right)dz}{\left(z+2\right)^{1/3}}$

21	$\int_0^3 x^{3/2}\left(x^3+x^{1/3}\right)dx$	$\int_0^2 \frac{y^{1/3}\left(y^2+2\right)dy}{\left(y^{3/2}+1\right)}$
22	$\int_{1.2}^3 z^{4/3}\left(z^2+3\right)dz$	$\int_{0.5}^3 \frac{u^{3/2}\left(u^{1/3}+1\right)du}{\left(u^{3/5}+u\right)}$
23	$\int_{0.5}^3 x^{7/3}\left(x^3+2\right)dx$	$\int_{0.2}^2 \frac{\left(y^{3/2}+2\right)y^2dy}{\left(y^3+1\right)}$
24	$\int_1^4 y^{4/3}\left(y^{1/5}+1\right)dy$	$\int_0^3 \frac{\left(x^{7/3}+1\right)^{3/2}dx}{x^3+2}$
25	$\int_{0.2}^3 u^{3/4}\left(u^3+2\right)^{1/3}du$	$\int_{0.2}^4 \frac{\left(y^{4/3}+y\right)^{1/5}dy}{\left(y^2+1\right)}$
26	$\int_0^4 x^{1/3}\left(x^3+x^{3/2}\right)^{1/5}dx$	$\int_{0.3}^3 \frac{\left(y^{4/5}+y^{1/3}\right)^{1/4}dy}{\left(y^3+1\right)}$
27	$\int_{0.2}^3 z^{7/2}\left(z^4+1\right)^{1/3}dz$	$\int_{0.1}^4 \frac{\left(x^{3/2}+x^{2/7}\right)^{1/3}dx}{\left(x^2+1\right)}$
28	$\int_0^{3.1} x^{3/5}\left(x^2+1\right)^{1/3}dx$	$\int_0^3 \frac{\left(y^{5/2}+1\right)y^2dy}{\left(y^3+2\right)}$
29	$\int_{0.1}^2 \left(u^3+1\right)^{1/3}udu$	$\int_{0.1}^4 \frac{\left(z^{3/5}+2\right)^{1/3}dz}{\left(z^2+1\right)}$
30	$\int_0^3 x^{7/3}\left(x^2+1\right)^{3/4}dx$	$\int_0^1 \frac{y^{3/2}(y^3+2)^{1/3}}{(y^2+2)}dy$

II. De calculat numeric integrala definită dublă folosind file-funcţia respectivă:

Varianta	Integrala dublă
1	$\int_{4}^{5}\int_{10}^{11}[e^{x+y}+\ln(xy)]^{2/3}dxdy$
2	$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}[4x^3\sqrt{y}+3y^2\sqrt{x}]1/4dxdy$
3	$\int_{-1}^{2}\int_{-2}^{1}[4y^2\sqrt[3]{x}+\cos y]1/3dxdy$
4	$\int_{2}^{3}\int_{0}^{1}(e^x+\cos y)^3dxdy$
5	$\int_{2}^{3}\int_{1}^{2}(x+y)^3e^{x+y}dxdy$
6	$\int_{3}^{4}\int_{1}^{2}(6x^2y+8xy^3)\sqrt{x^3y^3}dxdy$
7	$\int_{0.1}^{0.2}\int_{-1}^{0}[x^2y^3+\sin x]e^xdxdy$
8	$\int_{1}^{3}\int_{0.1}^{2}\left[\sin x+ye^{x^2+y^2}\right]^{1/3}dxdy$
9	$\int_{0.1}^{3}\int_{1}^{4}\left[\ln\left(x^2+y\right)+y^2\sin\left(xy\right)\right]^{1/2}dxdy$
10	$\int_{1}^{3}\int_{0.2}^{1}\left[xe^{x+y}+x^3\cos y\right]^{1/4}dxdy$

11	$\int_1^3\int_1^2\left[ye^x + x\cos y\right]^{1/3} dxdy$
12	$\int_2^4\int_1^3\left[3x^2y + 2x\ln(xy)\right]dxdy$
13	$\int_2^3\int_1^2\left[(x+2y)^3 + x\arcsin(xy)\right]^{1/3} dxdy$
14	$\int_1^2\int_1^3\left[x^{3/2}(x+y)^2 + ye^{x+y}\right]^{1/2} dxdy$
15	$\int_{0.2}^2\int_{0.1}^1\left[x^{7/2}\left(3xy^2 + \sin x\right)\right]^{3/4} dxdy$
16	$\int_2^3\int_1^2\left[(x+2y)^3 + x\arcsin(xy)\right]^{1/3} dxdy$
17	$\int_1^2\int_{0.2}^1\left[x^3y^{3/2} + \sin x\right]e^{x+y}dxdy$
18	$\int_1^2\int_{0.3}^1\left[x^{3/2}y^{7/3} + \ln(xy)\right]\sin x dxdy$
19	$\int_{0.5}^4\int_{0.4}^1\left[x^{4/3}\left(x+\sqrt{y}\right)^2 + xe^{x+y}\right]xydxdy$
20	$\int_2^3\int_1^2\left[x^{1/3}\sin(xy) + x^{2/3}y^{7/2}\right]e^{x+y}dxdy$
21	$\int_1^3\int_1^2\left(x + x^{1/3}y^{2/5}\right)^{0.7} e^{x+y}dxdy$
22	$\int_2^3\int_{0.1}^1\left[\left(x + x^3y^{7/2}\right)^{1/3} + xy\sin x\right]dxdy$

