LUCRAREA DE LABORATOR NR.1

REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAŢIILOR ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

1.Scopul lucrărilor

1) Să se separe toate rădăcinile reale ale ecuației *f(x)=0* unde *y=f(x)* este o funcție reală de variabilă reală.

2) Să se determine o rădăcină reală a ecuaţiei date cu ajutorul metodei înjumătăţirii intervalului cu o eroare mai mică decât $\varepsilon=10^{-2}$.

3) Să se precizeze rădăcina obţinută cu exactitatea $\varepsilon=10^{-6}$ utilizând

- metoda aproximațiilor succesive
- metoda tangentelor (Newton)
- metoda secantelor.

4) Să se compare rezultatele luând în considerație numărul de iterații, evaluările pentru funcția şi derivată.

2.Probleme date spre rezolvare

Nr.	*f(x)*	Nr.	*f(x)*
1	a) cos(x)+x-1 cos(x)+x b) x^3-30x-41	5	a) 2-x-ln(x) b) x^3+29x+34
2	a) ln(x+1)-4x ln(x+1)-4x+4 b) x^3-25x+19	6	a) 2x-e^{-x} b) x^3-26x+43
3	a) e^x+3x b) x^3-23x-42	7	a) lg(1+x)+x-1,5 b) x^3+25x-37
4	a) $\sqrt{x+1}-\frac{1}{x}$ b) x^3+34x+23	8	a) (2-x)*e^x-0,5 b) x^3-12x+3
Nr.	*f(x)*	Nr.	*f(x)*
9	a) $(x+3)^3$-cos(x)	18	a) 2^x+3x-0,5

	b) $x^3+13x-1$		b) $x^3-37x-52$
10	a) $e^{-x}*\sin(x)+1$ b) x^3+9x-3	19	a) $\cos(x)+2x-0,5$ b) $x^3-26x+43$
11	a) $x^2-\ln(x+1)$ b) $x^3+12x+4$	20	a) 2^x-1 2^x-3 b) $x^3-14x-31$
12	a) $x^3-\cos(x)$ b) $x^3+14x-6$	21	a) $\lg(x+2x)+x-2$ b) $x^3-25x+2$
13	a) $(x+1)^3+\ln(x)$ b) $x^3+23x+1$	22	a) 2^x-2x b) $x^3-15x+14$
14	a) $2(x-1)^2-e^x$ b) $x^3+20x-41$	23	a) $\lg(2x+3)+2x-1$ b) x^3+7x-2
15	a) $x^2-\sin(x)$ b) $x^3-25x+47$	24	a) $1-x^2-2e^x$ 2-x^2-2e^x b) $x^3-25x+11$
16	a) $2^x-(x+1)^2$ b) $x^3-21x-37$	25	a) $\sqrt{\lg(x+2)}-x$ b) $x^3-25x+11$
17	a) $x^2+4*\sin(x)$ x^2+4sin(x)-2 b) $x^3-18x+43$	26	a) $\cos(x)+3x+1$ b) $x^3-20x+14$

3.Descrierea metodelor

Rezolvarea ecuației *f(x)=0* implică parcurgerea a două etape importante:

- *separarea rădăcinilor*, care constă în determinarea unui interval *[a, b]* în care este situată o rădăcină reală a ecuației;
- *calculul aproximativ* ai fiecărei rădăcini şi evaluarea erorii care s-a comis considerând că separarea deja s-a efectuat.

3.1 Separarea rădăcinilor

Separarea rădăcinilor se poate face prin diferite metode. Cele mai des utilizate în practică sunt următoarele două metode de separare:

a) *Metoda grafică*. Adeseori ecuaţia $f(x)=0$ poate fi pusă sub forma echivalentă $\varphi(x)=g(x)$. Rădăcinile ultimei ecuației sunt abscisele punctelor de intersecție ale curbelor $y=\varphi(x)$ şi $y=g(x)$.

