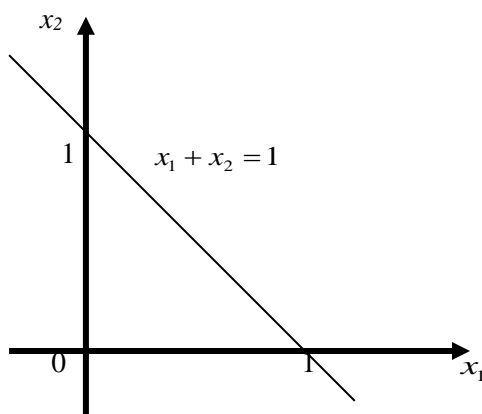


**Fig. 5.1** Interpretarea geometrică a sistemului compatibil determinat.

2. Sistemul de ecuații are o infinitate de soluții. Despre astfel de sisteme se spune că sunt *compatibil nedeterminate*. În fig.5.2 avem interpretarea geometrică a sistemului:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

care are o infinitate de soluții; aceste două soluții descriu una și aceeași dreaptă  $x_2 = 1 - x_1$ .

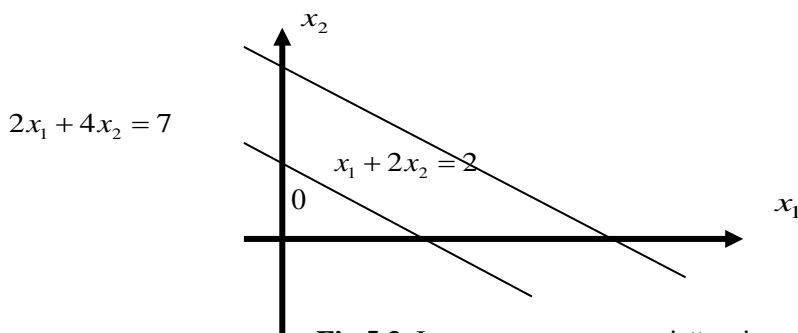


**Fig. 5.2** Interpretarea geometrică a sistemului compatibil nedeterminat.

3. Sistemul de ecuații nu are soluții, adică este *incompatibil*. De exemplu, sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases}$$

nu este compatibil. Dreptele  $x_2 = 1 - \frac{1}{2}x_1$  și  $x_2 = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}x_1$  (vezi fig. 5.3) sunt paralele.



**Fig.5.3** Interpretarea geometrică a sistemului incompatibil.

Dacă matricea  $A$  este nesingulară ( $\det A \neq 0$ ), atunci oricare ar fi vectorul  $b \in R^n$  sistemul  $Ax=b$  este compatibil determinat. Soluția sistemului poate fi scrisă sub forma:

$$x^* = A^{-1}b.$$

unde  $A^{-1}$  este inversa lui  $A$ .

Inversarea matricelor este o operație costisitoare (vezi de ex., [2]) care trebuie evitată în practică. În calitate de exemplu ilustrativ considerăm “sistemul” dintr-o ecuație cu o singură necunoscută:

$$7x = 21.$$

Cel mai bun mijloc de rezolvare a acestei probleme este împărțirea:

$$x^* = \frac{21}{7} = 3.$$

Aplicarea matricei inverse ne-ar duce la:

$$x^* = 7^{-1} \times 21 = 0.142857 \times 21 = 2.99997.$$

Al doilea procedeu necesită cu o operație aritmetică mai mult și dă un rezultat mai puțin precis. Același lucru, dar într-un mod mai pronunțat, este adevărat și în cazul rezolvării sistemelor cu multe ecuații. De aceea relația (5.2) trebuie interpretată doar în sensul de exprimare a faptului că  $x^*$  este soluția unică a sistemului  $Ax = b$ , dar nu și ca o cale de obținere a acestei soluții.

După cum se știe din matematica elementară, sistemele de ecuații liniare pot fi rezolvate prin formulele lui Cramer:

$$x_i^* = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad \Delta = \det(A), \quad \Delta_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}b_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$A_{ij}$  fiind complementul algebraic al lui  $a_{ij}$ .

Metoda de rezolvare a sistemelor prin formulele lui Cramer din punct de vedere practic rămâne inutilizabilă, deoarece cere un număr mare de operații aritmetice, și anume, este necesar să se calculeze  $n+1$  determinanți ( $\Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_n$ ) și să se efectueze  $n$  împărțiri. Pentru calculul unui determinant sunt necesare  $(n-1) \times n$  înmulțiri și  $(n-1)$  adunări. De exemplu, rezolvarea unui sistem cu 20 de ecuații prin formulele lui Cramer presupune efectuarea a  $19 \times 20! \times 21$  înmulțiri. S-a apreciat că dacă am executa aceste înmulțiri la un calculator electronic de viteză  $10^5$  operații pe secundă ne-ar trebui aproximativ  $3 \times 10^6$  ani!

Metodele numerice de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare sunt de două tipuri: metode directe și metode iterative.

*Metodele directe* constau în transformarea sistemului  $Ax=b$  într-un sistem echivalent pentru care rezolvarea este cu mult mai simplă. În metodele directe soluția exactă se obține după un număr finit de operații aritmetice elementare (adunare, scădere, înmulțire, împărțire și rădăcină pătrată) și acest număr de operații este de ordinul  $n^3$ . Subliniem că soluția exactă se obține în cazurile (ideale) în care erorile de rotunjire sunt absente. La fiecare operație elementară efectuată de calculator avem o eroare de rotunjire și prin urmare metodele directe în caz general furnizează doar o soluție aproximativă. Metodele directe se utilizează pentru rezolvarea sistemelor nu prea “mari”, de dimensiune  $n \leq 200$ .