23	$\int_{2}^{3}\int_{1}^{2}\left[xy^{1/3}+e^{x+y}x^{1/3}y^{7/2}\right]^{1/3}dxdy$
24	$\int_{1}^{2}\int_{0.1}^{1}\left[xy\sin(xy)+\ln xe^{x+y^{2}}\right]^{1/3}dxdy$
25	$\int_{1}^{3}\int_{0.5}^{2}\left(3x^{3}y^{1/3}+4xy\cos x\right)x^{7/3}y^{1/5}dxdy$
26	$\int_{2}^{3}\int_{1}^{2}\left[x^{2}y^{1/5}+3\ln(xy)\right]^{1/3}x^{2}y^{3}dxdy$
27	$\int_{1}^{3}\int_{0.1}^{2}\left[\sin x+ye^{x^{2}+y^{2}}\right]^{1/3}dxdy$
28	$\int_{2}^{3}\int_{1}^{2}\left[(x+2y)^{3}+x\arcsin(xy)\right]^{1/3}dxdy$
29	$\int_{2}^{3}\int_{1}^{2}\left[(x+2y)^{3}+x\arcsin(xy)\right]^{1/3}dxdy$
30	$\int_{0.5}^{4}\int_{0.4}^{1}\left[x^{4/3}\left(x+\sqrt{y}\right)^{2}+xe^{x+y}\right]xydxdy$

III. De calculat numeric integrala triplă folosind file-funcţia respectivă.

Varianta	Integrala triplă

1	$\int_0^2 \int_3^4 \int_5^6 (xy + x^2 z)\,dxdydz$
2	$\int_{-2}^2 \int_0^4 \int_{-4}^4 xyz\,dxdydz$
3	$\int_2^0 \int_4^0 \int_5^6 (x^2 y + y^2 z)\,dxdydz$
4	$\int_2^3 \int_1^4 \int_3^4 e^{x+y+z}\,dxdydz$
5	$\int_2^3 \int_1^4 \int_3^4 (e^{x+y} + z^2)\,dxdydz$
6	$\int_2^3 \int_1^2 \int_3^4 (x + y + z)^4\,dxdydz$
7	$\int_0^1 \int_1^2 \int_{-1}^0 (xyz)^2 e^z\,dxdydz$
8	$\int_1^2 \int_0^2 \int_1^2 [\sin(x) + ye^{x+z}]^{\frac{1}{2}}\,dxdydz$
9	$\int_{0,1}^3 \int_0^1 \int_2^3 [\ln(x^2 + y) + z^2 \sin(xy)]^{\frac{1}{2}}\,dxdydz$
10	$\int_1^2 \int_0^1 \int_3^4 [ze^{x+y} + y^2 \cos(x)]^{\frac{1}{4}}\,dxdydz$

11	$\int_1^3\int_1^2\int_5^6 [ye^x + x\cos(z)]^{\frac{1}{3}}\,dxdydz$
12	$\int_2^4\int_1^3\int_0^2 [4x^2yz^2 + x\ln(xz)]dxdydz$
13	$\int_1^2\int_0^3\int_1^4 [(x+2y+3z)^2 + z\cdot\arcsin(x)]dxdydz$
14	$\int_2^3\int_1^2\int_4^5 [x^{\frac{3}{2}}(y+z)^2 + ze^{x+y}]dxdydz$
15	$\int_{0,2}^1\int_{0,1}^2\int_3^3 [x^{\frac{5}{2}}(3yz^2 + \sin(y))]dxdydz$
16	$\int_2^3\int_1^2\int_3^4 [(2x+y)^3 + z\cdot\arcsin(xz)]^{\frac{1}{3}}\,dxdydz$
17	$\int_1^2\int_0^3\int_2^4 [x^2z^3 + \sin(y)]\cos(z)dxdydz$
18	$\int_1^2\int_0^1\int_2^2 [x^3y^2 + \ln(xz)]\sin(z)dxdydz$
19	$\int_2^3\int_0^1\int_0^1 [x^2(y+z^{\frac{1}{2}})^3 + xe^{y+z}]dxdydz$
20	$\int_0^1\int_2^3\int_1^2 [x^{\frac{1}{3}}\cos(yz) + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{2}}z]e^{x+z}dxdydz$

21	$\int_1^3\int_0^1\int_2^3 (y + x^{\frac{1}{4}} z^{\frac{2}{3}}) tg(y) dxdydz$
22	$\int_2^3\int_0^1\int_1^4 [(z + x^3 y^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{3}} + xy\sin(z)] dxdydz$
23	$\int_1^3\int_0^2\int_3^4 (xy^{\frac{1}{3}} + e^{x+z} y^{\frac{1}{4}} z^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{3}} dxdydz$
24	$\int_1^2\int_2^3\int_0^1 [xz\sin(xz) + ytg(z)] dxdydz$
25	$\int_2^3\int_3^4\int_4^5 [3x^3 y^{\frac{1}{3}} 4yz\cos(z)] x^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}} dxdydz$
26	$\int_0^1\int_2^3\int_4^5 (x^2 y^{\frac{1}{5}} + 3zy^{\frac{1}{3}}) ztg(x) dxdydz$
27	$\int_1^2\int_1^2\int_3^4 [\sin(x) + ze^{x^2+y^2}]^{\frac{1}{3}} dxdydz$
28	$\int_1^3\int_2^4\int_3^5 [(x + 2y + z)^3 + xz\arcsin(xz)]^{\frac{1}{4}} dxdydz$
29	$\int_3^4\int_1^2\int_4^5 [(y + 3z)^2 + yz\sin(x)]^2 dxdydz$
30	$\int_1^2\int_1^2\int_1^2 [x^3(y + z^2) + ztg(x)] dxdydz$

IV . De scris şi de rezolvat numeric ecuaţia diferenţială a oscilaţiilor rectilinii ale punctului material. Parametrii sistemului mecanic se aleg desinestătător în mod aleatoriu. De construit graficul dependenţei parametrului de poziţie (x=x(t)) şi de determinat caracteristicile dinamice ale mişcărilor respective (vezi anexa nr.5 la pag. 164-165):

a). Oscilaţiile libere în lipsa rezistenţei mediului.
b). Oscilaţiile libere în prezenţa rezistenţei mediului.
c). Oscilaţiile forţate în lipsa rezistenţei mediului
d). Oscilaţiile forţate în prezenţa rezistenţei mediului

Lucrarea nr.7. Dinamica punctului material

Dinamica este cel mai general compartiment al mecanicii, care studiază mişcarea corpurilor, ţinând cont de forţele care acţionează asupra lor.

Obiectivul de bază al dinamicii constă în stabilirea legii de mişcare a unui corp, sau a unui sistem de corpuri, cunoscând forţele care acţionează asupra lor.