De exemplu ecuaţia

$$2^x-cos(x)-0.5=0$$

se poate pune sub forma echivalenta

$$2^x-0,5=cos(x).$$

Atunci rădăcinile ei sunt abscisele punctelor de intersecţie ale curbelor

$y=2^x-0.5$ se $y=cos(x)$ (vezi fig.1)

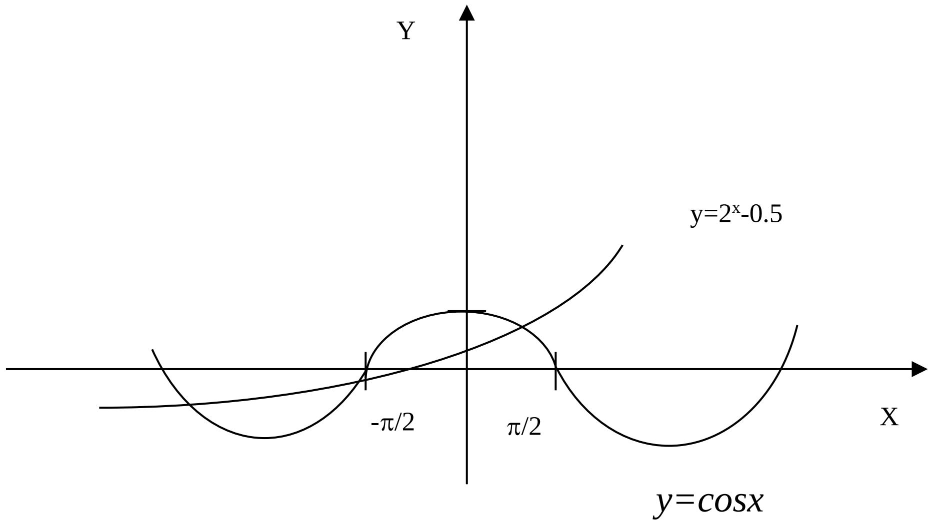


FIGURA 1

Astfel ecuaţia dată are două rădăcini reale $r_1\in(-\pi/2,0)$ şi $r_2\in(0,\pi/2)$.

b) *Metoda şirului lui Rolle*. Se ştie din cursul de analiză matematică că între două rădăcini reale consecutive ale derivatei funcţiei $y=f(x)$ există cel mult o rădăcină reală a ecuaţiei $f(x)=0$. De asemenea între două rădăcini consecutive ale ecuaţiei $f(x)=0$ există cel puţin o rădăcină a ecuaţiei $f'(x)=0$.

Fie $a<x_1<x_2<\ldots<x_k<b$ rădăcinile ecuaţiei $f'(x)=0$, aşezate în ordine crescătoare. Şirul $f(a), f(x_1),\ldots f(x_k), f(b)$ se numeşte şirul lui Rolle. Ecuaţia $f(x)=0$ are atâtea rădăcini reale câte alternanţe de semn prezintă şirul lui Rolle.

Exemplu:

Fie ecuaţia

$$F(x)= x^4-x^3-2x^2+3x-3=0$$

Derivata

$$F(x)= 4x^3-3x^2-4x+3=4x(x^2-1)-3(x^2-1)=(x^2-1)(4x-3)$$

se anulează pentru $x=-1$, $x=\frac{3}{4}$, $x=1$.

Şirul lui Rolle este următorul:

x	-2	-1	3/4	1	2
y	7	-6	-1,98	-2	3

Prin urmare avem două alternanţii de semn, deci ecuaţia dată are pe intervalul *(-2,2)* două rădăcini reale $r\in(-2,-1)$ şi $r\in(1,2)$.

3.2Calculul rădăcinii reale prin metoda înjumătăţirii intervalului

Fie ecuaţia *f(x)=0* unde funcţia *f(x)* este continuă pe *[a, b]*, are o singură rădăcină reală în acest interval şi *f(a)*f(b)<0*. Calculăm $c=\frac{(a+b)}{2}$ jumătatea intervalului *[a, b]*. Dacă *f(c)=0*, atunci *c* este chiar rădăcina căutată. Dacă nu, atunci rădăcina reală se găseşte într-unul din intervalele *[a, c]* sau *[c, b]*, acolo unde funcţia ia valori de semne contrare la capetele intervalului. Fie acesta notat din nou cu *[a, b]* , unde:

$$A=\begin{cases} c, signf(a) = signf(c) \\ c, signf(a) \neq signf(c) \end{cases}$$

$$B=\begin{cases} c, signf(b) = signf(c) \\ b, signf(b) \neq signf(c) \end{cases}$$

Fie $\varepsilon>0$ marginea superioară a erorii absolute, care se admite. Dacă $|b-a|<2\varepsilon$, atunci *c* aproximează rădăcina *r* cu eroarea dorită deoarece $|c-r|<\varepsilon$.

