Prelegerea nr. 6

VI. METODE ITERATIVE DE REZOLVARE A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE

Sumar

- *Schema generală de construire a metodelor iterative*
- *Metoda iterativă Jacobi*
- *Metoda Gauss-Seidel*
- *Metoda suprarelaxărilor succesive*

6.1 Schema generală de construire a metodelor iterative

Să considerăm sistemul de ecuaţii liniare:

$$Ax = b \tag{6.1}$$

unde $b \in R^n$ iar *A* este o matrice nesingulară ($\det(A) \neq 0$) de dimensiune $n \times n$. Metoda eliminării a lui Gauss de rezolvare a sistemului liniar (6.1) necesită cel puțin $n^3/3$ operații aritmetice şi atât timp cât acest număr de operaţii este acceptabil putem utiliza această metodă. Pe de altă parte, când $n^3/3$ este mare, cu ajutorul metodelor iterative se poate obține cu aproximație satisfăcătoare a soluției după efectuarea unui număr mult mai mic de operații aritmetice.

Metodele iterative se construesc utilizând desfacerea matricei *A* definită prin:

$$A = S - T.$$

Atunci sistemul (6.1) este echivalent cu sistemul :

$$Sx = Tx + b, \tag{6.2}$$

sau

$$x = Qx + d, \tag{6.3}$$

unde: $Q = S^{-1}T,\ d = S^{-1}b$. Prin urmare putem construi şirul $\{x^{(k)}\}$ utilizând relaţia recurentă:

$$Sx^{(k+1)} = Tx^{(k)} + b, \quad k = 0,1,2,..., \tag{6.4}$$

sau

$$x^{(k+1)} = Qx^{(k)} + d, \quad k = 0,1,2,..., \tag{6.5}$$

unde $x^{(0)} \in R^n$ este o aproximaţie iniţială a soluţiei $x*$.

Pentru a reduce sistemul (6.1) la forma (6.2) sau (6.4), potrivită pentru iteraţie, desfacerea matricei *A* trebuie să satisfacă condiţiile:

- Sistemul (6.4) are o soluţie unică $x^{(k+1)}$ şi se rezolvă uşor. De aceea matricea *S* se alege de o formă simplă şi este inversabilă. Ea poate fi diagonală sau triunghiulară.
- Şirul $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ converge către soluţia exactă $x*$ oricare ar fi $x^{(0)} \in R^n$.

Deoarece $x* = Qx^* + d$ avem:

$$x^{(k+1)} - x* = Q\left(x^{(k)} - x*\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

de unde rezultă că:

$$x^{(k+1)} - x* = Q^k\left(x^{(0)} - x^*\right).$$

Evident că $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$ dacă şi numai dacă

$$\lim_{k\to\infty} Q^k = O.$$

În cursul algebrei se demonstrează că $Q^k \underset{k\to\infty}{\to} O$, dacă şi numai dacă raza spectrală a lui Q este mai mică ca unitatea: $\rho(Q) = \max_{\lambda\in\sigma(Q)}|\lambda| < 1$. Viteza de convergenţă a şirului matriceal $Q, Q^2, Q^3, \dots, Q^k, \dots$ către matricea nulă O, şi deci a şirului $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ către x^*, este cu atât mai mare cu cât raza spectrală $\rho(Q)$ este mai mică. Rezultă că este adevărată următoarea teoremă.

Teorema 1. (Condiţia necesară şi suficientă de convergenţă). Şirul $\{x^{(k)}\}$ definit prin (6.5) converge către soluţia unică x^* a sistemului (6.3 pentru orice aproximaţie iniţială $x^{(0)} \in R^n$ dacă şi numai dacă

$$\rho(Q) = \max_{\lambda\in\sigma(Q)} |\lambda| < 1. \tag{6.6}$$

În practică nu cunoaştem valorile proprii ale lui Q, de aceea teorema 1 este dificil de folosit. În locul teoremei 1 se utilizează următoarea teoremă.

