

LUCRAREA DE LABORATOR NR.2

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE

1. Scopul lucrărilor

- 1) Să se rezolve sistemul de ecuații lineare $Ax=b$, utilizând
 - Metoda eliminării lui Gauss;
 - Metoda lui Cholesky (metoda rădăcinii pătrate);
 - Metoda iterativă a lui Jacobi cu o eroare $\varepsilon=10^{-3}$;
 - Metoda iterativă a lui Gauss-Seidel cu o eroare $\varepsilon=10^{-3}$ și $\varepsilon=10^{-5}$.
- 2) Să se determine numărul de iterații necesare pentru aproximarea soluției sistemului cu eroarea dată ε . Să se compare rezultatele.

2. Probleme date spre rezolvare

$$1. A = \begin{pmatrix} 3.4 & 0.7 & 0.2 & -0.2 \\ 0.7 & 5.1 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 3.8 & -0.4 \\ -0.2 & 0.5 & -0.4 & 4.7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5.1 \\ 4.2 \\ 5.3 \\ 5.4 \end{pmatrix},$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 7.1 & 0.9 & -0.5 & 0.6 \\ 0.9 & 12.1 & 1.3 & -1.1 \\ -0.5 & 1.3 & 6.5 & 0.4 \\ 0.6 & -1.1 & 0.4 & 10.8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 7.8 \\ -11.7 \\ 8.6 \end{pmatrix},$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 8.1 & -0.9 & 0.6 & 0.8 \\ -0.9 & 14.3 & 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.3 & 7.9 & -0.4 \\ 0.8 & 0.7 & -0.4 & 10.6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7.2 \\ 10.3 \\ -11.9 \\ 9.2 \end{pmatrix},$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 23.6 & 1.5 & -0.9 & -0.8 \\ 1.5 & 14.6 & 0.7 & 0.2 \\ -0.9 & 0.7 & 11.3 & -0.6 \\ -0.8 & 0.2 & -0.6 & 9.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1.2 \\ 0.9 \\ 4.7 \\ -1.2 \end{pmatrix},$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 8.7 & 1.1 & -0.5 & 0.4 \\ 1.1 & 9.6 & 1.2 & 0.4 \\ -0.5 & 1.2 & 14.1 & 1.3 \\ 0.4 & 0.4 & 1.3 & 13.6 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10.2 \\ -4.3 \\ 8.6 \\ 0.9 \end{pmatrix},$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 12.11 & -1.3 & 0.8 & 0.7 \\ -1.3 & 20.1 & 2.2 & -1.3 \\ 0.8 & 2.2 & 11.3 & 1.6 \\ 0.7 & -1.3 & 1.6 & 16.2 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 13.1 \\ 20.2 \\ -11.1 \\ 11.9 \end{pmatrix},$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 6.1 & -1.9 & 0.4 & 0.2 \\ -1.9 & 14.3 & 1.8 & 1.4 \\ 0.4 & 1.8 & 12.7 & -0.6 \\ 0.2 & 1.4 & -0.6 & 13.1 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7.1 \\ 10.2 \\ -7.2 \\ 8.6 \end{pmatrix},$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 9.2 & 1.1 & 0.6 & -0.6 \\ 1.1 & 15.3 & -1.2 & 0.3 \\ 0.6 & -1.2 & 9.6 & 0.7 \\ -0.6 & 0.3 & 0.7 & 12.6 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10.1 \\ -18.3 \\ 10.7 \\ 10.1 \end{pmatrix},$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 8.6 & -1.1 & -0.5 & 0.4 \\ -1.1 & 10.2 & -1.2 & 0.7 \\ 0.5 & -1.2 & 11.4 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 & 0.9 & 11.2 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 13.2 \\ -9.8 \\ 7.7 \\ 10.1 \end{pmatrix},$$