Dinamica clasică se bazează pe trei principii de bază (*legile lui Newton*) la care se mai adaugă două:

Principiul I al dinamicii (principiul inerţiei): Un corp îşi păstrează starea de mişcare rectilinie şi uniformă sau de repaus relativ atâta vreme cât asupra sa nu acţionează o forţă externă.

Principiul II al dinamicii: Acceleraţia unui corp este direct proporţională cu forţa externă care acţionează asupra sa şi invers proporţională cu masa sa.

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} \qquad \text{sau} \qquad m\cdot\mathbf{a} = \mathbf{F} \qquad (1)$$

Principiul III al dinamicii (principiul acţiunii şi reacţiunii): Dacă un corp A exercită o forţă asupra corpului B, atunci şi corpul B acţionează asupra corpului A cu o forţă egală în modul şi de sens contrar.

Observaţie:forţele de acţiune–reacţiune sunt aplicate la diferite corpuri şi deci nu pot fi în echilibru.

Principiul IV al dinamicii (principiul acţiunii independente ale forţelor): Mai multe forţe care acţionează asupra aceluiaşi corp, acţionează independent producând fiecare dintre ele propriul său efect.

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = \frac{\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots}{m} = \frac{\boldsymbol{F}_1}{m} + \frac{\boldsymbol{F}_2}{m} + \ldots = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots \qquad (2)$$

Principiul V al dinamicii (principiul relativităţii): Starea de mişcare şi de repaus ale unui corp sunt relative depinzând de starea sistemului de referinţă considerat.

Forţa *F* poate fi constantă sau variabilă în funcţie de poziţia şi viteza punctului şi, în unele aplicaţii, în mod explicit de timp:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \sum \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) \qquad (4)$$

Proiectând (4) pe axele unui sistem de coordonate, se obţin sisteme de ecuaţii diferenţiale scalare de ordinul II, prin integrarea cărora se obţin ecuaţiile mişcării. Constantele de integrare care apar se determină de regulă din condiţiile iniţiale ale mişcării: $t = 0, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0$.

1) În coordonate carteziene:

$$m\ddot{x} = \sum F_x \quad m\ddot{y} = \sum F_y \quad m\ddot{z} = \sum F_z \qquad (5)$$

După prima integrare ale ecuaţiilor (5) obţinem proiecţiile vitezei pe axele x,y,z

$$v_x = \dot{x}(t), \quad v_y = \dot{y}(t), \quad v_z = \dot{z}(t), \qquad (6)$$

iar după a doua integrare obţinem ecuaţiile mişcării

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{7}$$

Constantele de integrare se calculează din ecuaţiile (6),(7) şi condiţiile iniţiale:

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \\ v_x = v_{0x}, \quad v_x = v_{0y}, \quad v_z = v_{0z} \end{cases} \tag{8}$$

Soluţionarea numerică a unui sistem de ecuaţii diferenţiale se realizează în baza unor rutine specializate. Marea majoritate a acestor rutine au la bază metoda Runge-Kutta de ordinul IV, care permite soluţionarea oricărui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul I. Sistemele de ecuaţii diferenţiale de ordin superior vor fi mai întâi prelucrate şi, cu ajutorul unor ecuaţii intermediare, vor fi aduse la ecuaţii de ordinul I.

Vom expune succint procedura de soluţionare a unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul I. Fie un sistem din *n* ecuaţii diferenţiale de ordinul I:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(t, y_1, ..., y_n) \\ \dot{y}_2 = f_2(t, y_1, ..., y_n) \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(t, y_1, ..., y_n) \end{cases} \tag{9}$$

Algoritmul de rezolvare a sistemului de ecuaţii diferenţiale (9) constă în următoarele:

Se alcătuieşte un vector linie al variabilelor sistemului şi un vector coloană al derivatelor variabilelor în raport cu timpul:

$$\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, ..., y_n];\ \boldsymbol{dy} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, \boldsymbol{y}) \\ f_2(t, \boldsymbol{y}) \\ \vdots \\ f_n(t, \boldsymbol{y}) \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} t_{min} \\ t_{min} + pas \\ \vdots \\ t_{max} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Pasul de parcurgere a intervalului de timp se determină automat de către program. În procesul de rezolvare a unei ecuaţii diferenţiale apar constante de integrare, care se determină din anumite condiţii concrete ale evoluţiei procesului fizic. În cele mai dese cazuri, acestea sunt condiţiile iniţiale, care definesc valoarea anumitor variabile în momentul iniţial de timp. Pentru $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{y}_0 = [y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}]; \qquad (11)$$

Procedura de integrare presupune apelarea unei file-funcţii în care se vor calcula valorile derivatelor în baza expresiilor (9). Această funcţie va fi apelată pentru fiecare valoare din vectorul $\boldsymbol{t}$.

$$function\,\boldsymbol{dy} = fun(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}) \qquad (12)$$

$$[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}] = ode45('fun', \boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}0) \qquad (13)$$

În rezultatul integrării se va obţine un vector $\boldsymbol{t}$, în care sunt incluse toate valorile m pe care le ia variabila independentă (timpul). Matricea $\boldsymbol{y}[m,n]$ conţine soluţiile sistemului de ecuaţii.

Ca exemplu vom analiza mişcarea unui punct material pe un plan înclinat. Fie un plan înclinat cu unghiul de la bază α. Un punct material de masă m este lansat cu viteza v_0 pe suprafaţa planului sub unghiul β faţă de baza planului (fig.7.1). Coeficientul de frecare de alunecare este μ. Să se compună ecuaţiile diferenţiale ale mişcării punctului şi să se traseze traiectoria.