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare printr-o *metodă iterativă* înseamnă construirea unui șir de vectori  $x^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  (pornind de la un vector  $x^{(0)}$  ales arbitrar) convergent către soluția sistemului considerat. În metodele iterative, de obicei, o iterație necesită efectuarea unui număr de ordinul  $n^2$  operații aritmetice. De aceea metodele iterative se utilizează pentru rezolvarea sistemelor “mari”, de dimensiune

$n \geq 10^2$  (în cazul asigurării unei viteze sporite de convergență pentru o alegere a aproximării inițiale adecvate). Trunchierea șirului  $\{x^{(k)}\}$  are loc la un indice  $m$  astfel încât  $x^{(m)}$  constituie o aproximație satisfăcătoare a soluției căutate  $x^*$  (de exemplu,  $\|x^{(m)} - x^*\| < \varepsilon$ , unde  $\varepsilon > 0$  este eroarea admisă).

## 5.2 Metoda eliminării a lui Gauss

Metoda eliminării a lui Gauss constă în a aduce sistemul inițial la un sistem echivalent având matricea coeficienților superior triunghiulară. Transformarea sistemului dat într-un sistem de formă triunghiulară fără ca să se modifice soluția sistemului se realizează cu ajutorul următoarelor trei operații de bază:

- rearanjarea ecuațiilor (schimbarea a două ecuații între ele);
- înmulțirea unei ecuații cu o constantă (diferită de zero);
- scăderea unei ecuații din alta și înlocuirea celei de a doua cu rezultatul scăderii.

Exemplificăm această metodă pentru următorul sistem de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 = -2, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Putem elimina necunoscuta  $x_1$  din ultimele două ecuații, înmulțind prima ecuație respectiv cu factorii:

$$\mu_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{4}{2} = 2, \quad \mu_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{-2}{2} = -1$$

și scăzând-o din ecuația a doua și apoi din ecuația a treia.

Obținem astfel sistemul echivalent

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -x_2 - 2x_3 = -4, \\ 3x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Coeficientul  $a_{11} = 2$  din prima ecuație se numește *elementul pivot* al primului pas de eliminare, iar linia corespunzătoare se numește *linie pivot*.

În mod analog putem elimina necunoscuta  $x_2$  din ultima ecuație. La pasul al doilea, elementul pivot este  $a'_{22} = -1$ . Ecuația a doua o înmulțim cu  $\mu_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}} = \frac{3}{-1} = -3$  și o scădem din ecuația a treia.

Deci se obține sistemul de formă triunghiulară:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -x_2 - 2x_3 = -4, \\ -4x_3 = -4. \end{cases}$$

În continuare se determină necunoscutele începând cu ecuația a treia:  $x_3^* = 1$ ; înlocuind rezultatul obținut în ecuația a doua vom obține  $x_2^* = 2$ ; în sfârșit din prima ecuație avem  $x_1^* = -1$ .

Să generalizăm această metodă. Fie dat sistemul de ecuații liniare:

$$Ax = b. \tag{5.3}$$

unde  $A = (a_{ij})_n$ ,  $x, b \in R^n$ ,  $\det A \neq 0$ .

Să presupunem că  $a_{11} \neq 0$ ; dacă  $a_{11} = 0$  se aduce elementul nenul din prima coloană pe locul (1,1) permutând ecuațiile respective ale sistemului. Primul pas constă în eliminarea necunoscutei  $x_1$  din ecuațiile sistemului începând cu a doua, multiplicând ecuația întâia cu raportul:

$$\mu_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, i = 2, 3, \dots, n$$

și scăzând rezultatul obținut din ecuația  $i$  pentru  $\forall i \geq 2$ .

Obținem în acest caz sistemul echivalent:

$$A^{(2)}x = b^{(2)}. \quad (5.4)$$

cu coeficienții:

$$\begin{aligned} a_{1j}^{(2)} &= a_{1j}^{(1)}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ a_{i1}^{(2)} &= 0, \quad i = 2, 3, \dots, n; \\ a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - \mu_{i1}a_{1j}^{(1)}, \quad i, j = 2, 3, \dots, n; \\ b_1^{(2)} &= b_1^{(1)}, \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \mu_{i1}b_1^{(1)}, \quad j = 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Mai sus s-a notat  $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$  și  $b_i^{(1)} = b_i$ ;  $i=1, 2, \dots, n$ . Prima ecuație a sistemului (5.4) coincide cu prima ecuație a sistemului (5.3). În continuare se repetă procedeul de mai sus pentru eliminarea necunoscutei  $x_2$  din sistemul (5.4) ș.a.m.d. La pasul  $k$  se obține sistemul:

$$A^{(k)}x = b^{(k)}$$

unde

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2,k-1}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & \dots & a_{k-1,n}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}; b^{(k)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_{k-1}^{(k-1)} \\ b_k^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Elementele  $a_{ij}^{(k)}$  ale lui  $A^{(k)}$  și  $b_i^{(k)}$  ale lui  $b^{(k)}$  se calculează recursiv prin formulele:

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k-1)} & , \text{ pentru } i \leq k-1, \\ 0 & , \text{ pentru } i \geq k, j \leq k-1, \\ a_{ij}^{(k-1)} - \mu_{i,k-1} \cdot a_{k-1,j}^{(k-1)} & \text{ pentru } i \geq k, j \geq k, \end{cases}$$

unde

$$\mu_{i,k-1} = \frac{a_{i,k-1}^{(k-1)}}{a_{k-1,k-1}^{(k-1)}},$$

iar

$$b_i^{(k)} = \begin{cases} b_i^{(k-1)} & , \text{ pentru } i \leq k-1, \\ b_i^{(k-1)} - \mu_{i,k-1} \cdot b_{k-1}^{(k-1)} & , \text{ pentru } i \geq k. \end{cases}$$

După  $n$  pași necunoscuta  $x_{n-1}$  va fi eliminată din ultima ecuație, obținându-se un sistem cu matricea superior triunghiulară:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1k}^{(1)}x_k + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2k}^{(2)}x_k + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \dots \\ a_{kk}^{(k)}x_k + \dots + a_{kn}^{(k)}x_n = b_k^{(k)}, \\ \dots \\ a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)}. \end{array} \right.$$

Acest sistem se rezolvă începând cu ultima ecuație cu ajutorul *procesului de eliminare inversă* care se poate descrie astfel:

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}, \quad x_{n-1} = \frac{b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}, \quad x_k = \frac{b_k^{(k)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k)}x_j}{a_{kk}^{(k)}}, \quad k = n-2, n-3, \dots, 2, 1.$$

Metoda eliminării a lui Gauss prezentată mai sus presupune că elementele pivot trebuie să fie diferite de zero. Dacă la efectuarea pasului  $k$  elementul pivot  $a_{kk}^{(k)} = 0$ , atunci cel puțin unul din celelalte elemente din coloana  $k$  și din liniile  $k+1, k+2, \dots, n$  este nenul; în caz contrar matricea  $A$  ar fi singulară ( $\det(A) = 0$ ). Permutând ecuațiile sistemului putem aduce pe locul  $(k, k)$  elementul nenul și, deci, este posibil să reluăm eliminarea.

Considerăm un exemplu simplu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Evident, nici o multiplicare a primei ecuații nu poate fi utilizată pentru a elimina pe  $x_1$  din ecuația a doua. Schimbând ecuațiile între ele cu locul, obținem:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4. \\ 3x_2 = 0. \end{cases}$$

un sistem sub formă triunghiulară, care se rezolvă imediat prin eliminarea inversă:  $x_2^* = 0$ ,  $x_1^* = 2$ .

Analizăm un alt exemplu:

$$\begin{cases} 0.000100x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

cu soluția exactă  $x_1^* = 1.00010$ ,  $x_2^* = 0.99990$ . Vom utiliza o aritmetică a virgulei mobile cu  $\beta = 10$  și  $t = 3$ : se păstrează în calcule numai trei cifre zecimale semnificative și presupunem că rezultatul se rotunjește corect. Aplicând metoda eliminării a lui Gauss obținem sistemul:

$$\begin{cases} 0.000100x_1 + x_2 = 1, \\ -10000x_2 = -10000. \end{cases}$$

Din ultima ecuație avem  $x_2^* = 1.000$  care înlocuiește în prima ecuație ne dă  $x_1^* = 0.000$ , evident un rezultat eronat. ***S-a produs o catastrofă de calcul!*** Permutând ecuațiile între ele, avem sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2. \\ 0.000100x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

și metoda eliminării lui Gauss îl transformă în:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2. \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

cu soluția  $x_1^* = x_2^* = 1.00$ .

Prin urmare, dacă un element pivot este exact egal cu zero sau chiar aproape egal cu zero, din motive de stabilitate numerică, trebuie să efectuăm rearanjarea ecuațiilor.

Există două strategii de alegere a elementului pivot pentru a preveni ca influența erorilor de rotunjire să devină catastrofală. Prima strategie se numește *pivotare parțială* și constă în următoarele: la pasul  $k$  pivotul se ia egal cu primul element maxim în modul din coloana  $k$  subdiagonală a lui  $A^{(k)}$ :

$$|a_{rk}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$$

și se permută liniile  $k$  și  $r$ .

O altă strategie de permutare constă în *pivotarea completă (totală)*; se schimbă liniile  $k$  și  $r$  ( $r \geq k$ ) și coloanele  $k$  și  $s$ , ( $s \geq k$ ) astfel încât pivotul  $a_{kk}^{(k)}$  obținut după permutare să coincidă cu primul element maxim în modul din submatricea delimitată de ultimile  $n-k$  linii și coloane ale lui  $A^{(k)}$ :

$$|a_{rs}^{(k)}| = \max_{k \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(k)}|.$$

Matricea  $A$  se numește *diagonal dominantă* dacă

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Fie  $A$  o matrice simetrică și diagonal dominantă. După primul pas de eliminare gaussiană matricea  $A^{(2)}$  devine:

$$\begin{pmatrix} a & z \\ 0 & \overline{A_1} \end{pmatrix}$$

unde submatricea  $\overline{A_1}$  este de asemenea diagonal dominantă. Se poate demonstra că procesul eliminării în cazul matricelor diagonal dominante nu depinde de alegerea elementului pivot. Nu este necesară pivotarea și în cazul când matricea  $A$  este pozitiv definită.