Gresala! $A(3,1) = A(1,3) = -0.5$

$$10. A = \begin{pmatrix} 11.2 & 1.5 & -1.3 & 0.2 \\ 1.5 & 12.1 & -0.9 & 0.4 \\ -1.3 & -0.9 & 11.7 & 1.2 \\ 0.2 & 0.4 & 1.2 & 14.2 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -11.4 \\ 9.7 \\ 8.3 \\ 1.2 \end{pmatrix},$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 10.3 & -0.9 & 0.4 & -0.6 \\ -0.9 & 12.8 & 1.2 & 0.2 \\ 0.4 & 1.2 & 9.7 & 0.1 \\ -0.6 & 0.2 & 0.1 & 13.6 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 0.9 \\ -3.6 \\ 2.8 \end{pmatrix},$$

$$12. A = \begin{pmatrix} 5.9 & 0.9 & -1.8 & 0.7 \\ -0.9 & 11.2 & 1.2 & 0.4 \\ -1.8 & 1.2 & 9.6 & 0.5 \\ 0.7 & 0.4 & 0.5 & 7.8 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3.6 \\ 9.1 \\ -4.8 \\ 6.7 \end{pmatrix},$$

$$13. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8.7 & -1.2 & 0.8 & 0.7 \\ -1.2 & 9.6 & -1.2 & 0.8 \\ 0.8 & -1.2 & 8.8 & 0.9 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 & 11.3 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2.7 \\ 8.9 \\ 7.2 \\ 6.4 \end{pmatrix},$$

$$14. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10.2 & 1.7 & -0.8 & 0.4 \\ 1.7 & 12.6 & 1.2 & 0.3 \\ -0.8 & 1.2 & 11.7 & -1.2 \\ 0.4 & 0.3 & -1.2 & 20.6 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12.6 \\ 13.9 \\ -4.7 \\ 20.6 \end{pmatrix},$$

$$15. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 11.3 & -0.2 & 1.3 & -0.4 \\ -0.2 & 17.6 & 2.1 & 0.7 \\ 1.3 & 2.1 & 20.3 & 1.2 \\ -0.4 & 0.7 & 1.2 & 19.4 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 20.3 \\ -14.6 \\ 8.9 \\ 11.3 \end{pmatrix},$$

$$16. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13.7 & 1.2 & 0.9 & 0.5 \\ 1.2 & 20.1 & 0.8 & -0.4 \\ 0.9 & 0.8 & 11.6 & 1.2 \\ 0.5 & -0.4 & 1.2 & 12.8 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 14.2 \\ 11.2 \\ -7.9 \\ 12.7 \end{pmatrix},$$

$$17. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 19.2 & -0.9 & 0.8 & 0.7 \\ -0.9 & 13.9 & 1.2 & 0.6 \\ 0.8 & 1.2 & 20.1 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 & 11.5 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -13.2 \\ 9.2 \\ 8.6 \\ 14.7 \end{pmatrix},$$

$$18. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 17.7 & 0.3 & 1.4 & 0.9 \\ 0.3 & 20.1 & -0.8 & -1.2 \\ 1.4 & -0.8 & 21.9 & 0.8 \\ 0.9 & -1.2 & 0.8 & 17.6 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11.2 \\ -20.3 \\ 14.4 \\ 17.9 \end{pmatrix},$$

$$19. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 16.3 & 0.9 & 1.2 & 1.4 \\ 0.9 & 21.1 & 0.9 & 0.8 \\ 1.2 & 0.9 & 17.3 & -0.4 \\ 1.4 & 0.8 & -0.4 & 15.9 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 21.3 \\ 11.4 \\ -17.9 \\ 20.6 \end{pmatrix},$$

$$20. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13.2 & 1.2 & 0.9 & 0.7 \\ 1.2 & 14.3 & 0.8 & -0.9 \\ 0.9 & 0.8 & 15.6 & 1.8 \\ 0.7 & -0.9 & 1.8 & 21.1 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4.2 \\ 5.6 \\ -5.1 \\ 5.9 \end{pmatrix},$$

$$21. A = \begin{pmatrix} 14.4 & -0.9 & 1.2 & 0.4 \\ -0.9 & 20.6 & 0.8 & 0.9 \\ 1.2 & 0.8 & 19.6 & 1.3 \\ 0.4 & 0.4 & 1.3 & 17.6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 11.2 \\ -20.1 \\ 13.9 \\ 10.7 \end{pmatrix},$$

