Prelegerea nr. 4

IV. METODE NUMERICE ÎN ALGEBRA LINIARĂ

Sumar

- *Elemente de analiză matriceală*
- *Norme de vectori și matrice*
- *Matrice speciale*
- *Funcții de matrice și proprietățile lor*

4.1 Elemente de analiză matriceală

4.1.1 Vectori şi matrice

Un tablou dreptunghiular de $m\times n$ numere reale așezate pe *m* linii și *n* coloane:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se numeşte *matrice*. Numerele a_{ij} se numesc *elementele matricei.*

Matricea se mai poate reprezenta simbolic astfel: $A=(a_{ij}),\ i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n,$ sau $A=(a_{ij})_{mn}$. Vom spune că matricea *A* este de dimensiune $m\times n$. În cazul când $m=n$, matricea se numeşte *pătrată de ordinul n* şi se notează $A=(a_{ij})_n$. Dacă $m\neq n$, matricea se numeşte *rectangulară (dreptunghiulară).* O matrice $1\times n$ se numeşte *vector linie,* iar o matrice $n\times 1$ este un *vector coloană.*

Un sistem ordonat de *n* numere reale se numeşte *vector n-dimensional.* Un vector se reprezintă printr-o matrice cu o singură linie sau o singură coloană. În lucrarea de faţă prin vector vom înţelege întotdeauna vector-coloană:

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vom nota prin A^T matricea *transpusă* (matricea obţinută din cea dată, transformând liniile în coloane şi coloanele în linii):

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{m3} \\ \multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

În particular, transpusa unui vector coloană x este un vector linie:

$$x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Matricea A se numeşte *matrice simetrică* dacă $A=A^T$, adică $a_{ij} = a_{ji}$.

Mulţimea tuturor vectorilor n-dimensionali (n natural, fixat) se numeşte *spaţiul liniar n-dimensional* şi se notează cu $\boldsymbol{R}^n$.

Suma matricelor A şi *B*, ambele de dimensiuni $m \times n$, este o matrice C de dimensiune $m \times n$ cu elementele $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$..

Produsul a două matrice se defineşte numai în cazul când numărul coloanelor primului factor este egal cu numărul liniilor celui de-al doilea factor. Astfel, dacă $A=(a_{ij})_{mn}$ şi $B=(b_{ij})_{np}$, atunci $C=A \cdot B$, unde $C=(c_{ij})_{mp}$ şi

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,p.$$

Considerăm doi vectori $x,y \in \boldsymbol{R}^n$. Ca un caz particular, vom obţine:

$$x^T y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots\dots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

$$xy^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots\dots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & \dots & x_3 y_n \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}.$$

$x^T y$ se numeşte *produsul scalar* al vectorilor $x,y \in \boldsymbol{R}^n$ şi se mai notează *(x,y)* sau $<x,y>$.

xy^T se numeşte *produsul diadic* al vectorilor $x,y \in \boldsymbol{R}^n$; este o matrice pătrată de ordinul n şi se mai notează astfel: $>x,y<$.

Pentru orice vectori din R^n au loc proprietăţile:

- *(x,y)=(y,x);*
- *(x+y,z)=(x,z)+(y,z);*
- *(ax,y)=a(x,y);* ($a \in R$);
- $(x,x) \geq 0$; $(x,x)=0$ atunci şi numai atunci când $x=0$.

Produsul scalar este comutativ. În caz general pentru matrice $A \cdot B \neq B \cdot A$.
Orice matrice pătrată se poate înmulţi cu ea însăşi:

$$A \cdot A = A^2; A^2 \cdot A = A^3; .....; A^{n-1} \cdot A = A^n; .....$$

Au loc relațiile:

1. $(A \cdot B)C = A(B \cdot C),$ legea asociativității,
2. $A(B + C) = AB + AC,$ legea distributivității la stânga,
3. $(B + C)A = BA + CA,$ legea distributivității la dreapta,
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B), \alpha \in R.$

4.1.2 Norme de vectori și matrice

Norma unui vector $x \in R^n$ este un număr real, notat $\|x\|$, cu proprietăţile:

1. $\|x\| \geq 0$ pentru orice $x \in R^n$
2. $\|x\| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ pentru orice $x \in R^n$ şi $\alpha \in R$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pentru orice x şi $y \in R^n$.

Pentru orice vector $x \in R^n$ se definesc normele:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Ele satisfac proprietăţile din definiţia de mai sus a normei. Norma $\|x\|_2$ se numeşte şi *normă euclidiană.* Ea provine din produsul scalar:

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)}$$

şi generalizează noţiunea de lungime a vectorului.

Au loc următoarele inegalități:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty,$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty,$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Exemplu. Fie $x=(1,-2,-3)^T$. Atunci

$$\|x\|_1 = 6, \ \|x\|_2 = \sqrt{14} \text{ şi } \|x\|_\infty = 3.$$

Oricare ar fi $x, y \in R^n$ avem:

$$|(x, y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Această relaţie se numeşte *inegalitatea lui Schwarz Cauchy Buniacovski.*

Unghiul dintre doi vectori *x,y* din R^n se defineşte prin formula:

$$\cos \theta = \frac{(x, y)}{\|x\|_2 \|y\|_2}.$$

Doi vectori *x,y* din R^n se zic *ortogonali* dacă $(x, y) = 0$.