Putem estima numărul de operații aritmetice în metoda eliminării lui Gauss. Procedura de eliminare a necunoscutei  $x_1$  cere  $n(n-1) = n^2 - n$  operații aritmetice. Eliminarea necunoscutei  $x_k$  necesită  $k(k-1) = k^2 - k$  operații. Prin urmare procedura directă cere următorul număr de operații aritmetice:

$$\begin{aligned} N_1 &= (n^2 - n) + \dots + (k^2 - k) + \dots + (1^2 - 1) = \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 - n}{3}. \end{aligned}$$

Procesul de eliminare inversă se efectuează cu mult mai repede. Necunoscuta  $x_n$  se află cu ajutorul unei singure operații (împărțirea la elementul pivot); calculul  $x_{n-1}$  cere două operații (împărțire – scădere și apoi împărțire) ș.a.m.d.; pasul  $k$  necesită numai  $k$  operații. Prin urmare, eliminarea inversă necesită

$$N_2 = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

de operații aritmetice.

Mulți ani s-a crezut că metoda eliminării lui Gauss este optimă în sensul că orice altă metodă directă de rezolvare a sistemelor din  $n$  ecuații liniare necesită cel puțin  $\frac{n^3}{3}$  operații aritmetice. În momentul de față se cunosc metode în care numărul de operații este redus la  $Cn^\alpha$  ( $2 < \alpha < 3$ ). Aceste metode se bazează pe un rezultat remarcabil obținut în 1971 de către A. Schonhage și V. Strassen care au arătat că, teoretic, înmulțirea poate avea o complexitate numai cu puțin superioară adunării. Nu ne vom opri aici asupra acestor metode. Pentru a arăta că metoda lui Gauss nu este optimă să examinăm algoritmul lui Strassen de multiplicare a două matrice.

Fie de exemplu,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Algoritmul lui Strassen (vezi, de exemplu, [18], pag.47) se bazează pe identitatea matriceală:

$$A \times B = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix},$$

unde:

$$\begin{aligned}
C &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) + a_{22}(-b_{11} + b_{21}) - (a_{11} + a_{12})b_{22} + \\
&\quad + (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22}), \\
F &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) + a_{11}(b_{12} - b_{22}) - (a_{21} + a_{22})b_{11} + \\
&\quad + (-a_{11} + a_{21})(b_{11} + b_{12}), \\
D &= a_{11}(b_{12} - b_{22}) + (a_{11} + a_{12})b_{22}, \\
E &= (a_{21} + a_{22})b_{11} + a_{22}(-b_{11} + b_{21}).
\end{aligned}$$

Astfel, pentru a obține produsul a două matrice este suficient de a efectua șapte înmulțiri și 18 adunări. Dacă am multiplica matricele în mod tradițional, ne-ar trebui opt înmulțiri. În exemplul de mai sus nu s-au concretizat elementele matricelor  $A$  și  $B$  și nu s-a utilizat proprietatea de comutativitate a produsului. Prin urmare, elementele  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  pot fi considerate matrice și avem o procedură de multiplicare a matricelor de orice dimensiune  $n$ . Fie  $n = 2^m$ ,  $m$  – natural; în caz contrar adăugăm atâtea linii și coloane nule în matricele  $A$  și  $B$  încât  $n$  ar deveni o putere a lui doi. Dacă  $N(2^m)$  este numărul de operații efectuate la înmulțirea a două matrice de dimensiune  $2^m$ , atunci în baza identității de mai sus avem:

$$N(2^m) = 7 \cdot N(2^{m-1}) + 18 \cdot 2^{2m-2}.$$

Ținând seama că  $N(2) = 7 + 18$ , ultima relație implică

$$N(2^m) = 7^m + 6(7^m + 4^m)$$

sau

$$N(n) = n^{\log_2 7} + 6(n^{\log_2 7} + n^{\log_2 4}).$$

Deoarece  $\alpha = \log_2 7 \approx 2.81 < 3$ , algoritmul lui Strassen pentru  $n$  suficient de mare este mai avantajos decât procedeul obișnuit de înmulțire a matricelor.

### 5.3 Factorizarea LU

Să reluăm exemplul numeric din paragraful 3.3 de rezolvare a sistemului  $Ax = b$ , cu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

În urma procesului de eliminare a necunoscutei  $x_1$  se obține sistemul  $A^{(2)}x = b^{(2)}$ , unde

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Notăm prin  $M_1$  matricea interior triunghiulară:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\mu_{21} & 1 & 0 \\ -\mu_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

care se obține din matricea unitate prin înlocuirea elementelor subdiagonale din coloana întâia cu multiplicatorii  $-\mu_{21}, -\mu_{31}$ . Se verifică ușor că



$$M_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = A^{(2)},$$

$$M_1 b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = b^{(2)}.$$

În etapa finală de transformare, necunoscuta  $x_2$  va fi eliminată din ultima ecuație, obținându-se un sistem sub formă triunghiulară  $Ux = c$ , unde

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Se observă că  $U = M_2 A^{(2)}$  și  $c = M_2 b^{(2)}$ , unde

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\mu_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare procesul de transformare a sistemului  $Ax = b$ , într-un sistem echivalent de formă triunghiulară  $Ux = c$  poate fi reprezentat ca înmulțirea sistemului inițial succesiv la matricele  $M_1, M_2$ :

$$M_2 M_1 A x = M_2 M_1 b.$$

Relația  $M_2 M_1 A = U$  permite a da o altă interpretare metodei lui Gauss. Multiplicând această relație la stânga cu matricea inferior triunghiulară  $L = M_1^{-1} M_2^{-1}$  obținem:

$$A = LU.$$

Deci, cu ajutorul metodei eliminării a lui Gauss matricea  $A$  se descompune în produsul de doi factori  $L$  și  $U$ , unde  $L$  este o matrice inferior triunghiulară, iar  $U$  este o matrice superior triunghiulară. Această descompunere se numește *factorizarea LU* a matricei  $A$ .