$$22. A = \begin{pmatrix} 12.6 & 1.8 & -0.5 & 0.9 \\ 1.8 & 13.7 & 0.8 & 0.7 \\ -0.5 & 0.8 & 11.6 & -0.8 \\ 0.9 & 0.7 & -0.8 & 20.1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12.3 \\ -11.4 \\ 10.8 \\ 11.7 \end{pmatrix},$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 15.1 & -0.9 & 1.2 & 0.4 \\ -0.9 & 14.6 & 0.8 & 0.7 \\ 1.2 & 0.8 & 17.6 & -0.6 \\ 0.4 & 0.7 & -0.6 & 21.3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 9.2 \\ 8.7 \\ -10.6 \\ 9.7 \end{pmatrix},$$

$$24. A = \begin{pmatrix} 11.2 & -0.8 & 1.1 & 0.6 \\ -0.8 & 12.6 & 0.9 & 0.7 \\ 1.1 & 0.9 & 14.6 & 1.4 \\ 0.6 & 0.7 & 1.4 & 15.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 13.2 \\ -9.6 \\ 12.3 \\ 8.7 \end{pmatrix},$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 9.8 & 0.8 & 1.1 & -0.6 \\ 0.8 & 10.2 & 1.3 & 0.4 \\ 1.1 & 1.3 & 11.4 & -0.6 \\ -0.6 & 0.4 & -0.6 & 20.2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12.2 \\ 8.7 \\ -6.9 \\ 13.7 \end{pmatrix},$$

26.

$$27. A = \begin{pmatrix} 8.7 & 0.4 & 0.6 & 0.5 \\ 0.4 & 9.2 & -0.4 & 0.8 \\ 0.6 & -0.4 & 11.4 & 1.4 \\ 0.5 & 0.8 & 1.4 & 12.6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 11.8 \\ 10.6 \\ 13.9 \\ -14.2 \end{pmatrix},$$

3. Descrierea metodelor

Metodele numerice de rezolvare a sistemelor de ecuații lineare sunt de două tipuri: metode directe și metode iterative.

Metodele directe constau în transformarea sistemului $Ax=b$ într-un sistem echivalent pentru care rezolvarea este cu mult mai simplă. În metodele directe soluția exactă se obține după un număr finit de operații aritmetice elementare (adunare, scădere, înmulțire, împărțire și rădăcina pătrată) și acest număr de operații este de ordinul n^3 . Subliniem că soluția exactă se obține în cazurile (ideale) în care erorile de rotunjire sunt absente. La fiecare operație elementară efectuată de calculator avem o eroare de rotunjire și prin urmare erorile directe în caz general furnizează doar o

soluție aproximativă. Metodele directe se utilizează pentru rezolvarea sistemelor nu prea “mari”, de dimensiune $n=200$.

Rezolvarea sistemelor de ecuații lineare printr-o metodă iterativă înseamnă construirea unui șir de vectori $x^{(k)}$, $k=0,1,2,\dots$ (pornind de la un vector $x^{(0)}$ ales arbitrar) convergent către soluția sistemului considerat. În metodele iterative, de obicei, o iterație necesită efectuarea unui număr de ordinul n^2 operații aritmetice. De aceea metodele iterative se utilizează pentru rezolvarea sistemelor “mari”, de dimensiune $n>100$ (în cazul asigurării unei viteze sporite de convergență pentru o alegere a aproximării inițiale adecvate). Trunchierea șirului $\{x^{(k)}\}$ are loc la un indice m , astfel încât $x^{(m)}$ constituie o aproximație satisfăcătoare a soluției căutate x^* (de exemplu, $\|X^{(m)} - X^*\| < \varepsilon$, unde $\varepsilon > 0$ este eroarea admisă).

3.1 Metoda eliminării a lui Gauss

Metoda eliminării a lui Gauss constă în a aduce sistemul inițial la un sistem echivalent avînd matricea coeficienților superior triunghiulară. Transformarea sistemului dat într-un sistem de formă triunghiulară fără ca să se modifice soluția sistemului se realizează cu ajutorul următoarelor trei operații de bază:

- 1) rearanjarea ecuațiilor (schimbarea a două ecuații între ele);
- 2) înmulțirea unei ecuații cu o constantă (diferită de zero);
- 3) scăderea unei ecuații din alta și înlocuirea celei de-a doua cu rezultatul scăderii.