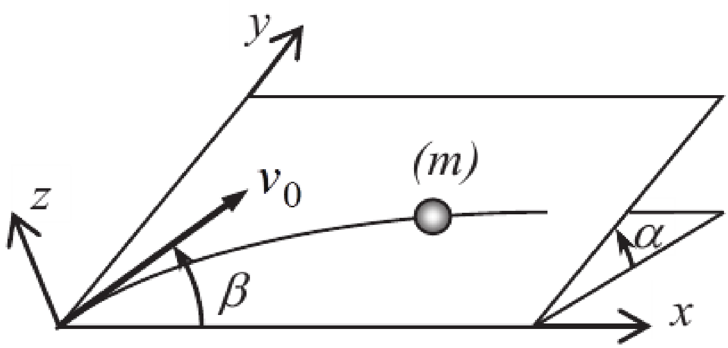


fig.7.1.

Modulul şi direcţia forţei de frecare se determină de relaţia:

$$\boldsymbol{F}_f = -\mu N \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} , \qquad (14)$$

unde N este reacţiunea normală a planului iar $\boldsymbol{v}$ este vectorul vitezei, definit în coordonate carteziene în forma:

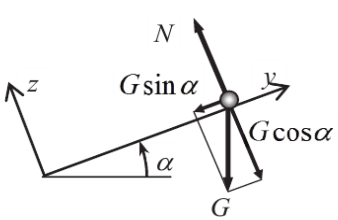
$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k} \qquad |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad (15)$$

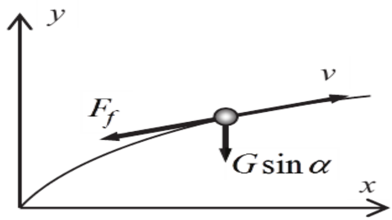
Întrucât punctul se mişcă în planul xy, componenta $v_z = 0$.

Ecuaţia fundamentală a dinamicii (legea a doua a lui Newton) are forma:

$$m\boldsymbol{a} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_f \qquad (16)$$

unde $\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j}$ este vectorul acceleraţiei, exprimat prin componentele în planul xy.





Conform (14), forţa de frecare va fi orientată întotdeauna în sens opus vectorului vitezei. Vom proiecta ecuaţia (16) pe axele x, y şi z :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -F_f = -\mu N \dfrac{v_x}{|\mathbf{v}|} \\ m\ddot{y} = -\mu N \dfrac{v_y}{|\mathbf{v}|} - G\sin\alpha \\ 0 = N - G\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\mu g\cos\alpha \cdot \dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \\ \ddot{y} = -\mu g\cos\alpha \cdot \dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} - g\sin\alpha \end{cases} \quad (17)$$

La transformarea sistemului de ecuaţii s-a ţinut cont că $G = mg$. Astfel, se obţine un sistem din două ecuaţii diferenţiale de ordinul II, neomogene, care sunt cuplate între ele. Soluţionarea analitică a acestui sistem constituie o problema destul de dificilă. Vom aplica metoda numerică de soluţionare, conform algoritmului descris în (9) – (13). Vectorul soluţiilor sistemului şi vectorul derivatelor

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}; \ , \ \boldsymbol{dudt} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ -\mu g\cos\alpha \cdot \dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \\ -\mu g\cos\alpha \cdot \dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} - g\sin\alpha \end{bmatrix}; \quad (18)$$

Derivatele de ordinul II au fost exprimate prin derivata de ordinul I conform (17). Pentru soluţionarea exactă a sistemului este necesară definirea condiţiilor iniţiale.

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ v_x = \dot{x} = v_0\cos\beta \\ v_y = \dot{y} = v_0\sin\beta \end{cases}, \quad \boldsymbol{u0} == \begin{bmatrix} x0 \\ y0 \\ \dot{x}0 \\ \dot{y}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x0 \\ y0 \\ v0\cos\alpha \\ v0\sin\alpha \end{bmatrix}; \ (19)$$

Vectorul care conţine variabila independentă (în cazul dat - timpul):

$$\boldsymbol{t} = [t_{min} \quad t_{max}]; \tag{20}$$

După integrare se va obţine o matrice ***u***, care conţine soluţiile sistemului pentru fiecare valoare a timpului din (20).

Programul de calcul:

Fun.m

```
 function dudt=fun(t,u)
global miu g alfa beta;
xp=u(3);
yp=u(4);
v=sqrt(xp^2+yp^2);
xpp=-miu*g*cos(alfa)*xp/v;
ypp=-miu*g*cos(alfa)*yp/v-g*sin(alfa);
dudt=[xp;yp;xpp;ypp];
end
```

procedura **plan.m**

```
clear all; close all;
% Variabile globale, care sunt si in functia fun.m
global miu g alfa beta;
% Date numerice
v0=2; % m/s
alfa=pi/6;beta=pi/4;
miu=0.15;g=9.81;
% Intervalul de integrare
tmin=0; tmax=10; t=[tmin,tmax];
% Conditiile initiale
x0=0;y0=0; v0x=v0*cos(beta);v0y=v0*sin(beta);
u0=[x0,y0,v0x,v0y];
% Procedura de integrare
[t,u]=ode45('fun',t,u0);
% Interpretarea rezultatelor
figure(1);
plot(t,u(:,1),'k-');grid;
xlabel('t,sec');ylabel('x,m');
title('Graficul x=x(t)');
figure(2);
plot(u(:,1),u(:,2),'r-');grid;
xlabel('x,m');ylabel('y,m');
title('Traiectoria miscarii punctului');
```

Sarcina lucrării nr.7

I. Un punct material de masă m , se deplasează în planul xy sub acţiunea a două forţe $\boldsymbol{F}_1$ şi $\boldsymbol{F}_2$. În momentul iniţial de timp, punctul se află în originea sistemului de coordonate, iar viteza iniţială $\boldsymbol{v}_0$ este orientată sub un unghi de 45º faţă de axa absciselor, x. De alcătuit ecuaţiile diferenţiale ale mişcării şi de rezolvat numeric .

a). Să se construiască pe aceleaşi axe de coordonate cu linii diferite graficele dependenţelor $x = x(t)$ şi $y = y(t)$.

b). Să se construiască pe aceleaşi axe graficele dependenţelor $v_x(t)$, $v_y(t)$ şi $v(t)$.

c). Să se construiască traiectoria punctului material şi să se arâte pe grafic vectorul vitezei pentru momentul iniţial de timp .