Pe mulțimea matricelor pătrate se poate introduce o normă $\|A\|$ în sensul definit mai sus pentru vectori. Mai importante şi mai utilizate sunt însă normele matriceale definite astfel:

$$\|A\| = \max_{|x|=1}\|Ax\|.$$

Această normă satisface următoarea condiție:

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

oricare ar fi matricele *A* şi *B*.

Dacă în plus, oricare ar fi vectorul $x \in R^n$ avem:

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

se zice că norma matriceală este *compatibilă* cu norma vectorială sau *subordonată* normei vectoriale.

Normele:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\,;$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\,;$$

sunt norme matriceale compatibile cu normele vectoriale $\|x\|_\infty$ şi $\|x\|_1$.

Numărul λ se numeşte *valoare proprie* a lui *A* dacă există un vector nenul $x \in R^n$, astfel încât $Ax = \lambda x$.

Mulţimea valorilor proprii ale matricei *A* formează *spectrul* lui *A* şi se notează cu $\sigma(A)$.

Raza spectrală a lui *A* se defineşte prin relaţia:

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|.$$

Norma matriceală subordonată normei euclidiene $\|x\|_2$ este:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}.$$

În aplicaţii se utilizează des următoarea normă:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

numită *norma lui Frobenius*, care însă nu este subordonată unei norme vectoriale.

Prin *I* vom nota matricea unitate:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Oricare ar fi matricea *A* avem *IA*=*AI*=*A*. Matricea *A* se numește inversabilă dacă există o matrice, notată cu A^{-1}, astfel încât $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Dacă $\|A\| < 1$ atunci matricea *I-A* este inversabilă şi

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots,$$

$$\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}.$$

Pentru ca matricea *I-A* să fie inversabilă este suficient ca:

$$\lim_{n\to\infty} A^n = 0.$$

unde *0* este matricea nulă (o matrice cu elementele egale cu zero).

4.1.3 Matrice speciale

O matrice pătrată de forma:

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

se numeşte *matrice diagonală*. Astfel de matrice se mai notează:

$$D = Diag(d_1, d_2, \dots, d_n).$$

Matricea A se numeşte *inferior triunghiulară (superior triunghiulară)* dacă elementele sale satisfac relaţiile:

$$a_{ij} = 0 \quad pentru\ i < j (i > j),\ i, j = 1,2, \dots, n.$$

Matricele inferior triunghiulare se notează de obicei prin L, iar cele superior triunghiulare prin U; de exemplu:

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Matricea A se numeşte *tridiagonală* dacă elementele sale satisfac relaţiile:

$$a_{ij} = 0\ pentru\ |i-j| > 1, \quad i, j = 1,2, \dots, n.$$

Astfel:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & \dots a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

O matrice Q se numeşte *ortogonală* dacă:

$$Q^T Q = Q Q^T = I \quad sau \quad Q^T = Q^{-1}.$$

Imediat se verifică ca

$$(Qx)^T Qy = x^T y, \quad \text{pentru } \forall x \in R^n,$$

$$|Qx|_2 = \|x\|_2 \quad \text{pentru } \forall x \in R^n,$$

$$\|Q\|_2 = 1, \quad \|QA\|_2 = \|AQ\|_2 = \|A\|_2 \quad \text{pentru } \forall A.$$

Prin urmare, matricele ortogonale păstrează produsul scalar, lungimea vectorilor şi norma matricelor.

Exemplu.

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad Q^T = Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Matricea Q roteşte orice vector cu unghiul θ, iar matricea Q^T îl rotește în direcție inversă cu unghiul $-\theta$.

Matricea obținută din matricea unitate prin reordonarea coloanelor ei se numește matrice de *permutare* și se notează P. De exemplu:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O matrice de forma uv^T, unde $u, v \in R^n$, se numeşte matrice de *rangul întâi*. Matricele $I + \alpha uv^T$, unde α este un scalar, se numesc matrice *elementare*. Matricea

$$H = I - \frac{2uu^T}{\|u\|_2^2}, \quad u \neq 0, u \in R^n$$

se numeşte *reflector* sau matricea lui *Householder*.

Se verifică uşor că matricele *P* şi *H* sunt ortogonale.

Identitatea Sherman-Morrison-Woodbury. Fie $x, y \in R^n$ şi presupunem că matricea *A* este inversabilă. Matricea $A+xy^T$ va fi inversabilă atunci şi numai atunci când $1 + y^T A^{-1} x \neq 0$. În plus:

$$(A + xy^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} x y^T A^{-1}}{1 + y^T A^{-1} x}$$

O matrice *A* simetrică se numeşte *pozitiv definită* dacă

$$(Ax, x) > 0 \quad pentru\ \forall\ x \neq 0, x \in R^n.$$

Elementele de pe diagonala principală a matricei pozitiv definite sunt pozitive. Pe diagonala principală se află şi elementul maximal (în modul) al unei matrice pozitiv definite.

Exemplu. Matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

este pozitiv definită, deoarece

$$(Ax, x) = x^T A x = (x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2 =$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 > 0 \quad pentru\ \forall x \neq 0.$$

Functii de matrice

Dacă *f(x)* – polinom:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

atunci

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + A_0 E$$

Exemple

$$e^A = E + \frac{1}{1!}\,A + \frac{1}{2!}\,A^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\,A^k + \ldots$$

$$\cos A = E - \frac{1}{2!}\,A + \frac{1}{4!}\,A^2 + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,A^{2k} + \ldots$$

$$\sin A = \frac{1}{1!}\,A - \frac{1}{3!}\,A^3 + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,A^{2k+1} + \ldots.$$