Fie dat sistemul de ecuații lineare:

$$Ax=b \tag{1}$$

unde $A=(a_{ij})_n$, $x, b \in R^n$, $\det A \neq 0$.

Să presupunem că $a_{11} \neq 0$; dacă $a_{11} = 0$ se aduce elementul nenul din prima coloană pe locul $(1,1)$, permutînd ecuațiile respective ale sistemului. Primul pas constă în eliminarea necunoscutei x_1 din ecuațiile sistemului începînd cu a doua, multiplicînd ecuația întâia cu raportul

$$\mu_i = \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}}, \quad i=2,3,\dots,n$$

și scăzînd rezultatul obținut din ecuația i pentru $\forall i \geq 2$.

Obținem în acest fel sistemul echivalent:

$$A^{(2)}x=b^{(2)} \tag{2}$$

cu coeficienții

$$\begin{aligned} \alpha_{1j}^{(2)} &= \alpha_{1j}^{(1)}, & j=1,2,\dots,n; \\ \alpha_{i1}^{(2)} &= 0, & i=2,3,\dots,n; \\ \alpha_{ij}^{(2)} &= \alpha_{ij}^{(1)} - \mu_{i1} \alpha_{1j}^{(1)}, & i,j=2,3,\dots,n; \\ b_1^{(2)} &= b_1^{(1)}, \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \mu_{i1} b_1^{(1)}, & i=2,3,\dots,n; \end{aligned}$$

Mai sus s-a notat $\alpha_{ij}^{(1)} = a_{ij}$; $i,j=1,2,\dots,n$ și $b_i^{(1)} = b_i$; $i=1,2,\dots,n$. Prima ecuație a sistemului (2) coincide cu prima ecuație a sistemului (1).

În continuare se repetă procedeul de mai sus pentru eliminarea necunoscutei x_2 din sistemul (2) ș.a.m.d. La pasul k se obține sistemul:

$$A^{(k)}x=b^{(k)}$$

unde

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{12}^{(1)} & \cdots & \alpha_{1,k-1}^{(1)} & \alpha_{1k}^{(1)} & \cdots & \alpha_{1n}^{(1)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(2)} & \cdots & \alpha_{2,k-1}^{(2)} & \alpha_{2k}^{(2)} & \cdots & \alpha_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & \alpha_{k-1,k-1}^{(k-1)} & & \alpha_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & \alpha_{k-1,n}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha_{kk}^{(k)} & \cdots & \alpha_{kn}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha_{nk}^{(k)} & \cdots & \alpha_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}^{(k)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_{k-1}^{(k-1)} \\ b_k^{(k)} \\ b_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Elementele $\alpha_{ij}^{(k)}$ ale lui $A^{(k)}$ și $b_i^{(k)}$ ale lui $\mathbf{b}^{(k)}$ se calculează recursiv prin formulele:

$$\alpha_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \alpha_{ij}^{(k-1)}, & i \leq k-1 \\ 0, & i \geq k, k \leq k-1 \\ \alpha_{ij}^{(k-1)} - \mu_{i,k} * \alpha_{k-1}^{(k-1)}, & i \geq k, j \geq k \end{cases}$$

unde $\mu_{i,k-1} = \frac{\alpha_{i,k-1}^{(k-1)}}{\alpha_{k-1,k-1}^{(k-1)}}$,

iar $b_i^{(k)} = \begin{cases} b_i^{(k-1)}, & \text{pentru } \forall i \leq k-1 \\ b_i^{(k-1)} - \mu_{i,k-1} * b_{k-1}^{(k-1)}, & \text{pentru } \forall i \geq k \end{cases}$,

După n pași necunoscuta x_{n-1} va fi eliminată din ultima ecuație, obținându-se un sistem cu matricea superior triunghiulară

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \dots + a_{1k}^{(1)} x_k + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} x_2 + \dots + a_{2k}^{(2)} x_k + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)} \\ \dots \\ a_{kk}^{(k)} x_k + \dots + a_{kn}^{(k)} x_n = b_k^{(k)} \\ \dots \\ a_{nn}^{(n)} x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

Acest sistem se rezolvă începînd cu ultima ecuație cu ajutorul procesului de eliminare inversă care se poate descrie astfel:

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}},$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)} * x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}},$$

$$x_k = \frac{b_k^{(k)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k)} * x_j}{a_{kk}^{(k)}},$$