<u>Notă:</u>

Pentru trasarea unui vector pe grafic, aplicaţi comanda ***hold on***, apoi ***quiver(x,y,u,v).***Instrucţiunea ***quiver(x,y,u,v)*** permite construirea unui vector cu originea în ***x,y*** şi componentele ***u,v.***

Var.	$\boldsymbol{F}_1$ N	$\boldsymbol{F}_2$ N	v_0, m/s	m, kg
1, 16	$-0.5(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})$	$0.7(x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j})$	2	2
2, 17	$2\sin(x)\boldsymbol{i} - 1.5y\boldsymbol{j})$	$3\cos(x)\boldsymbol{i} - 1.4\boldsymbol{j})$	3	0.5
3, 18	$2\boldsymbol{i} - 1.5y\boldsymbol{j}$	$\cos(x)\boldsymbol{i} + \sin(y)\boldsymbol{j}$	1	0.5
4, 19	$-3\boldsymbol{i}$	$x\boldsymbol{i} + \sin(y)\boldsymbol{j}$	1.7	3
5, 20	$2\boldsymbol{i} + 1y\boldsymbol{j}$	$-x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$	5	1.8
6, 21	$1.5\sin(x)\boldsymbol{i} - 17\boldsymbol{j}$	$x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$	4	2

7, 22	$\cos(\pi t/6)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$	1	0.3
8, 23	$t\boldsymbol{i} - 2ty\boldsymbol{j}$	$-3x\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$	5	3
9, 24	$e^{-x}\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j}$	$\cos(t)\boldsymbol{i} - \sin(t)\boldsymbol{j}$	1.3	1
10, 25	$e^{-x}\boldsymbol{i} + e^{-2y}\boldsymbol{j}$	$3\cos(t)\boldsymbol{i} - 5\sin(t)\boldsymbol{j}$	1.5	2
11, 26	$\boldsymbol{i} - 1.3\dot{y}\boldsymbol{j}$	$-1.4x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j}$	3.5	1.2
12, 27	$2t\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j}$	$\sin(\pi t/4)\boldsymbol{i} - \dot{y}\boldsymbol{j}$	5	2.3
13, 28	$(t - \dot{x})\boldsymbol{i} - 7y\boldsymbol{j}$	0	2	0.75
14, 29	$\boldsymbol{i} + \cos(t)\boldsymbol{j}$	$5\boldsymbol{i} + 6t\boldsymbol{j}$	3.4	3
15, 30	$(1 - e^{x})\boldsymbol{i} - \dot{y}\boldsymbol{j}$	$(-x + 1.3t)\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$	0.5	1.5

II. Fie un punct material M, de masă *m*, se deplasează în spaţiu sub acţiunea unei forţe ***P***. Asupra punctului acţionează din partea mediului o forţă de rezistenţă ***R*** = -*c**v***. În momentul iniţial de timp, punctul material se află în poziţia definită prin vectorul iniţial de poziţie, $\boldsymbol{r}_0$ şi are viteza $\boldsymbol{v}_0$.

a). Să se construiască graficele dependenţelor $x = x(t)$, $y = y(t)$ şi $z = z(t)$.

b). Să se construiască traiectoria mişcării punctului material şi să se arâte vectorul vitezei iniţiale.

Var.	**P** N	***c*** kg/s	$\boldsymbol{r}_0$ m	$\boldsymbol{v}_0$ *m/s*
1, 16	$-0.35x\boldsymbol{i} - 0.5y\boldsymbol{j} - 0.5z\boldsymbol{k}$	0.1	$7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$	$4\mathbf{j} + 0.3\mathbf{k}$

2, 17	$t\cos(\pi/6)\boldsymbol{i}+\sin(\pi/6)\boldsymbol{k}$	0.3	0	$0.5\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$
3, 18	$-0.5\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{z}\boldsymbol{k}$	0.2	0	$2\mathbf{i}-2\mathbf{j}$
4, 19	$\dot{x}\boldsymbol{i}+(6-1.5\dot{z})\boldsymbol{k}$	0.1	0	$3\mathbf{j}+0.5\mathbf{k}$
5, 20	$\cos(\dot{x})\boldsymbol{i}-\sin(y)\boldsymbol{j}+e^{-tz}\boldsymbol{k}$	0.3	$3\mathbf{j}+\mathbf{k}$	$2\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}$
6, 21	$2\cos(t)\boldsymbol{i}-3\sin(t)\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$	0.2	$\mathbf{i}+\mathbf{k}$	$2\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}$
7, 22	$2\boldsymbol{i}-3\sin(t)\boldsymbol{j}+2\cos(t)\boldsymbol{k}$	0.2	$20\boldsymbol{k}$	0
8, 23	$2\sin(t)\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\cos(t)\boldsymbol{k}$	0.1	$20\boldsymbol{k}$	$0.5\mathbf{i}+\mathbf{k}$
9, 24	$tx\boldsymbol{i}+\sin(\dot{y})\boldsymbol{j}$	0.2	0	$0.5\mathbf{j}+0.3\mathbf{k}$
10, 25	$2\mathbf{j}+\sin(0.5+t)\mathbf{k}$	0.5	0	$3\mathbf{i}$
11, 26	$\boldsymbol{i}+\dot{z}\boldsymbol{k}$	0.2	0	$3\mathbf{i}+5\mathbf{j}$
12, 27	$-2x\mathbf{i}-\mathbf{j}-2z\mathbf{k}$	0.5	$\boldsymbol{j}$	$2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$
13, 28	$-5x\boldsymbol{i}-3e^{-2t}y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}$	0.4	$\boldsymbol{i}$	$3\mathbf{i}+3\mathbf{k}$
14, 29	$-3.2x\boldsymbol{i}-3e^{-2.5t}\dot{y}\boldsymbol{j}-\dot{z}\boldsymbol{k}$	0.1	$\boldsymbol{k}$	$8\mathbf{i}+2\mathbf{j}$
15, 30	$-3x\boldsymbol{i}-5y\boldsymbol{j}-3z\boldsymbol{k}$	0.3	$2\boldsymbol{k}$	$4\mathbf{j}+9\mathbf{k}$

ANEXA 1.
EXEMPLU - Foaie de titlu.