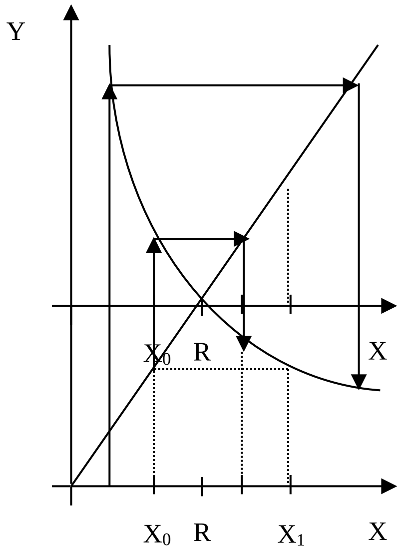
Observaţie. În programele de calculator operaţia de înjumătăţire se recomandă de scris astfel:

$$c = a + \frac{(b-a)}{2},$$

deoarece formula $c=\frac{(a+b)}{2}$, ne poate scoate în afara intervalului *[a, b]*.

3.3 Metoda aproximaţiilor succesive

Ecuaţia $f(x)=0$ o punem sub forma echivalentă $x=\varphi(x)$. Plecând de la o valoare iniţială arbitrară x_0 generăm şirul x_k după regula: $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, $k=0,1,2\ldots$,adică $x_2=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1),\ldots,x_k=\varphi(x_{k-1}),\ldots$



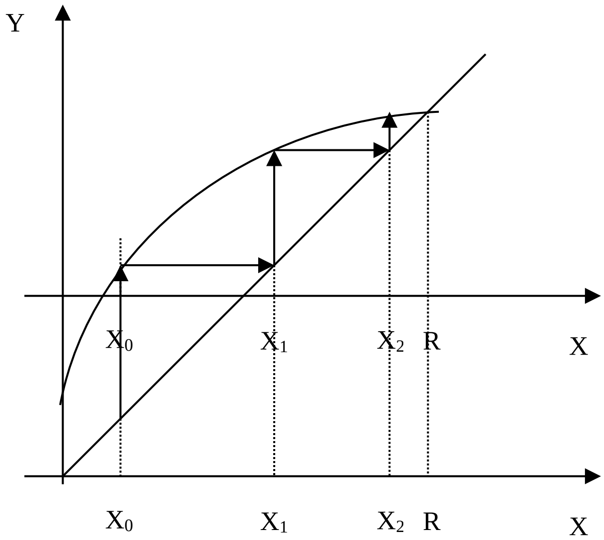


FIGURA 3

FIGURA 2

Din punct de vedere geometric, rădăcina reală r este abscisa punctului de intersecţie a curbei $y=\varphi(x)$ cu dreapta $y=x$. Modul cum şirul aproximaţiilor succesive $x_0, x_1,\ldots,x_k,\ldots$conduce spre soluţia exactă este ilustrat în fig.2 şi fig.3 (în funcţie de forma curbei $y=\varphi(x)$).

O condiţie suficientă de convergenţă este dată de următoarea:

Teoremă. Fie funcţia $\varphi(x)$ definită pe intervalul $[a, b]$ şi $\varphi(x)\in[a, b]$ pentru orice $x\in[a, b]$. Dacă funcţia φ e derivabilă şi derivata sa φ' va satisface inegalitatea $|\varphi'(x)|$ <a<1, oricare ar fi $x\in[a, b]$ atunci ecuaţia $x=\varphi(x)$ are în $[a, b]$ o singură rădăcină reală r, putem forma şirul de iterare $x_0, x_1,\ldots,x_k,\ldots$ după regula $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, astfel încît $x_k\in[a, b]$ pentru $k=0,1,2,\ldots$şi acest şir converge către rădăcina r. În plus, eroarea este evaluată prin

$$|x_k - r| \le \frac{a}{1-a}|x_k - x_{k-1}| \le \frac{a^k}{1-a}|x_1 - x_0|, \ \forall k \ge 1.$$

Dacă $-1<\varphi'(x)<0$, atunci $|x_k - r| \le |x_k - x_{k-1}|$, $\forall k \ge 1$

Exemplu: Fie dată ecuaţia $x^3-2x-9=0$. Prin metoda grafică se stabileşte că ecuaţia admite o singură rădăcină reală în intervalul *(2,3)*. Rescriem ecuaţia sub formă echivalentă

$$x=\sqrt[3]{2x+9}$$

Pentru a verifica condiţia de convergenţă, calculăm derivata

$$\varphi'(x)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+9)^2}}$$

Condiţia de convergenţă $|\varphi'(x)|<1$ este îndeplinită pentru intervalul *(2,3)* şi deci şirul de iterare

$$x_{k+1}=\sqrt[3]{2x+9}, \qquad k=0,1,2,3\ldots$$

cu valoarea iniţială (de start) $x_0 \in (2,3)$ converge către rădăcina exactă $r \in (2,3)$. Pentru determinarea rădăcinei aproximative x cu eroarea $\varepsilon>0$ procesul de calcul îl vom opri cînd