Vom arăta că pentru orice matrice nesingulară există o “*factorizare LU*” care este echivalentă metodei eliminării lui Gauss. Pentru început presupunem că matricea  $A$  este astfel, încât eliminarea să se poată face fără permutări de linii sau de coloane.

Fie

$$m_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mu_{k+1,k} \\ \vdots \\ \mu_{nk} \end{pmatrix}, \quad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{componenta } k$$

unde multiplicatorii  $\mu_{ik}, i = k+1, k+2, \dots, n$  sunt cei utilizați la pasul  $k+1$  pentru eliminarea necunoscutei  $x_{k+1}$  (vezi paragraful 3.3).

Definim o matrice  $M_k$  astfel

$$M_k = I - m_k e_k^T.$$

Această matrice diferă de matricea unitate  $I$  numai prin elementele subdiagonale nenule din coloana  $k$ :

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\mu_{k+1,k} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\mu_{nk} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Metoda eliminării a lui Gauss constă (vezi paragraful 3.3) în determinarea șirului de matrice  $A = A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$ . Se constată ușor că

$$A^{(k+1)} = M_k \cdot M_{k-1} \cdot \dots \cdot M_1 A, k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Scriind această relație pentru  $k = n-1$  și notând  $U = A^{(n)}$ , obținem:

$$M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot \dots \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot A = U,$$

sau

$$A = M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} \cdot \dots \cdot M_{n-1}^{-1} \cdot U.$$

Se verifică imediat că

$$M_k^{-1} = I + m_k e_k^T.$$

De mai sus deducem:

$$A = L \cdot U,$$

unde

$$L = M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} \cdot \dots \cdot M_{n-1}^{-1} = I + n-1 \sum_{k=1} m_k e_k^T.$$

Prin urmare, metoda eliminării lui Gauss calculează o factorizare  $LU$  a matricei  $A$ , unde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \mu_{21} & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{k1} & \mu_{k2} & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \mu_{k+1,1} & \mu_{k+1,2} & \dots & \mu_{k+1,k} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & \mu_{nk} & \dots & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

După cum s-a arătat în paragraful 3.3, din motive de stabilitate, este indicat să utilizăm o strategie de pivotare parțială. Se demonstrează că orice matrice admite o factorizare  $LU$ , eventual efectuând asupra liniilor permutările care apar prin pivotare parțială. Cu alte cuvinte, există o matrice de permutare  $P$  astfel încât

$$PA = LU.$$

Metoda eliminării lui Gauss și factorizarea  $LU$  sunt echivalente. O factorizare  $LU$  a lui  $A$  poate fi calculată și direct, printr-o procedură compactă numită *factorizarea lui Crout*. Această factorizare impune  $U$  cu diagonala unitate și este mai avantajoasă pe calculatoarele ce permit calcularea rapidă a produselor scalare. Pentru o inițiere mai aprofundată în factorizarea lui Crout recomandăm lucrările [2,34,38].

Presupunem că se cunoaște o factorizare  $LU$  a matricei  $A$ . Atunci sistemul de ecuații liniare  $Ax = b$  este echivalent cu  $LUx = b$ , care se desface în două sisteme triunghiulare:

$$Ly = b, \quad Ux = y.$$

Se rezolvă mai întâi sistemul inferior triunghiular  $Ly = b$  printr-o procedură tipică de **substituție “înainte”** începând cu prima ecuație:

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}, \quad y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k}{l_{ii}}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Aici  $l_{ik}$  sunt elementele matricei  $L$ . Apoi se rezolvă sistemul superior triunghiular  $Ux = y$  prin procedura de **substituție “înapoi”**, începând cu ultima ecuație:

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}, \quad x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ki} x_k}{u_{ii}}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1,$$

unde  $u_{ik}$  sunt elementele matricei  $U$ .

Utilizând o factorizare  $LU$  a lui  $A$  putem rezolva simultan mai multe sisteme de ecuații, având aceeași matrice  $A$ , fără a relua calculele de la început.

Metoda eliminării lui Gauss ne permite să calculăm și determinantul matricei  $A$ . Într-adevăr, să observăm că

$$\det(A) = \det(L) \times \det(U).$$

Deoarece  $\det(L) = 1$ , avem:

$$\det(A) = a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n)},$$

adică determinantul este produsul elementelor pivoți. Dacă se aplică una din strategiile de pivotare atunci:

$$\det(A) = (-1)^m a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n)}$$

unde  $m$  este numărul total de permutări efectuate.

## 5.4 Factorizarea Cholesky

Fie  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  o matrice simetrică și pozitiv definită, adică:

$$(Ax, x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0.$$

Vom arăta că în factorizarea  $LU$  a lui  $A$  se poate alege  $U = L^T$ . Descompunerea

$$A = L \cdot L^T$$

se numește *factorizarea Cholesky*.