Ministerul Educaţiei, Culturii şi Cercetării
al Republicii Moldova

Universitatea Tehnică a Moldovei

Departamentul Mecanica Teoretică

RAPORT

despre lucrarea de laborator nr. 1

la Mecanică realizată în MATLAB
Tema: Elemente ale programului MATLAB

Varianta 5

A îndeplinit st.gr.TI-041 Sergiu Olaru

A controlat conf.univ., Sanduleac I.

Chişinău – 2018

ANEXA 2.
EXEMPLU - Foaie de titlu.

Ministerul Educaţiei ,Culturii şi Cercetării
al Republicii Moldova
Universitatea Tehnică a Moldovei

Departamentul Mecanica Teoretică

RAPORT

despre lucrările de laborator
la Mecanică realizate în MATLAB
Varianta 5

A îndeplinit st.gr.TI-041 Sergiu Olaru

A controlat conf.univ., Sanduleac I.

Nr. lucrării de laborator	Data verificării	Rezultatul aprecierii	Semnătura profesorului
Lucrarea nr.1			
Lucrarea nr.2			
Lucrarea nr.3			
Lucrarea nr.4			
Lucrarea nr.5			
Lucrarea nr.6			
Lucrarea nr.7			

Chişinău – 2018

ANEXA 3.
Secvenţele de caractere folosite la grafice.

Când interpretatorul de text e setat TeX (setare implicită), e posibil de folosit un subset de comenzi TeX incluse în text pentru producerea simbolurilor speciale, aşa ca literele greceşti, simboluri matematice. Acest tabel prezintă lista caracterelor şi secvenţelor de caractere folosite pentru definirea lor.

Secvența de caractere	Symbol	Secvența de caractere	Symbol	Secvența de caractere	Symbol
\alpha	α	\upsilon	υ	\sim	~
\beta	β	\phi	ϕ	\leq	≤
\gamma	γ	\chi	χ	\infty	∞
\delta	δ	\psi	ψ	\clubsuit	♣
\epsilon	ε	\omega	ω	\diamondsuit	♦
\zeta	ζ	\Gamma	Γ	\heartsuit	♥
\eta	η	\Delta	Δ	\spadesuit	♠
\theta	θ	\Theta	Θ	\leftrightarrow	↔
\vartheta	ϑ	\Lambda	Λ	\leftarrow	←
\iota	ι	\Xi	Ξ	\uparrow	↑
\kappa	κ	\Pi	Π	\rightarrow	→
\lambda	λ	\Sigma	Σ	\downarrow	↓
\mu	µ	\Upsilon	ϒ	\circ	°
\nu	ν	\Phi	Φ	\pm	±
\xi	ξ	\Psi	ψ	\geq	≥
\pi	π	\Omega	Ω	\propto	∝
\rho	ρ	\forall	∀	\partial	∂
\sigma	σ	\exists	∃	\bullet	•
\varsigma	ς	\ni	∍	\div	÷
\tau	τ	\cong	≅	\neq	≠
\equiv	≡	\approx	≈	\aleph	ℵ

\Im	ℑ	\Re	ℜ	\wp	℘
\otimes	⊗	\oplus	⊕	\oslash	∅
\cap	∩	\cup	∪	\supseteq	⊇
\supset	⊃	\subseteq	⊆	\subset	⊂
\int	∫	\in	∈	\o	ο
\rfloor	⌋	\lceil	⌈	\nabla	∇
\lfloor	⌊	\cdot	·	\ldots	...
\perp	⊥	\neg	¬	\prime	′
\wedge	∧	\times	x	\0	∅
\rceil	⌉	\surd	√	\mid	|
\vee	∨	\varpi	ϖ	\copyright	©
\langle	〈	\rangle	〉		

De asemenea se poate de folosit secvenţele de caractere pentru modificarea fontului folosit:

\bf Font îngrăşat
\it Font oblic
\sl Font oblic
\rm Font normal
\fontname{numele fontului} specificarea fontului nou.
\fontsize{mărimea fontului} specificarea mărimii fontului.

Modificările rămân în vigoare până la sfârşitul rândului ori in contextul definit de parantezele indicate { }.

ANEXA 4.

Textul sarcinilor lucrărilor de laborator în limba rusă.

Лабораторная работа N1. Элементы системы MATLAB
Задание работы N 1

I Опишите основные команды программы MATLAB в режиме командной строки.

II.Во всех упражнениях вычислить заданные выражения при x= -1,75*10^{-3} и y = 3,1π. Для начала вычислить в одной строке, а потом вводя промежуточные переменные. Представить результаты в разных форматах. Изучить информацию о переменных рабочего пространства используя команду whos.

III.Вычислить значения функции на заданном участке в n равноудаленных точках.

Лабораторная работа N2. Графика в системе MATLAB
Задание работы N 2

I Опишите основные команды программы MATLAB для построения графиков .

II.Построить графики двух функции одной переменной на заданном участке. Указать названия , вставить обозначения осей и графиков , использовать различные цвета, типы линии и маркеров. Представить графики следующими способами:

a) В разных окнах;
b) В одном окне- оси общие;
c) В одном окне- оси разные (При помощи команды subplot);

III.Построить графики функции двух переменных на заданном прямоугольном участке различными способами – mesh , surf,meshc,surfc,contour,contourf,contour3. Оформить графики поясняющими записями.

Лабораторная работа N3. Расчет кинематических характеристик движения материальной точки
Задание работы N 3

I.Объявить заданную функцию file-функцией и построить ее график на заданном участке при помощи plot (с шагом 0,05) и fplot.

II. Написать две file-функции . Первая (например с именем xy) имеет входной параметр-t (время) , а выходные – координаты точки x и y . Вторая (например с именем figpas) имеет входные параметры номер графического окна (fig) и шаг вычисления координат (pas), а на выходе выводит траекторию движения точки в заданном интервале времени и положение точки на траектории в случайном моменте времени из заданного интервала. Вызов file-функции figpas выполняется из Comand Window.

a) Построить график плоской траектории материальной точки при помощи команд comet и plot. Показать положение точки на траектории для случайно выбранного момента времени из заданного интервала . Экспериментировать с различными значениями для шага .