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}*|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$$

Acest criteriu pentru determinarea calculelor necesită aprecierea parametrului subunitar *a*, care nu se cunoaşte, în mod general. Subrutina care realizează metoda aproximaţiilor succesive în limbajul Turbo Pascal este următoarea:

3.4.Metoda lui Newton (tangentelor)

Fie ecuaţia algebrică sau transcendentă $f(x)=0$ care admite o singură rădăcină reală r în intervalul $[a, b]$. Presupunem în plus că derivatele $f'(x)$ şi $f''(x)$ păstrează un semn constant pe intervalul $[a, b]$.

Metoda lui Newton este definită de următoarea formulă:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)'}{f'(x)}, \qquad k=0,1,2,3\ldots \quad \textbf{(1)}$$

unde x_0 este aproximaţia iniţială a rădăcinii din intervalul $[a, b]$. Punctul x_{k+1} este abscisa punctului de intersecţie a tangentei dusă la curba $y=f(x)$ în punctul x_k cu axa OX. De aceea această metodă se mai numeşte metoda tangentelor.

Teoremă. Fie funcţia $f(x)$ definită şi de două ori derivabilă pe intervalul $[a, b]$. Presupunem că există $m>0$, $M<\infty$ astfel încât

$$|f'(x)| \geq m > 0, \quad |f''(x)| < M < \infty \quad \forall x \in [a,b]$$

şi $r \in [a, b]$ este rădăcina ecuaţiei $f(x)=0$. Atunci şirul de iterare determinat de relaţia (1) converge către r dacă aproximaţia iniţială x_0 este aleasă într-o vecinătate a rădăcinii r. Eroarea este estimată de relaţia

$$|x_k - r| \leq C^* |x_k - x_{k-1}|^2, \quad C = \frac{M}{2m}, \qquad k=1,2\ldots$$

Metoda lui Newton este un caz particular al metodei aproximaţiilor succesive cu funcţia

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Următoarea procedură realizează rezolvarea unei ecuaţii neliniare cu o singură necunoscută prin metoda lui Newton:

3.5. Metoda secantelor

Metoda secantelor se deduce din metoda lui Newton înlocuind derivata

$$f'(x) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Obţinem

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \times \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \qquad \textbf{(2)}$$

Pentru startul iteraţiilor în metoda secantelor avem nevoie de două aproximaţii iniţiale x_0 şi x_1. Valoarea x_{k+1} este abscisa punctului de intersecţie dintre secanta care trece prin punctele $(x_{k-1},f(x_{k-1}))$ şi $(x_k,f(x_k))$ şi OX; de aici şi denumirea metodei. La fiecare pas nou în metoda secantei se calculează o singură valoare nouă pentru funcţia f. Formula (2) se mai poate pune sub forma

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})},$$

care nu se recomandă la programare deoarece, dacă $f(x_k)*f(x_{k-1})>0$ şi $x_k \approx x_{k-1}$, atunci poate avea loc o neutralizare a termenilor.

4.Indicaţii metodice

Rezolvarea ecuaţiei *f(x)=0* la calculatorul electronic va decurge după cum urmează:

1) Se vor separa rădăcinile reale ale ecuaţiei date.

2) Se va defini o procedură *FUNCTION F(X)* pentru calculul funcţiei *f(x)*.

3) Se va prezenta ecuaţia *f(x)* sub forma echivalentă $x=\varphi(x)$, alegând funcţia $\varphi(x)$ în mod special, că să se satisfacă condiţia suficientă de convergenţă:

$$|\varphi'(x)| \leq \alpha < 1$$

4) Se va defini o procedură *FUNCTION FI(X)* pentru calculul funcţiei $\varphi(x)$.

5) Se va defini o procedură *FUNCTION F1(X)* care calculează derivata $f'(x)$.

6) Se va scrie un program principal care va utiliza procedurile *BISECT*, *SITER*, *NEWTON* şi *SECANT*.

7) Se va rezolva ecuaţia la calculator şi se va afişa soluţia sau un mesaj de eroare în caz că metoda nu converge.

8) Se va alcătui un raport.