**Teoremă.** Dacă matricea  $A$  este simetrică și pozitiv definită, atunci există o matrice inferior triunghiulară  $L$ , cu elementele diagonale pozitive, unică, astfel încât  $A = L \cdot L^T$ .

**Demonstrație.** Vom demonstra teorema prin inducție asupra lui  $n$ . Pentru  $n = 2$  avem:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}.$$

Dacă formăm produsul  $L \cdot L^T$  și-l identificăm cu  $A$ , obținem:

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11}^2, & a_{12} &= l_{11} l_{21}, \\ a_{21} &= l_{21} l_{11}, & a_{22} &= l_{21}^2 + l_{22}^2. \end{aligned}$$

Deoarece matricea  $A$  este pozitiv definită, elementele de pe diagonală sunt pozitive și deci putem extrage rădăcină pătrată:  $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ . Al doilea element  $l_{21}$  se determină din ecuația ce conține  $a_{21}$  ( $a_{21} = a_{12}$  pentru că  $A$  este o matrice simetrică):

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}}}.$$

În fine, elementul  $l_{22}$  se determină astfel :

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}}.$$

Să arătăm că extragerea rădăcinii pătrate de mai sus este posibilă. Într-adevăr, fie vectorul  $x$  cu componentele  $a_{12}$  și  $-a_{11}$ :

$$x = \begin{pmatrix} a_{12} \\ -a_{11} \end{pmatrix}.$$

Atunci  $(Ax, x) = x^T Ax = a_{11}^2 a_{22} - a_{12}^2 a_{11} > 0$  fiindcă matricea  $A$  este pozitiv definită. Împărțind ultima inegalitate la  $a_{11}^2 > 0$  obținem

$$a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} > 0.$$

Prin urmare, pentru  $n = 2$  descompunerea  $A = L \cdot L^T$  există și este unică. Să presupunem teorema adevărată pentru  $n = k - 1$ :  $A = L \cdot L^T$  unde  $A$  și  $L$  sunt matrice de dimensiune  $(k - 1) \times (k - 1)$ . Fie  $A'$  și  $L'$  astfel:

$$A' = \begin{pmatrix} A & y \\ y^T & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad L' = \begin{pmatrix} L & 0 \\ w^T & l_{kk} \end{pmatrix},$$

unde  $y$  și  $w$  sunt vectorii coloană ,având  $k - 1$  componente .

Formăm produsul  $L' \cdot (L')^T$  și-l identificăm cu  $A'$ . Atunci obținem:

$$\begin{aligned} A &= LL^T, & y &= Lw, \\ y^T &= w^T L^T, & a_{kk} &= l_{kk}^2 + w^T w. \end{aligned}$$

Prin presupunerea de inducție matematică, matricea  $L$  este determinată în mod unic astfel ca  $A = LL^T$ . De aici rezultă că vectorul  $w$  este și el unic și se calculează ca soluție a sistemului  $y = Lw$ . Mai departe, elementul  $l_{kk}$  se definește din formula:

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - w^T w}.$$

Arătăm, ca și în cazul matricelor de dimensiune  $2 \times 2$ , că expresia de sub rădăcină este pozitivă. În calitate de vectorul  $x$  vom lua :

$$x = \begin{pmatrix} A^{-1}y \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Notăm  $z = A^{-1}y$ ; atunci

$$\begin{aligned} (Ax, x) &= x^T Ax = z^T Az - 2z^T y + a_{kk} = \\ &= -z^T y + a_{kk} = a_{kk} - y^T A^{-1}y = a_{kk} - y^T (LL^T)^{-1} y = \\ &= a_{kk} - (L^{-1}y)^T (L^{-1}y) = a_{kk} - w^T w > 0. \end{aligned}$$

Deci matricea  $L'$  cu proprietatea  $A' = L' \cdot (L')^T$  este unic determinată și **teorema este demonstrată.**

Se poate arăta că factorizarea Cholesky a unei matrice  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  simetrice pozitiv definite necesită aproximativ  $n^3/6$  operații (înmulțiri și adunări) și  $n$  extrageri de radical (necesare pentru a calcula elementele diagonale  $l_{kk}$ ).

Metoda lui Cholesky de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare se mai numește *metoda rădăcinii pătrate* și constă în descompunerea sistemului  $Ax = b$  în sistemele triunghiulare:

$$L^T y = b, \quad Lx = y.$$

Elementele  $l_{ij}$  ale matricei inferior triunghiulare  $L$  pot fi calculate în modul următor: se determină prima coloană a matricei  $L$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}, \quad i = 2, 3, \dots, n;$$

după ce s-au obținut primele  $(k - 1)$  coloane ale matricei  $L$  se calculează coloana  $k$

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2},$$

$$l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}} \left( a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj} \right), \quad i = k + 1, \dots, n.$$

O caracteristică remarcabilă a algoritmului Cholesky constă în stabilitatea lui numerică. Acest lucru rezultă din faptul că elementul maxim în modul a unei matrice simetrice și pozitiv definite este situat pe diagonală principală. În plus, elementele diagonale ale matricei  $A$  și elementele  $l_{ij}$  ale matricei  $L$  satisfac relației:

$$l_{1k}^2 + l_{2k}^2 + \dots + l_{kk}^2 = a_{kk}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Astfel avem o limitare a creșterii elementelor matricei  $L$ : orice element  $l_{ij}$  nu depășește elementul maxim în modul  $|a_{kk}|$ .