в)Определить скорость, ускорение, касательное , нормальное ускорения и радиус кривизны траектории для выбранного момента времени.

c)Показать на графике траектории все вектора из предыдущего пункта, используя инструменты графического окна.

d)Построить таблицу со всеми результатами.

III. Написать две file-функции . Первая (например с именем xyz) имеет входной параметр-t (время), а выходные – координаты точки x,y и z . Вторая (например с именем figpas) имеет входные параметры номер графического окна (fig) и шаг вычисления координат (pas), а на выходе выводит траекторию движения точки в заданном интервале времени и положение точки на траектории в случайном

моменте времени из заданного интервала. Вызов file-функции figpas выполняется из Comand Window.

a)Построить график пространственной траектории материальной точки при помощи команд comet3 и plot3. Показать положение точки на траектории для случайно выбранного момента времени из заданного интервала . Экспериментировать с различными значениями шага .

b) Определить скорость, ускорение, касательное - , нормальное ускорения и радиус кривизны траектории для выбранного момента времени.

c)Построить таблицу со всеми результатами.

Лабораторная работа N4. Сложение гармонических колебаний материальной точки.

Задание работы N 4

I.Привести краткое описание кинематических характеристик взаимно-перпендикулярных и одинаково направленных гармонических колебаний материальной точки.

II.Вам предстоит выбрать два одинаково направленных гармонических колебания (x_1 и x_2) с циклическими частотами ω_1 и ω_2 , с начальными фазами α_1 и α_2 и с амплитудами A_1 и A_2 . Необходимо сложить эти колебания ($x= x_1 + x_2$, - результирующее колебание), строя соответствующие графики с информационными надписями, для следующих случаев:

a)Некогерентные гармонические колебания ($\omega_1 \neq \omega_2$). Написать file-функцию времени, которая строила бы в одном окне на общие оси графики $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x(t)$. Проанализировать результаты.

b)Когерентные гармонические колебания ($\omega_1 = \omega_2$). Написать file-функцию времени, которая строила бы в одном окне на общие оси графики $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x(t)$. Проанализировать результаты.

c)Некогерентные гармонические колебания ($\omega_1 \cong \omega_2$, - колебание типа биение). Написать file-функцию времени, которая строила бы график функции x(t). Определить кинематические характеристики колебания типа биение.

d)Когерентные гармонические колебания ($\omega_1 = \omega_2$). Написать file-функцию с входными параметрами номер фигуры и разность фаз $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, которая строила бы в одном окне графики функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x(t)$ для $\alpha=0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}; \pi$ на отдельные оси (графическое окно разбивается на 9 подобластей с соответствующими системами координат для каждого значения параметра α).

III. Материальная точка участвует в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебания (x и y) с циклическими частотами ω_1 и ω_2 , с начальными фазами α_1 и α_2 и с амплитудами A_1 и A_2 . Вам предстоит выбрать их.

a) $\omega_1 = \omega_2$. Написать file-функцию с входными параметрами (порядковый номер осей и разность фаз $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$). Построить в одном окне на разных осях траектории движении (фигуры Лисажу) для $\alpha=0$; $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}; \pi$.

b) $\omega_1 \neq \omega_2$, $\frac{\varpi_1}{\varpi_2} = \frac{n_1}{n_2}$, $n_1, n_2 = 1, 2, 3, \ldots$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha - \frac{\pi}{2}$;

Написать file-функцию с входными параметрами порядковый номер осей и параметр α . Построить в одном окне на разных осях траектории движения (фигуры Лисажу) для

$$\alpha=0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}; \pi .$$

Лабораторная работа N5. Расчет кинематических характеристик движения твердого тела
Задание работы N 5

I. Пластина D (прямоугольник, круг, или треугольник) вращается в плоскости чертежа вокруг оси O_1 согласно закону $\varphi_e = \varphi(t)$, рад. На пластине жестко закреплен шарик М. Положение шарика определяется отрезком(или дугой) ОМ. Необходимые данные и чертежи прилагаются.

a) Определить момент времени ,в котором $\varphi_e = \varphi_1$.
b) Для найденного момента времени определить скорость и ускорение точки М.
c) Выполнить чертеж и покажите на нем все векторы : (ω, ε, v , $a^{ос}$, $a^{вр}$, a).

II. Пластина D (прямоугольник, круг, или треугольник) вращается в плоскости чертежа вокруг оси O_1 согласно закону $\varphi_e = \varphi(t)$, рад. Необходимые данные прилагаются. Чертежи- в предыдущем пункте.

a) Определить момент времени ,в котором $\varphi_e = \varphi_1$.
b) Для найденного момента времени определить скорость и ускорение точки О.
c) Выполните чертеж и покажите на нем все вектора: (ω, ε, v , $a^{ос}$, $a^{вр}$, a).

III. Механизм состоит из стержня АВ и из двух поршней, которые связаны с стержнем посредством шарниров А и В. Поршни выполняют поступательные движения в плоскости чертежа вдоль соответствующих направляющих. Стержень АВ совершает плоское движение тоже в плоскости чертежа. Известен закон движения поршня А (или В): s=s(t) . Численные данные и соответствующие чертежи прилагаются. t_1 –расчетное время.

a)Определить скорости точек А, В и М координатным способом.

b)Построить траекторию движения точки М и положение точки на траектории в расчетный момент времени. Показать на траектории скорость точки М, используя инструменты графического окна.

c)Считая, что скорость точки А(или В) известна(смотри пункт 1), определить, методом мгновенного центра скоростей (метод МЦС), скорости точек В(или А) и точки М для расчетного момента времени t_1. Сравните с резултатами пункта 1.

d).Выполните чертеж и покажите на нем все вектора: (ω, v_A , v_B , v_M).

Лабораторная работа N6. Исследование динамики колебательного движения материальной точки.