***Teorema 2. (Condiția suficientă de convergență)*.** Dacă există o normă matriceală subordonată unei norme vectoriale astfel încât $\|Q\| \le q < 1$, atunci sistemul (6.3) are o soluție unică x^*, şirul $\{x^{(k)}\}$ definit prin (6.5) converge către x^*oricare ar fi aproximaţia iniţială $x^{(0)} \in R^n$ şi eroarea se evaluează prin:

$$\|x^{(k)} - x*\| \le \frac{q}{1-q}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \le \frac{q^k}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

Demonstrație. Condiţia $\|Q\| < 1$ implică condiția (6.6) (vezi paragraful 3.2). Pentru a obține o estimare a erorii folosim relaţia:

$$x* - x^{(k-1)} = x^{(k)} - x^{(k-1)} + Q\left(x^* - x^{(k-1)}\right).$$

Deci

$$\left\|x* - x^{(k-1)}\right\| \le \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| + \|Q\|\left\|x^* - x^{(k-1)}\right\|,$$

sau

$$\left(1 - \|Q\|\right)\left\|x* - x^{(k-1)}\right\| \le \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|.$$

Deoarece prin ipoteză $1 - \|Q\| \ge 1 - q > 0$ avem:

$$\left\|x* - x^{(k-1)}\right\| \le \frac{1}{1-q}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|.$$

Pe de altă parte

$$\left\|x* - x^{(k)}\right\| = \left\|Q(x* - x^{(k-1)})\right\| \le \|Q\|\left\|x* - x^{(k-1)}\right\|.$$

Prin urmare

$$\left\|x* - x^{(k)}\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|.$$

Teorema este demonstrată.

6.2 Metoda iterativă Jacobi

Presupunem că elementele diagonale $a_{ii} \neq 0,\ i - 1,2,\dots,n$. Atunci în calitate de matrice S se poate lua matricea diagonală ataşată matricei A:

$$S = Diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

Avem

$$S^{-1} = Diag\left(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \quad \dots\dots \quad, \frac{1}{a_{nn}}\right)$$

În acest caz sistemul (6.3) devine:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j\right), \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Procesul iterativ (6.5) este definit prin:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right), \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{6.7}$$

Astfel obținem o metodă de rezolvare a sistemului liniar (3.13) numită ***metoda lui Jacobi.***

Exemplu. Fie dat sistemul de ecuații liniare:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Vom avea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = S^{-1}T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricei Q sunt: $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$. Deci metoda lui Jacobi:

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \tfrac{1}{2}x_2^{(k)} + \tfrac{1}{2}, \\ x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{2}x_1^{(k)} + \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

converge către soluția exactă $x* = (1,\ 1)^T$ oricare ar fi $x^{(0)} \in R^2$. În particular, pentru $x^{(0)} = (0,\ 0)^T$ obținem șirul:

$$x^{(1)} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T, x^{(2)} = \left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)^T, x^{(3)} = \left(\frac{7}{8},\frac{7}{8}\right)^T, x^{(4)} = \left(\frac{15}{16},\frac{15}{16}\right)^T, \dots.$$

Observăm că pentru metoda lui Jacobi matricea Q are elementele

$$q_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad i = j, \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{dacă} \quad i \neq j \end{cases}$$

Utilizând teorema 2 cu norma $\|\bullet\|_\infty$ obținem:

$$\|Q\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |q_{ij}| = \max_{1\le i\le n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1.$$

Rezultă că dacă

$$\text{a\_ii} \quad |a_{ij}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1,2,\dots,n,$$

adică dacă matricea A este ***diagonal dominantă*****,** atunci metoda lui Jacobi este convergentă.

6.3 Metoda Gauss-Seidel

În metoda lui Jacobi este necesar a păstra în memoria calculatorului toate componentele vectorului $x^{(k)}$ atâta timp cât se calculează vectorul $x^{(k+1)}$. Putem modifica metoda lui Jacobi astfel încât la pasul $(k+1)$ să folosim în calculul componentei $x_i^{(k+1)}$, valorile deja calculate la același pas: $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$. Această modificare a metodei lui Jacobi se numește ***metoda lui Gauss -Seidel***, iar șirul iterativ (6.7) devine:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1,2,\dots,n.$$

j=i+1

Se observă uşor că metodei lui Gauss-Seidel corespunde desfacerea *A*=*S*-*T* unde *S* este matricea subdiagonală ataşată lui *A*, iar *T* este matricea strict supradiagonală cu elementele $-a_{ij}$ ataşată la aceeaşi matrice *A*:

$$S=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Să reluăm exemplul de mai sus cu sistemul de ecuații (6.8) . Pentru metoda Gauss-Seidel avem:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q=S^{-1}T=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix},\quad d=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Șirul Gauss-Seidel arată astfel:

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{2}x_2^{(k)}+\frac{1}{2}, \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2}x_1^{(k+1)}+\frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

ori:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru aproximația inițială $x^{(0)}=(0,\ 0)^T$ obținem:

$$x^{(1)}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T,\ x^{(2)}=\left(\frac{3}{4},\frac{7}{8}\right)^T, x^{(3)}=\left(\frac{15}{16},\frac{31}{32}\right)^T,\ \dots.$$

Se observă că o iteraţie Gauss – Seidel aici este echivalentă cu două iteraţii Jacobi, deoarece valorile proprii ale matricei *Q* sunt 0 şi $\frac{1}{4}$, deci raza spectrală este $\rho\left(S^{-1}T\right)=\frac{1}{4}$. Aceasta înseamnă că eroarea la fiecare iteraţie se împarte la 4; în metoda lui Jacobi $\rho\left(S^{-1}T\right)=\frac{1}{2}$ şi eroarea se împarte la 2.

Subliniem că metoda lui Gauss – Seidel, necesitând acelaşi număr de operaţii aritmetice, este în caz general mai bună ca metoda lui Jacobi. Se poate arăta că, dacă *A* este o matrice pozitiv difinită atunci metoda Gauss – Seidel converge de două ori mai repede către soluție decât metoda lui Jacobi.

Se demonstrează şi aici (vezi, de exemplu, [15], pag.181) că dacă matricea *A* este diagonal dominantă atunci metoda Gauss – Seidel converge. Se cunosc modele în care metoda lui Gauss – Seidel converge, iar metoda lui Jacobi nu converge şi invers. Pentru ilustrare anunţăm următoarea teoremă.

Teorema (Reich). Dacă matrcea *A* este simetrică şi are elementele diagonale $a_{ii}>0$ pentru orice *i* atunci metoda Gauss – Seidel converge dacă şi numai dacă *A* este o matrice pozitiv definită.

Este cunoscut că metoda lui Jacobi nu întotdeauna converge pentru matricea *A* pozitiv definită. De exemplu, dacă *A* este o matrice pozitiv definită şi nu este diagonal dominantă, atunci este posibil ca raza spectrală $\rho\left(S^{-1}T\right)>1$ pentru metoda lui Jacobi.

După cum sa văzut mai sus, dacă matricea *A* este diagonal dominantă, atunci metoda lui Jacobi şi metoda lui Gauss – Seidel vor genera un şir de aproximaţii succesive care converge către soluţia exactă oricare ar fi aproximaţia iniţială $x^{(0)}$. Subliniem că această condiţie este numai suficientă şi nu necesară. De exemplu pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 50 & 25 & 2 \end{pmatrix}$$

care nu este diagonal dominantă metoda lui Gauss – Seidel converge foarte rapid.

6.4 Metoda suprarelaxărilor succesive

Metoda lui Gauss – Seidel poate fi modificată pentru îmbunătățirea vitezei de convergenţă a şirului aproximaţiilor succesive. Fie $\tilde{x}^{(k)}$ vectorul obţinut la pasul $k+1$ prin metoda Gauss – Seidel. Metoda iterativă definită prin:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega\left(\tilde{x}^{(k)} - x^{(k)}\right)$$

este cunoscută cu numele de ***metoda suprarelaxărilor succesive.*** Parametrul de relaxare ω se alege astfel încât să crească viteza de convergenţă. Pentru $\omega = 1$ metoda se reduce la metoda lui Gause – Seidel.

S-a găsit că pentru o alegere potrivită a parametrului ω convergenţa metodei suprarelaxării succesive este net superioară metodelor Jacobi şi Gauss – Sedei. De exemplu, în cazul sistemului de ecuaţii liniare (6.8) o iterație prin metoda suprarelaxării succesive este echivalentă (vezi [2,35]) cu 30 de iterații prin metoda lui Jacobi.

Se poate arăta că $\omega \in (0,\ 2)$, de regulă, în practică:

$$\omega \approx 1.8 \div 1.9.$$

Se demonstrează că metoda suprarelaxărilor succesive converge pentru toate matricele *A* simetrice pozitiv definite.