### 5.5 Perturbații. Numărul de condiționare

Considerăm sistemul liniar  $Ax = b$ . Soluția exactă a sistemului considerat poate fi scrisă sub forma  $x^* = A^{-1}b$ . Să presupunem că matricea nesingulară  $A$  și vectorul  $b$  suferă perturbațiile  $\delta A$  și  $\delta b$ .

Mai întâi să analizăm cazul când perturbăm numai termenul liber. Soluția perturbată  $\tilde{x}$  a sistemului cu partea dreaptă  $b + \delta b$  satisface egalitatea:

$$A\tilde{x} = b + \delta b.$$

Obținem:

$$\tilde{x} - x^* = A^{-1}\delta b,$$

de unde rezultă că

$$\|\tilde{x} - x^*\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta b\| \quad (5.5)$$

oricare ar fi norma matriceală subordonată unei norme vectoriale. Pentru orice  $A$  și  $b$  există o perturbație  $\delta b$  astfel încât să avem egalitate în (5.5). Prin urmare  $\|A^{-1}\|$  evaluează cu cât poate să crească eroarea furnizată de  $\delta b$ .

Pentru determinarea efectului relativ al aceleiași perturbații  $\delta b$  să observăm că:

$$\|b\| = \|Ax^*\| \leq \|A\| \|x^*\|,$$

sau

$$\frac{1}{\|x^*\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}.$$

Ținând seama de aceasta, inegalitatea (5.5) implică

$$\frac{\|\tilde{x} - x^*\|}{\|x^*\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad (5.6)$$

Presupunem acum că perturbăm elementele lui  $A$ ; atunci soluția perturbată  $\tilde{x}$  va verifica egalitatea:  
 $(A + \delta A)\tilde{x} = b$ .

Rezultă că:

$$\tilde{x} - x^* = A^{-1} \delta A \tilde{x}$$

și obținem estimarea:

$$\|\tilde{x} - x^*\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|\tilde{x}\|. \quad (5.7)$$

Această inegalitate o putem pune sub forma:

$$\frac{\|\tilde{x} - x^*\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \quad (5.8)$$

Se observă că atât în (5.6) cât și (5.8) numărul  $\|A\| \|A^{-1}\|$  estimează eroarea relativă în soluție furnizată de  $\delta b$  sau  $\delta A$ . Acest număr se numește **număr de condiționare** al matricei  $A$  în raport cu norma matriceală considerată și se notează:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Deoarece pentru orice normă matriceală subordonată unei norme vectoriale se îndeplinește egalitatea  $\|I\| = 1$ , avem:

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\|,$$

și deci,  $\text{cond}(A) \geq 1$  oricare ar fi matricea  $A$ .

Numărul de condiționare caracterizează efectul maximal al perturbărilor  $\delta b$  și  $\delta A$  la rezolvarea sistemului  $Ax = b$ . Dacă numărul de condiționare  $\text{cond}(A)$  este mare, atunci perturbații mici ale lui  $A$  și  $b$  vor produce perturbații relativ mari ale lui  $x^*$ ; în acest caz se spune că matricea  $A$  este **rău (sau prost) condiționată**. Matricele cu numărul de condiționare  $\text{cond}(A)$  "mic" se numesc **bine condiționate**.

Subliniem că dimensiunea matricei nu are o influență directă asupra numărului ei de condiționare: dacă  $A=I$  sau chiar  $A = \frac{1}{10}I$  avem  $\text{cond}(A) = 1$ . Pentru comparație, determinantul matricei nu este un indice adecvat al condiționării, deoarece valoarea determinantului depinde și de dimensiunea  $n$  a matricei. Dacă  $A$  este o matrice aproape singulară încă nu înseamnă că este prost condiționată. În exemplul  $A = \frac{1}{10}I$

avem  $\det(A) = 10^{-n}$ ; această matrice "aproape singulară" este maxim de bine condiționată.

**Exemplu.** Considerăm sistemul de ecuații  $Ax = b$ , unde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Menționăm că  $\det(A) = 1 \neq 0$ . Sistemul considerat în formă desfășurată este:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 - \dots - x_n = -1, \\ x_2 - x_3 - \dots - x_n = -1, \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1} - x_n = -1, \\ x_n = 1. \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Sistemul de ecuații (3.9) admite o soluție exactă unică  $x_1^* = x_2^* = \dots = x_{n-1}^* = 0, x_n^* = 1$ . Presupunem că perturbăm vectorul liber  $b$  cu  $\delta b = (0, 0, \dots, 0, \varepsilon)^T$ . Atunci soluția exactă a sistemului perturbat  $A\tilde{x} = b + \delta b$  devine  $\tilde{x} = x^* + r$  și eroarea  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$  satisface ecuațiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 - r_2 - r_3 - \dots - r_n = 0, \\ r_2 - r_3 - \dots - r_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ r_{n-1} - r_n = 0, \\ r_n = \varepsilon. \end{array} \right.$$

De unde rezultă, că:

$$\begin{aligned} r_n &= \varepsilon, \\ r_{n-1} &= r_n = \varepsilon, \\ r_{n-2} &= r_n + r_{n-1} = 2\varepsilon, \\ r_{n-3} &= r_n + r_{n-1} + r_{n-2} = 4\varepsilon = 2^2 \varepsilon, \\ &\dots\dots\dots \\ r_{n-k} &= r_n + r_{n-1} + \dots + r_{n-(k+1)} = 2^{k-1} \varepsilon, \\ &\dots\dots\dots \\ r_1 &= r_{n-(n-1)} = 2^{(n-1)-1} \varepsilon = 2^{n-2} \varepsilon. \end{aligned}$$

Astfel  $\tilde{x}_i = 2^{n-i-1} \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad \tilde{x}_n = 1 + \varepsilon$ .