Задание работы N 6

I. Вычислить числено определенные интегралы.

II. Вычислить числено двойной интеграл , используя соответствующую file-функцию.

III. Вычислить числено тройной интеграл , используя соответствующую file-функцию.

IV. Написать и решить числено дифференциальное уравнение прямолинейного , колебательного движения материальной точки. Параметры колебательной системы выбирать самостоятельно. Построить график зависимости параметра положения от времени (x=x(t)) и определить динамические характеристики колебательного движения, для следующих случаев(смотри приложение 5 на стр. 169-170):

a)Свободные колебания без сопротивления.

b)Свободные колебания с сопротивлением.

c)Вынужденные колебания без сопротивления.

d)Вынужденные колебания с сопротивлением.

Лабораторная работа N7.Динамика материальной точки
Задание работы N 7

I. Материальная точка массой m перемещается в плоскости xy под действием двух сил F_1 и F_2. В начальный момент времени точка находилась в начале координат, где ей сообщили начальную скорость v_0 под углом 45^0 к оси абсцисс.

a)Построить на общие оси графики зависимостей x=x(t) и y(t).

b)Построить, в отдельном окне на общие оси, графики зависимостей $v_x(t)$, $v_y(t)$ и v(t).

c)Построить траекторию движения материальной точки. Показать на графике вектор скорости для начального момента времени и для произвольного момента.

II. Материальная точка массой m =1,5 кг совершает движение в пространстве под действием движущей силы P. Одновременно , точка испытывает сопротивление среды, R=-c·v , направленное против скорости. Начальное положение задается радиусом вектором r_0 , а начальная скорость – вектором v_0 .

a)Построить на общие оси графики зависимостей x=x(t) , y(t) и z(t).

b)Построить траекторию движения материальной точки. Показать на графике вектор скорости для начального момента времени .

c)Указать на траектории для двух произвольных моментов времени векторы скоростей.

ANEXA 5.

<table>
<tr><th colspan="2">Oscilaţiile rectilinii ale punctului material</th></tr>
<tr><th>Ecuaţia diferenţială</th><th>Caracteristicile dinamice</th></tr>
<tr><td>a).Oscilaţii libere în lipsa rezistenţei mediului

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

ω_0 – frecvenţa ciclică(proprie)
x_0 –poziţia iniţială
v_0 –viteza iniţială</td><td>Amplitudinea: A= $\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$

Faza iniţială: tg(ε)= $\frac{\omega_0 x_0}{v_0}$

Perioada: T= $\frac{2\pi}{\omega_0}$

Frecvenţa: f= $\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$</td></tr>
<tr><td>b).Oscilaţii libere în prezenţa rezistenţei mediului

$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

h – coeficient, ce caracterizează rezistenţa mediului

• $h < \omega_0$ – rezistenţă mică.
• $h = \omega_0$ – rezistenţă critică.
• $h > \omega_0$ - rezistenţă mare.</td><td>• $h < \omega_0$ – rezistenţă mică:
Frecvenţa ciclică: ω= $\sqrt{\omega_0^2 - h^2}$
Amplitudinea: A= $\sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + hx_0)^2}{\omega^2}}$
Faza iniţială: tg(ε)= $\frac{\omega\ x_0}{v_0 + hx_0}$

Perioada: T= $\frac{2\pi}{\omega}$

Frecvenţa: f= $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$
Decrementul de amortizare:
$\eta = e^{-hT}$
Decrementul logaritmic:
$\Lambda = \left|\ln\eta\right| = hT$</td></tr>
</table>

c).Oscilaţii forţate în lipsa rezistenţei mediului $\ddot{x} + \omega_0^2 x = H_0 \sin(pt)$ **p – frecvenţa forţei de excitaţie** **H_0 – valoarea maximă a forţei de excitaţie raportată la masa punctului** • **p $\neq \omega_0$ - caz general.** • **p $\cong \omega_0$ – oscilaţie – bătaie** • **p = ω_0 – rezonanţă**	**p $\neq \omega_0$ - caz general.** **Amplitudinea oscilaţiilor forţate în dependenţă de frecvenţa forţei de excitaţie *p*:** **A=** $\dfrac{H_0}{\lvert \omega_0^2 - p^2 \rvert}$
d).Oscilaţii forţate în prezenţa rezistenţei mediului $\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H_0 \sin(pt)$	**Amplitudinea oscilaţiilor forţate în dependenţă de frecvenţa forţei de excitaţie *p*:** **A=** $\dfrac{H_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2}}$ **Defazajul dintre forţa de excitaţie şi oscilaţii** **tg(γ) =** $\dfrac{2hp}{\omega_0^2 - p^2}$ **h – coeficientul de rezistenţă a mediului poate fi considerat parametru**

Bibliografie

1. В.Дьяконов, «MATLAB 6 : Учебный курс», СПб, Питер, 2001.
2. В.Дьяконов, В.Круглов, «Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник», СПб, Питер, 2001.
3. В.И.Конюшенко, «MATLAB – Язык технических вычислений. Вычисление. Визуализация. Программирование».
4. N.V. Butenin, I.A. Lunţ, D.R. Merkin, Curs de Mecanică Teoretică, Vol. 1, 2. Ed. Lumina, Chişinău-1993.
5. V. Caraganciu, M. Colpagiu, M. Ţopa, Mecanica Teoretică, Chişinău, Ştiinţa, 1994.
6. I.V. Meşcerski, Culegere de probleme la Mecanica Teoretică. Ed. Lumina, Chişinău-1993.
7. Andrew Knight, «Basics of MATLAB and Beyond», Chapman&Hall/CRC, 2000
8. Patrick Marchand, O.Thomas Holland, «Graphics and GUIs with MATLAB. Third edition», Chapman&Hall/CRC, 2003
9. The MathWorks – MATLAB Tutorial http://www.mathworks.com/academia/student_center/tutorials/launchpad.html

Bun de tipar	Formatul hârtiei 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar RISO	Tirajul 500 ex.
Coli de tipar 7,5	Comanda nr.

U.T.M., 2018, Chişinău, bd. Ştefan cel Mare, 168
Secţia Redactare şi Editare a U.T.M.
2068, Chişinău, str. Studenţilor, 9/9.