Metoda lui Gauss prezentată mai sus presupune că elementele pivot trebuie să fie diferite de zero. Dacă la efectuarea pasului k elementul $\alpha_{kk}=0$, atunci cel puțin unul din celelalte elemente din coloana k și din liniile $k+1, k+2, \dots, n$ este nenul; în caz contrar matricea A ar fi singulară ($\det A=0$). Permutînd ecuațiile sistemului putem aduce pe locul (k,k) elementul nenul și, deci, este posibil să reluăm eliminarea. Dacă

un element pivot este exact egal cu zero, din motive de stabilitate numerică, trebuie să efectuăm rearanjarea ecuațiilor.

Schema logică a lui Gauss este prezentată în figura 4.

3.2. Metoda lui Cholesky (metoda rădăcinii pătrate)

Metoda lui Cholesky de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare se mai numește *metoda rădăcinii pătrate* și constă în descompunerea sistemului $Ax=b$ în sistemele triunghiulare:

$$L^T y = b, \quad Lx = y.$$

Matricea L se alege astfel, încât $A=L^T * L$. Elementele l_{ij} ale matricei inferior triunghiulare L pot fi calculate în felul următor: se determină prima coloană a matricei L

$$L_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{L_{11}}, \quad i=2,3,\dots,n;$$

După ce s-au obținut primele $(k-1)$ coloane ale matricei L se calculează coloana k

$$L_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}, \quad l_{ik} = \frac{(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} * l_{kj})}{L_{kk}}, \quad i=k+1,\dots,n$$

În această metodă se presupune că matricea A este o matrice simetrică și pozitiv definită.

3.3. Metodele iterative de rezolvarea sistemelor de ecuații liniare.

Metodele iterative se construiesc utilizând desfacerea matricei A definită prin

$$A=S-T$$

Atunci sistemul (1) este bivalent cu sistemul:

$$Sx = Tx + b, \quad (3)$$

sau

$$x = Qx + d, \quad (4)$$

unde $Q=S^{-1} * T$, $d=S^{-1} * b$. Prin urmare putem construi șirul $\{x^{(k)}\}$, utilizând relația recurentă

$$S * x^{(k+1)} = T * x^{(k)} + b, \quad k=0,1,2,\dots, \quad (5) \quad \text{sau}$$

$$x^{(k+1)} = Q * x^{(k)} + d \quad (6)$$

unde $x^{(0)} \in R^n$ este o aproximație inițială a soluției x^* .

Pentru a reduce sistemul (1) la o formă (3) sau (4), potrivită pentru iterație, desfacerea matricei A trebuie să satisfacă condițiile:

a) Sistemul (6) are o soluție unică $x^{(k+1)}$ și se rezolvă ușor. De aceea matricea S se alege de o formă simplă și este inversabilă. Ea poate fi diagonală sau triunghiulară.

b) Șirul $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ converge către soluția exactă x^* oricare ar fi $x^{(0)} \in R^n$.

Presupunem că elementele diagonale $\alpha_{ii} \neq 0$, $i=1,2,\dots,n$. Atunci în calitate de matrice S se poate lua matricea diagonală atașată matricei A :

$$S = \text{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}).$$

Avem

$$S^{-1} = \text{diag} \left(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}} \right)$$

În acest caz sistemul (3) devine:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} * x_j \right), \quad i=1,2,\dots,n$$

Procesul iterativ (6) este definit prin:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} * x_j^{(k)} \right), \quad i=1,2,\dots,n$$

Astfel obținem o metodă de rezolvare a sistemului liniar (1) numită metoda lui Jacobi.

În metoda lui Jacobi este necesar de-a păstra în memoria calculatorului toate componentele vectorului $x^{(k)}$ atît timp cît se calculează vectorul $x^{(k+1)}$. Putem modifica metoda lui Jacobi, astfel încît la pasul $(k+1)$ să folosim în calculul componentei $x_i^{(k+1)}$, valorile deja calculate la același pas: $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$. Această modificare a metodei lui Jacobi se numește *metoda Gauss-Seidel*, iar șirul iterativ (7) devine

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} * x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} * x_j^{(k)} \right), \quad i=1,2,\dots,n$$