Să estimăm  $cond(A)$ , luând în calitate de normă  $\|\cdot\|_\infty$ . Vom avea:

$$\|\tilde{x} - x^*\|_\infty = \|r\|_\infty = 2^{n-2} \varepsilon, \quad \|x^*\|_\infty = 1, \quad \|\delta b\|_\infty = \varepsilon, \quad \|b\|_\infty = 1.$$

Prin urmare

$$cond(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty \geq \frac{\|r\|_\infty}{\|x^*\|_\infty} \cdot \frac{\|b\|_\infty}{\|\delta b\|_\infty} = 2^{n-2}.$$

Deoarece  $\|A\|_\infty = n$ , rezultă că norma matricei inverse este destul de mare, cu toate că

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = 1$ . De exemplu pentru  $n = 102$  avem:

$$\|A\|_\infty = 102, \quad cond(A) \geq 2^{100} > 10^{30}, \quad \text{iar } \|A^{-1}\|_\infty > 10^{27}.$$

În particular, dacă  $\varepsilon = 10^{-15}$  (o eroare suficient de mică), atunci  $\|\tilde{x} - x^*\|_\infty = \|r\|_\infty > 10^{15}$ ; o perturbație destul de mică a termenului liber a produs o perturbație atât de mare în soluție!

Valoarea numărului de condiționare al unei matrice depinde de norma matriceală întrebuințată. Presupunem că  $A$  este o matrice simetrică și pozitiv definită cu valorile proprii pozitive ordonate astfel :  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . În mod analog se arată că pentru astfel de matrice numărul de condiționare este:

$$\text{cond}(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}.$$

**Exemplu:** Valorile proprii ale matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}$$

aproximativ sunt egale cu  $\lambda_1 = \frac{1}{2}10^{-4}$  și  $\lambda_2 = 2$ . De aceea numărul de condiționare  $\text{cond}(A)$  este

aproape egal cu  $4 \cdot 10^4$ . Ne putem aștepta că perturbații mici ale datelor inițiale vor produce mari schimbări în soluție. Într-adevăr, fie sistemele de ecuații  $Ax = b$  și  $Ax = b + \delta b$  unde

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{pmatrix}, \quad \delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0001 \end{pmatrix}.$$

Soluția se schimbă de la  $x^* = (1 \ 1)^T$  până la  $\tilde{x} = (0 \ 2)^T$ :

$$\frac{\|x^* - \tilde{x}\|_2}{\|x^*\|_2} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2} = 1, \quad \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0001 \end{pmatrix} \right\|_2}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{pmatrix} \right\|_2} = \frac{10^{-4}}{2\sqrt{2}}.$$

Fie dat un sistem de ecuații liniare. Reprezentarea cu virgulă mobilă a elementelor  $A$  și  $B$  în calculatorul electronic nu este exactă. Prin urmare, efectiv în memoria mașinii electronice de calcul vom avea sistemul  $\tilde{A}x = \tilde{b}$  unde  $\tilde{A}$  și  $\tilde{b}$  sunt rotunjirile corespunzătoare. Există matricele de perturbare  $P$  și  $D$  ( $D$  este o matrice diagonală) astfel încât

$$\tilde{A} = A(I + P) \quad \tilde{b} = (I + D)b.$$

Dacă notăm cu  $\varepsilon_M$  unitatea de rotunjire a mașinii (vezi paragraful 1.3), atunci  $\|P\| \leq \varepsilon_M$  și  $\|D\| \leq \varepsilon_M$ . Astfel obținem:

$$\|\delta A\| = \|\tilde{A} - A\| \leq \varepsilon_M \|A\|, \quad \|\delta b\| = \|\tilde{b} - b\| \leq \varepsilon_M \|b\|.$$

Din inegalitățile de mai sus și din (3.7) rezultă că erorile de rotunjire produc o perturbație estimată prin:

$$\|\tilde{x} - x^*\| \leq 2\varepsilon_M \|\tilde{x}\| \text{cond}(A).$$

Subliniem că determinarea numărului de condiționare  $\text{cond}(A)$  este o problemă dificilă, deoarece conține calculul lui  $\|A^{-1}\|$ . Calculul matricei inverse și normei sale necesită aproximativ  $n^3 + 2n^2$  operații suplimentare și aproape de patru ori majorează cheltuielile necesare pentru rezolvarea sistemului  $Ax = b$ . Un procedeu practic de calcul aproximativ al lui  $\|A^{-1}\|$  constă în următoarele. Se observă că dacă  $w = A^{-1}y$  atunci  $\|w\| \leq \|A^{-1}\| \|y\|$  și prin urmare

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{\|w\|}{\|y\|}.$$



Deci, se poate alege  $k$  vectori  $y_i$ , apoi se rezolvă sistemul de ecuații  $Aw_i = y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , și se pune

$$\|A^{-1}\| \approx \max_{1 \leq i \leq k} \frac{\|w_i\|}{\|y_i\|}.$$